Chapitre VI : Généralités sur les fonctions

Objectif : Au cycle 4, les élèves ont découvert progressivement la notion de fonction, manipulé différents modes de représentation : expression algébrique, tableau de valeurs, représentation graphique, programmes de calcul. Ils connaissent le vocabulaire de base : variable, fonction, antécédent, image et la notation $f(x)$. Selon le mode de représentation choisi, ils déterminent une image ou des antécédents d'un nombre par une fonction. Ils ont étudié les fonctions linéaires, les fonctions affines et leur représentation graphique.

Compétences :

- Exploiter l'équation
- $y = f(x)$ d'une courbe pour savoir si un point appartient à la courbe
- Résoudre graphiquement des équations ou inéquations à l'aide de courbes
- Modéliser une situation avec une fonction
- Conjecturer la parité d'une fonction

Histoire des mathématiques :

Partie I : Trois façons de représenter les fonctions

I. Avec une formule

Définition
Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Définir une fonction f *sur* D, c'est associer à tout nombre x de D un unique nombre, noté $f(x)$. • Quand $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par f. • Dest l'ensemble de définition de la fonction f

Attention : $f(4)$ se lit "f de 4" et ne signifie pas $f \times 4$.

Exemple : Soit la fonction $f$définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) = -3x + 2$$

- $f(0) = -3 \times 0 + 2 = 2$
- $f(\frac{1}{3}) = -3 \times \frac{1}{3} + 2 = -1 + 2 = 1$

II. Avec un tableau de valeurs

Définition
Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D. Soit x un élément de D. Un tableau de valeurs de la fonction f donne, sur la 1ère ligne (ou colonne) différentes valeurs de la variable x et en vis-à-vis sur la 2e ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Exemple : $f : x \rightarrow 3x + 5$ admet comme tableau de valeurs

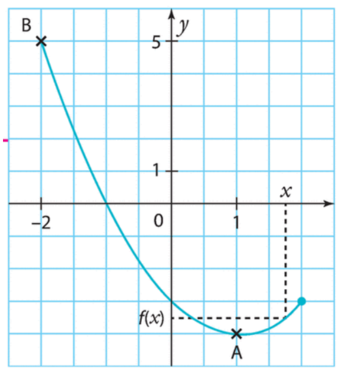
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−4	−1	2	5	8	11	14

donc par exemple :
- $f(-1) = 2$ à savoir l'image de -1 est 2 par la fonction f
- L'antécédent de 11 par la fonction f est 2.

III. Avec un graphique

Définition
On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D. Dans un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x ; y)$ qui vérifient $y = f(x)$ Cette courbe est appelée la courbe représentative de la fonction f

Exemple :
On considère la fonction définie sur [-2 ; 2] par $f(x) = (x - 1)^2 - 4$
La courbe représentative de la fonction f est la courbe d'équation :
$y = (x - 1)^2 - 4$, tracée ci-contre.
$f(1) = (1 - 1)^2 - 4 = -4$ donc l'image de 1 est -4 ;
la courbe passe par le point A(1 ; -4)
Le point B(-2 ; 5) est sur la courbe. Cela veut dire que $f(-2) = 5$



Partie II : Parité d'une fonction

I. Définition

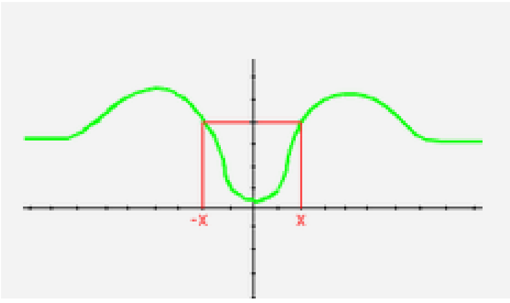
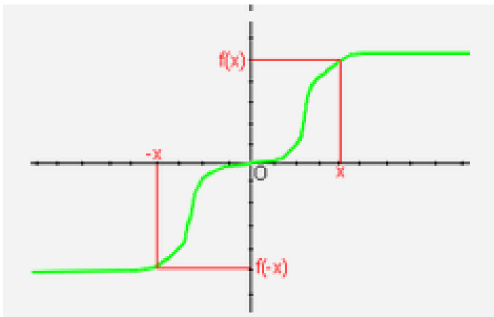
Définition : parité d'une fonction
Soit I l'ensemble de définition d'une fonction f. On dit qu'une fonction f est : • paire lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ • impaire lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$

Exemples :
- la fonction $f(x) = x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- la fonction $g(x) = x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

II. Propriété graphique

Propriété graphique
f est une fonction paire si et seulement si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées f est une fonction impaire si et seulement si la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère

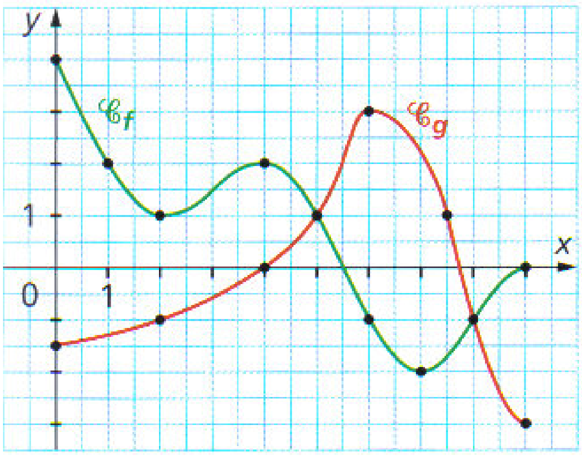
Exemple :

 la courbe est symétrique par rapport à (Oy) donc la fonction est paire	 la courbe est symétrique par rapport à O donc la fonction est impaire

Partie III : Résolution graphique d'équations

Théorèmes
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = k$. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la courbe représentative de g.

Exemple : Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 1$



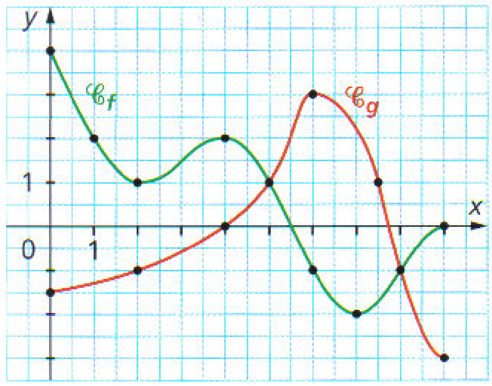
Solution : Les solutions de l'équation $f(x) = 1$sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite d'équation $y = 1$. On obtient graphiquement $S = \{2 ; 5\}$.

Partie IV : Résolution graphique d'inéquations

I. Résolution d'inéquations

Théorème
- Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés en-dessous de la droite d'équation $y = k$. - Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés en-dessous de la courbe représentative de g.

Exemple : Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) < 1$

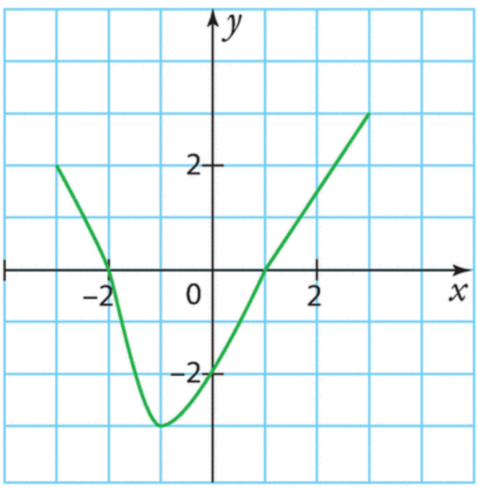


Solution : Les solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.
On obtient graphiquement S =]5 ; 9]

II. Signe d'une fonction

Définition
Etudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement positif, nul, ou strictement négatif. Le signe est souvent représenté sous la forme d'un tableau de signes.

Exemple : f est la fonction définie sur [-3 ; 3] dont voici la courbe représentative :



- $f(x)$ est strictement positif si $x \in [-3 ; -2[\cup]1 ; 3]$
- $f(x)$ est strictement négatif si $x \in]-2 ; 1[$
- $f(x) = 0$ pour $x = -2$ ou $x = 1$

On présente les résultats dans un tableau de signes :

x	-3		-2		1		3
$f(x)$		+	0	−	0	+	