

Données :

Vitesse de la lumière	$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Charge de l'électron	$e = 1,60218 \times 10^{-19} \text{ C}$
Unité de masse atomique (masse de l'atome de ^{12}C) / 12	$1 \text{ u} = 931,494 \text{ MeV}/c^2$
Masse de l'électron	$m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2 = 5,486 \times 10^{-4} \text{ u}$
Masse du proton	$m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2 = 1,007276 \text{ u}$
Masse du neutron	$m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2 = 1,008665 \text{ u}$
Masse de l'atome d'Hydrogène	$m_H = 1,673536 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,0221 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse volumique de l'Uranium naturel	$\rho_U = 18,95 \text{ } 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Masse molaire de l'Uranium naturel	$M_U = 238,03 \text{ g.mol}^{-1}$
Unité de distance usuelle en physique nucléaire	$1 \text{ Fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
Unité de surface usuelle en physique nucléaire	$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Constante de couplage électromagnétique	$e^2/4\pi\epsilon_0 = 1,43996 \text{ MeV.fm}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \text{ } 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Ce problème étudie quelques aspects liés au fonctionnement des centrales nucléaires à fission de type réacteur à eau pressurisée (REP), qui représentent environ 80% de la production d'électricité en France. Les connaissances de physique nucléaire nécessaires pour aborder ce problème se situent au niveau des classes de terminale scientifique. Les différentes parties du problème sont largement indépendantes les unes des autres : les résultats établis à la partie III sont utilisés dans certaines questions des parties IV et V.

La partie VI (étude du fonctionnement de l'alternateur) est totalement indépendante des précédentes.

Le comportement d'un réacteur nucléaire est contrôlé par la population des neutrons qu'il renferme. Dans l'approximation continue, celle-ci est décrite comme un « gaz parfait de neutrons » de densité volumique (nombre de neutrons par unité de volume) n . On montre en particulier que la puissance produite par unité de volume du combustible nucléaire est proportionnelle à n . L'ordre de grandeur de n est 10^{13} m^{-3} : la densité de neutrons est très faible par rapport à celle de la matière ordinaire du cœur, et les propriétés physiques de cette dernière ne sont pas modifiées par la présence des neutrons.

Un neutron « père », produit par fission d'un noyau lourd avec une énergie cinétique de l'ordre de 2 MeV, est diffusé et ralenti par des noyaux « modérateurs » présents dans le réacteur. Il peut éventuellement sortir du réacteur ou être absorbé par des noyaux non fissiles présents. A l'issue du ralentissement, l'énergie cinétique du neutron est de l'ordre de 0,025 eV. Il peut alors être absorbé par un noyau de carburant fissile (Uranium 235 ou Plutonium 239) c'est-à-dire capable de fissionner en produisant 2 ou 3 nouveaux neutrons « fils » ($\nu = 2,45$ neutrons en moyenne pour ^{235}U) en produisant de l'énergie. Ce mécanisme constitue « le cycle des neutrons » et son contrôle permet le pilotage du réacteur. La durée d'un tel cycle est de l'ordre de 1 milliseconde.

La température maximale au centre des crayons de combustible (oxyde d'uranium et de plutonium dans une gaine d'acier) est d'environ 2000 °C, et chute vers 500 °C à la périphérie des crayons. L'énergie produite par les réactions de fission est transférée au fluide caloporteur du circuit primaire. Dans la filière REP, ce fluide est constitué par de l'eau sous pression qui circule dans le cœur, et qui joue aussi le rôle de modérateur. La température du caloporteur dans le cœur est de l'ordre de 300 °C. Le fluide caloporteur transfère alors l'énergie thermique au circuit secondaire, qui met en mouvement la turbine à vapeur produisant l'électricité, comme dans tous les autres types de centrales thermiques.

I. Le noyau atomique. La fission nucléaire.

I.1. Terminologie

I.1.1 a) Rappeler les définitions du nombre de masse A et du numéro atomique Z d'un noyau. Par la suite, on notera $N = A - Z$. Que représente N ?

b) Donner un exemple de noyau atomique ainsi que sa composition et la nomenclature usuelle associée.

I.1.2 Qu'appelle-t-on des noyaux isotopes, des noyaux isobares ? Donner des exemples pour chacun de ces termes.

I.1.3 Que désigne-t-on par fission nucléaire, fission spontanée, fission induite (ou provoquée) ?

I.1.4 Qu'appelle-t-on noyaux fissiles ? Noyaux fertiles ?

I.2. Energie nucléaire.

I.2.1 a) Rappeler la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein. Que signifie cette relation ?

b) En physique nucléaire, les énergies sont exprimées en millions d'électrons-volts (MeV), et les masses en MeV/c^2 . Donner la correspondance numérique entre les unités kg et MeV/c^2 .

c) A.N. Donner en MeV/c^2 la masse de l'atome d'hydrogène. Comparer à $(m_p + m_e)$. Commenter.

I.2.2 On appelle *défaut de masse* d'un noyau la quantité :

$$B_1(A, Z) = Z m_p + N m_n - m(A, Z),$$

où $m(A, Z)$ désigne la masse du noyau (A, Z) .

a) Que représente cette quantité ? Quel est son signe ?

b) Dans la pratique, on définit $B(A, Z)$ à partir des masses atomiques :

$$B(A, Z) = Z m_H + N m_n - M(A, Z),$$

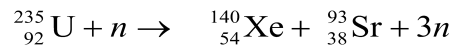
où $M(A, Z)$ désigne la masse de l'atome (A, Z) . Quelle est l'origine physique et l'ordre de grandeur de la différence entre B et B_1 ? Cette différence est-elle significative en physique nucléaire ?

I.2.3 On considère une réaction de fission d'un noyau, symbolisée par $X \rightarrow X' + X''$, et on note B , B' et B'' les défauts de masse respectifs des noyaux X , X' et X'' .

a) Quelles sont les relations entre les valeurs des nombres de masse A , A' et A'' , et les numéros atomiques Z , Z' et Z'' pour les noyaux ci-dessus ?

b) A quelle condition sur B , B' et B'' la fission précédente peut-elle se produire de façon spontanée ? Exprimer l'énergie Q dégagée par cette réaction en fonction de B , B' et B'' . Sous quelle(s) forme(s) cette énergie est-elle dégagée ?

c) A.N. On considère la réaction de fission induite typique



On donne $M_{{}^{235}\text{U}} = 235,044 \text{ u}$, $M_{{}^{140}\text{Xe}} = 139,919 \text{ u}$, $M_{{}^{93}\text{Sr}} = 92,915 \text{ u}$

- Calculer le défaut de masse du noyau d'uranium ${}^{235}\text{U}$.
- Calculer l'énergie Q dégagée par une telle fission en MeV.
- Calculer en joules l'énergie dégagée pour une mole. Commenter ce résultat.

I.2.4 a) On note $W(A, Z) = B(A, Z) / A$. Que représente cette quantité?

b) Comment s'appelle la courbe de $W(A, Z)$ en fonction de A , pour les noyaux stables. Tracer le graphe de cette courbe de façon schématique.

c) Dans quel domaine de cette courbe la fission est-elle possible ?

I.3. Modèle de la goutte du noyau atomique. Formule de Bethe-Weissäcker.

En première approximation, le noyau se comporte comme un empilement sphérique de A nucléons semblables à des sphères dures. Ce modèle conduit à représenter le défaut de masse $B(A, Z)$ du noyau comme une somme de contributions dues à différents effets.

I.3.1 Le volume V du noyau varie en fonction du nombre de nucléons comme $V = V_0 A$. On

notera
$$r_0 = \left(\frac{3V_0}{4\pi} \right)^{1/3} = 1.3 \text{ fm}.$$

a) Que représentent r_0 et V_0 ? Quel est l'ordre de grandeur de V_0 ?

b) Exprimer le rayon R et la surface S d'un noyau de A nucléons en fonction de r_0 et de A .

I.3.2 Chaque nucléon est lié dans le noyau à ses plus proches voisins par des forces nucléaires « fortes », avec une énergie de liaison par nucléon notée a_v . En déduire l'expression du «terme de volume» du défaut de masse $B(A, Z)$.

I.3.3 Les nucléons à la surface du noyau sont moins liés. Pourquoi ? En déduire, dans l'expression de $B(A, Z)$, l'existence d'un terme proportionnel à la surface du noyau, $-a_s A^\alpha$.

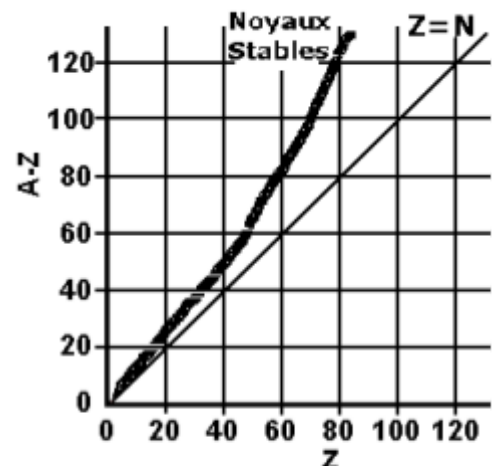
Donner la valeur de l'exposant α . Commenter le signe de ce «terme de surface».

I.3.4 Donner l'expression de l'énergie électrostatique d'une boule uniformément chargée, de rayon R et de charge Ze . En déduire, dans l'expression de $B(A, Z)$, l'existence d'un «terme de Coulomb» $-a_c Z^\beta / A^\gamma$. Donner la valeur des exposants β et γ . Commenter le signe de ce terme de Coulomb.

I.3.5 On constate, sur la table des noyaux stables (figure 1) la symétrie protons-neutrons, visible en particulier pour les noyaux légers ($A < 40$). Celle-ci provient d'un «terme de symétrie» de $B(A, Z)$, d'origine quantique, et de la forme

$$-a_{sy} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Montrer que ce terme favorise les noyaux symétriques $Z = N$.



I.3.6 a) Donner l'expression finale de $B(A, Z)$ résultant des 4 termes ci-dessus.

b) Les valeurs couramment admises pour les constantes introduites dans les différents termes sont :

$$\begin{aligned}a_V &= 15,85 \text{ MeV}/c^2 \\a_S &= 18,34 \text{ MeV}/c^2 \\a_C &= 0,71 \text{ MeV}/c^2 \\a_{Sy} &= 23,22 \text{ MeV}/c^2\end{aligned}$$

Calculer la masse de $^{235}_{92}\text{U}$ obtenue dans ce modèle, et comparer la valeur de B à celle obtenue au I.2.3 c). Quel est l'ordre de grandeur de la précision du modèle de la goutte ?

I.4 Stabilité des noyaux vis-à-vis de la fission.

I.4.1 Un noyau (A, Z) instable peut facilement se transformer en un noyau $(A, Z \pm 1)$ par émission d'électrons ou de positrons (émission β). Dans ces conditions, l'isobare stable pour une valeur de A donnée, correspond à la valeur de Z qui maximise $B(A, Z)$.

a) tracer l'allure de la courbe $B(A, Z)$ en fonction de Z pour A fixé.

b) Montrer que la valeur de Z correspondant au maximum de cette courbe s'écrit :

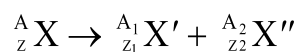
$$Z_{\text{stable}} = \frac{A}{2 \left(1 + \frac{a_C A^{2/3}}{4a_{Sy}} \right)}$$

c) Montrer que ce dernier résultat permet de retrouver l'allure de la courbe de stabilité de la figure 1. Quel est le terme de la formule de Bethe-Weissäcker responsable de l'excès de neutrons des noyaux lourds ? Pourquoi ?

d) A.N. Calculer la valeur de Z de l'isobare stable pour $A = 235$, et conclure sur la précision du modèle de la goutte.

Dans toute la suite de cette question, on utilisera l'approximation de symétrie $N = Z$, pour tous les noyaux discutés.

I.4.2 On considère la réaction de fission spontanée en deux fragments X' et X'' :



a) Calculer l'énergie Q dégagée par la réaction en fonction de A , A_1 et des constantes a_S et a_C .

b) Montrer que Q est extremum pour des fragments égaux $A_1 = A_2 = A/2$. Exprimez dans ce cas la charge Z_1 , le rayon R_1 et la surface S_1 de ces fragments en fonction de Z de A et r_0 . Montrer que l'énergie libérée par la fission vaut alors

$$Q = a_s A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + a_c Z^2 / A^{1/3} (1 - 2^{-2/3}).$$

Commenter le signe de ces deux contributions.

c) On estime de façon grossière que la fission se produit de façon spontanée lorsque l'énergie Q libérée par la réaction de fission permet de surmonter la barrière de potentiel d'énergie coulombienne entre les deux fragments X' et X'' .

i) Exprimer l'énergie potentielle coulombienne E_c entre les deux fragments sphériques, assimilés à des points de charges $Z_1 e$ et séparés par une distance $r \geq 2 R_1$. Tracer l'allure de cette fonction en fonction de r . Que se passe-t-il pour $r \leq 2 R_1$?

ii) Estimer la hauteur maximale de cette barrière en calculant l'énergie de Coulomb E_c lorsque les deux fragments sphériques se touchent juste.

iii) En déduire que la condition pour que la fission se produise de façon spontanée

s'écrit
$$\frac{Z^2}{A} > K$$

iv) A.N. Calculer la valeur numérique de K , et en déduire la valeur limite de stabilité des noyaux par fission spontanée, A_{fission} . Comparer la valeur obtenue ici avec celle observée dans la réalité. Que peut-on penser de ce résultat ?

II. Cinétique de la « pile ponctuelle ».

Une première approche très simplifiée du comportement du réacteur est obtenue en supposant le réacteur homogène, c'est-à-dire que la densité neutronique ne dépend que du temps, et est notée $n(t)$. Dans cette partie, on établit des équations pour $n(t)$ qui décrivent ce que l'on appelle la « cinétique de la pile ponctuelle ».

II.1. Milieu multiplicateur simple.

On note

- τ_0 la durée moyenne d'un cycle neutronique, c'est-à-dire la durée séparant l'émission d'un neutron père de l'émission des neutrons « fils »,
- w_1 la probabilité qu'un neutron issu de fission soit absorbé par un noyau fissile,
- w_2 la probabilité qu'un neutron absorbé par un noyau fissile produise une fission,
- ν le nombre moyen de neutrons produits par la fission d'un noyau fissile,
- k_∞ le facteur de multiplication, c'est-à-dire le nombre moyen de neutrons fils engendrés par un neutron père, à l'issue d'un cycle.

II.1.1 Exprimer le facteur multiplicateur k_{∞} en fonction de w_1 , w_2 et v . Quel facteur peut on contrôler en pratique pour modifier la valeur de k_{∞} ?

II.1.2 Donner l'expression $n(t + \tau_0)$ de la densité neutronique à l'instant $t + \tau_0$, en fonction de $n(t)$ et de k_{∞} .

II.1.3 Sachant que pendant la durée τ_0 , $n(t)$ varie peu, exprimer la dérivée $\frac{dn}{dt}$ en fonction de $n(t)$, k_{∞} et τ_0 .

II.1.4 a) Donner la solution de l'équation précédente avec la condition initiale $n(0) = n_i$. On notera $T_0 = \tau_0 / (k_{\infty} - 1)$. Que représente T_0 ?

b) Tracer la solution $n(t)$ pour $k_{\infty} > 1$ et $k_{\infty} < 1$, et interpréter ces courbes.

II.1.5 A.N. $k_{\infty} - 1 = 5 \times 10^{-4}$, $\tau_0 = 10^{-3}$ s. Calculer T_0 ; l'hypothèse du II.1.3 est-elle vérifiée ? Calculer $n(t) / n(0)$ pour $t = 5$ s. Que peut-on en conclure sur la possibilité de piloter un tel milieu multiplicateur ?

II.2. Prise en compte des neutrons retardés. Equation de Nordheim.

Un très petit nombre de fissions ne produisent pas les neutrons de façon immédiate. En effet, certains produits de fissions, dits « précurseurs », émettent un neutron au bout d'un certain temps, à la suite de désintégrations plus lentes. Un exemple type est constitué par la chaîne :



De tels neutrons sont dit « retardés ».

Pour simplifier l'étude, on supposera ici une seule espèce de noyau précurseur. On note :

- $C(t)$ la densité volumique en noyaux précurseurs,
- $\lambda_1 = 1/\tau_1$ la constante de désintégration radioactive du précurseur,
- β la fraction de neutrons retardés produits.

II.2.1 En l'absence de fission, donner l'équation donnant l'évolution de $C(t)$ au cours du temps, ainsi que sa solution pour une densité volumique initiale $C(0) = C_i$.

II.2.2 a) En supposant dans un premier temps que le précurseur ne se désintègre pas ($\lambda_1 = 0$), donner l'expression de la densité neutronique $n(t + \tau_0)$ en fonction de $n(t)$, de k_{∞} et de β . En

déduire dans ce cas les expressions de $\frac{dn}{dt}$ et $\frac{dC}{dt}$.

b) Montrer que dans le cas où le précurseur se désintègre, on obtient les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \frac{k_{\infty}(1-\beta)-1}{\tau_0} n(t) + \frac{C(t)}{\tau_1} \\ \frac{dC}{dt} = \frac{k_{\infty}\beta}{\tau_0} n(t) - \frac{C(t)}{\tau_1} \end{cases}$$

II.2.3 A quelle condition sur k_{∞} une solution stationnaire non nulle est elle possible ?

II.2.4 On cherche maintenant, dans le cas où $k_{\infty} > 1$, une solution non stationnaire non nulle des équations précédentes, de la forme

$$\begin{cases} n(t) = n_0 \exp(\omega t) \\ C(t) = C_0 \exp(\omega t) \end{cases}$$

a) Montrer que la relation donnant ω peut s'écrire (équation de Nordheim) :

$$(k_{\infty} - 1) = \omega \tau_0 + \frac{k_{\infty} \beta \omega \tau_1}{1 + \omega \tau_1}$$

b) On définit les quantités θ et δ par :

$$2\theta = \frac{\tau_0 + \tau_1 (1 - k_{\infty} (1 - \beta))}{k_{\infty} - 1} \quad \text{et} \quad \delta^2 = \frac{\tau_0 \tau_1}{k_{\infty} - 1}$$

Dans quelles unités s'expriment θ et δ ?

Montrer qu'avec ces notations, l'équation de Nordheim peut se réécrire $\delta^2 \omega^2 + 2\theta \omega - 1 = 0$.

c) En déduire l'existence d'une solution croissante du système d'évolution associé à une valeur $\omega_1 > 0$, dont on calculera le temps caractéristique d'évolution $T_1 = 1/\omega_1$.

d) On suppose dans la suite que $\delta^2 \ll \theta^2$; que vaut T_1 (on distinguera les deux cas $\theta > 0$ et $\theta < 0$) ? Exprimer ces résultats en fonction de τ_0 , τ_1 , k_{∞} et β .

e) Pourquoi faut il toujours s'assurer que la condition $k_{\infty} (1-\beta) < 1 + \tau_0 / \tau_1$ (≈ 1) est bien remplie au cours des évolutions du réacteur nucléaire. Donner une interprétation physique à cette condition.

f) A.N. $k_{\infty} - 1 = 5 \times 10^{-4}$, $\tau_0 = 10^{-3}$ s, $\tau_1 = 80$ s, $\beta = 1,2 \times 10^{-3}$. Vérifier que la condition $\delta^2 \ll \theta^2$ est bien remplie, et calculer T_1 . Conclure sur la possibilité de piloter un tel réacteur.

III. Sections efficaces et taux de réaction.

Dans cette section, on établit des résultats classiques de la neutronique. Ces résultats sont utilisés dans la suite du problème. On considérera les neutrons comme des particules ponctuelles classiques non relativistes.

On considère dans toute cette question une population de neutrons monokinétiques, de vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ fixée. On admettra que tous les résultats établis ici s'étendent sans modification en dimension trois. On note n le nombre de neutrons par unité de volume, encore appelée densité neutronique. On définit le *flux neutronique* comme la quantité *scalaire* $\phi = n v$. Cette dernière quantité remplace traditionnellement n dans les études de neutronique, et ne doit pas être confondue avec le *courant neutronique* de diffusion $\vec{J}$. La relation (loi de Fick) reliant ϕ et ce courant $\vec{J}$ sera établie dans la partie V.

III.1 Section efficace.

III.1.1 Calculer dN_{inc} , le nombre de neutrons incidents sur une surface dS orthogonale à l'axe Ox , pendant l'intervalle de temps dt , en fonction de ϕ , dS et dt .

III.1.2 On considère une tranche de matériau d'épaisseur dx , contenant des noyaux cibles, c'est-à-dire capable d'interagir avec les neutrons (cf. figure 2). La concentration en noyaux cibles (le nombre de noyaux par unité de volume) est notée C . La *section efficace* de diffusion des neutrons sur les noyaux cibles σ est définie comme le produit de la *surface du noyau cible* par la *probabilité d'interaction* neutron-cible.

a) Calculer dN_{diff} , le nombre des neutrons qui sont diffusés dans la tranche de section dS et d'épaisseur dx pendant dt . En déduire que le taux de réaction τ_R , c'est-à-dire le nombre de réactions des neutrons par unité de volume et de temps, vaut

$$\tau_R = \phi \sigma C$$

b) Vérifier l'homogénéité de la formule ci-dessus.

III.1.3 A.N. Les noyaux cibles sont les noyaux de ^{235}U d'une cible d'uranium naturel. La proportion de ^{235}U dans l'uranium naturel, de masse volumique $\rho_U = 18,95 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de

masse molaire $M_U = 238,03 \text{ g.mol}^{-1}$, est de 0,7%. La section efficace d'absorption des neutrons thermiques sur ^{235}U vaut $\sigma_a = 680,8 \text{ barn}$. Enfin, la densité neutronique des neutrons thermiques, d'énergie cinétique $E_{th} = 0,025 \text{ eV}$, sera prise égale à $n = 10^{13} \text{ m}^{-3}$. Calculer le taux d'absorption des neutrons thermique par l'uranium fissile ^{235}U .

III.2 Section macroscopique.

On définit la *section macroscopique* Σ du matériau par $\Sigma = \sigma C$. Dans un premier temps, on supposera un seul type de noyaux cibles et un seul type de réactions dans le matériau.

III.2.1 Quelle est l'unité de Σ dans le système SI ?

A.N. Calculer la valeur numérique de la section macroscopique d'absorption Σ_a des neutrons par les noyaux ^{235}U de l'uranium naturel.

III.2.2 On considère un flux de neutrons $\varphi(x)$ incident à l'abscisse x . Exprimer la diminution $d\varphi$ de ce flux par les réactions ayant lieu dans la tranche d'épaisseur dx , en fonction de $\varphi(x)$, Σ et dx .

III.2.3 a) En déduire que le flux neutronique traversant le matériau s'atténue suivant la loi :

$$\varphi(x) = \varphi(0) \exp(-\Sigma x)$$

b) Que représente la quantité $1/\Sigma$?

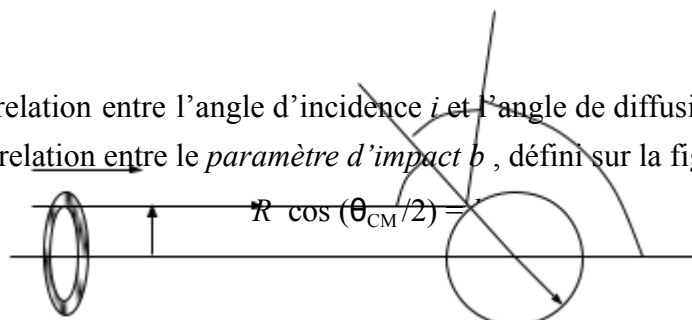
c) A.N. Calculer $1/\Sigma$ pour le milieu considéré au III.1.3 .

III.2.4 Indiquer sans calculs comment les résultats de cette question doivent être modifiés lorsque plusieurs types de noyaux cibles et différentes réactions (absorption, diffusion...) sont présents dans le matériau.

III.3 Diffusion isotrope.

Pour étudier la diffusion élastique des neutrons sur les noyaux modérateurs, on considère un modèle de collision très simple : dans le référentiel de centre de masse (RCM), le mouvement relatif du neutron par rapport au noyau diffuseur est décrit par un choc élastique sur une sphère fixe de rayon $R = r_n + r_{\text{diffuseur}}$ (cf. figure 3). La réflexion à la surface de la sphère suit la loi de Descartes $i = i'$.

III.3.1 Donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de diffusion θ_{CM} dans le RCM. En déduire que la relation entre le paramètre d'impact b , défini sur la figure 3, et θ_{CM} s'écrit



III.3.2 On considère un flux de neutrons incidents ϕ . Exprimer le nombre dN de neutrons incidents par seconde dans la couronne comprise entre les paramètres d'impact b et $b+db$.

III.3.3 Les neutrons définis au III.3.2 diffusent entre les angles θ_{CM} et $\theta_{CM} - d\theta_{CM}$ donnés par la question III.3.1. En déduire que le nombre de neutrons qui diffusent par seconde entre θ_{CM} et $\theta_{CM} - d\theta_{CM}$ vaut :

$$dN = \phi \frac{\pi R^2}{2} \sin(\theta_{CM}) d\theta_{CM}$$

III.3.4 Quel est le nombre total N de neutrons diffusés par seconde par ce diffuseur ? Ce résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?

III.3.5 On note $\alpha = \cos(\theta_{CM})$. Montrer que $\frac{dN}{d\alpha}$ est indépendante de α , c'est-à-dire ne dépend pas de l'angle θ_{CM} . Pourquoi dit-on dans ce cas que la diffusion est *isotrope* dans le référentiel du centre de masse ?

IV. Ralentissement des neutrons.

Dans la filière REP, le ralentissement (ou modération) des neutrons est une étape indispensable : en effet la probabilité d'absorption des neutrons par ^{235}U augmente comme $1/v$, où v est la vitesse des neutrons. La modération privilégie l'absorption par ^{235}U par rapport à celle par ^{238}U , et augmente ainsi le taux de fission, ce qui permet d'atteindre des valeurs du facteur de multiplication k_{∞} suffisantes. La modération est assurée par des collisions élastiques avec les noyaux de modérateur (dans le cas des REP, essentiellement les noyaux d'hydrogène de la molécule d'eau).

IV.1. Collisions élastiques des neutrons.

On étudie la collision élastique d'un neutron de masse $m_n \approx 1$ u, et de vitesse initiale $\vec{v}$ dans le référentiel «du laboratoire» (en abrégé RL), avec un noyau diffuseur de masse $m_A \approx A$ u.

IV.1.1. a) Montrer que pendant pratiquement toute la durée du ralentissement du neutron, on peut considérer que les noyaux diffuseurs sont non liés, et au repos dans le RL avant la collision. On se placera par la suite dans cette hypothèse.

b) Définir le référentiel, ici galiléen, du centre de masse du système {neutron, noyau diffuseur}, (en abrégé RCM), et calculer sa vitesse $\vec{V}_{\text{CM}}$ par rapport au RL.

c) Donner la relation reliant la vitesse $\vec{v}$ d'une particule dans le RL à sa vitesse $\vec{u}$ dans le RCM.

d) En déduire l'expression des vitesses $\vec{u}$ du neutron et $\vec{U}$ du diffuseur dans le RCM, avant collision, en fonction de A et $\vec{v}$.

IV.1.2. On note $\vec{P}$ et $\vec{P}$ les impulsions du neutron et du diffuseur avant collision dans le RCM, et $\vec{P}'$ et $\vec{P}'$ les grandeurs correspondantes après collision. On note de même E_n et E_A les énergies cinétiques du neutron et du diffuseur avant collision, et E'_n et E'_A les énergies correspondantes après collision, dans le RCM.

a) Donner la relation reliant E et $\vec{P}$ pour une particule libre non relativiste de masse m , dans un référentiel donné.

b) Que vaut l'impulsion totale $\vec{P} + \vec{P}$ dans le RCM avant la collision ? En déduire la valeur de $\vec{P}' + \vec{P}'$ après collision, puis les relations existant entre les normes p, P, p' et P' de ces impulsions.

c) En utilisant l'hypothèse de collision élastique et les résultats démontrés aux a) et b), montrer que $p = P = p' = P'$. Faire le schéma correspondant des impulsions avant et après collision dans le RCM.

IV.1.3. On note θ_{CM} l'angle de diffusion du neutron dans le RCM, c'est-à-dire l'angle ($\vec{p}$, $\vec{p}'$), et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ les vecteurs unitaires $\vec{p}/p$ et $\vec{p}'/p'$ repérant les directions d'entrée et de sortie du neutron dans le RCM.

a) Exprimer $\vec{u}'$ et $\vec{U}'$, vitesses du neutron et du diffuseur dans le RCM après collision, en fonction de A , $\vec{u}$, et $v = \|\vec{v}\|$ norme de la vitesse initiale du neutron dans le RL.

b) En déduire que les vitesses $\vec{v}'$ et $\vec{V}'$ du neutron et du diffuseur après collision, dans le RL, s'expriment par les relations :

$$\begin{cases} \vec{v}' = \frac{v}{(1+A)}(\vec{n} + A\vec{n}') \\ \vec{V}' = \frac{v}{(1+A)}(\vec{n} - \vec{n}') \end{cases}$$

c) On note θ_L la valeur de l'angle de diffusion dans le RL. Exprimer $\cos(\theta_L)$ en fonction de $\cos(\theta_{CM})$ et de A .

IV.2 Ralentissement des neutrons.

IV.2.1 Montrer que l'énergie cinétique du neutron dans le RL après collision s'exprime en fonction de celle avant collision par :

$$E' = E \frac{(1 + A^2 + 2A \cos(\theta_{CM}))}{(1 + A)^2}$$

Quelles sont les valeurs maximale E'_{max} et minimale E'_{min} de E' ? A quels types de diffusions ces énergies correspondent-elles ?

IV.2.2 Calculer la perte relative d'énergie cinétique du neutron $\zeta = (E - E')/E$ au cours d'une collision.

IV.2.3 On suppose la collision isotrope dans le RCM, c'est-à-dire que toutes les valeurs de $\cos(\theta_{CM})$ sont équiprobables (voir III.3.5). Calculer l'énergie moyenne $\bar{E}'$ des neutrons après la collision.

IV.2.4 Calculer la perte relative moyenne d'énergie du neutron $\bar{\zeta}$ au cours des collisions avec le modérateur. En déduire que le modérateur doit être un noyau léger.

IV.3 Notion de léthargie

IV.3.1 On définit la léthargie des neutrons d'énergie cinétique E comme $\xi = \ln(E_0/E)$, où $E_0 = 10 \text{ MeV}$.

Calculer le gain en léthargie au cours d'une collision en fonction de A et de $\cos(\theta_{\text{CM}})$.

IV.3.2 On montre alors que le gain moyen en léthargie au cours d'une collision vaut

$$\overline{\Delta\xi} = 1 + \frac{(1-A)^2}{2A} \ln\left(\frac{1-A}{1+A}\right)$$

Que vaut le gain moyen en léthargie après n collisions ? En déduire le nombre de collisions nécessaires pour assurer le ralentissement des neutrons entre l'énergie E_{fission} d'émission des neutrons au cours de la fission et l'énergie thermique E_{therm} .

IV.3.3 A.N. On donne $E_{\text{fission}} = 2 \text{ MeV}$, $E_{\text{therm}} = 0,025 \text{ eV}$. Calculer le nombre moyen de collisions nécessaires pour thermaliser les neutrons lorsque le modérateur est constitué par les protons de l'eau.

IV.4 Courant de ralentissement.

On considère la population des neutrons d'énergies comprises entre E et $E+dE$. Après une collision, cette population se retrouve en moyenne dans l'intervalle d'énergie $[E', E'+dE']$ donné par le résultat du IV.2.3. On suppose que les neutrons sont uniquement diffusés au cours du ralentissement, (pas d'absorption) et on note $\Sigma_s(E)$ la section efficace macroscopique de diffusion des neutrons sur le modérateur (voir parties III.1 et III.2).

IV.4.1 Montrer que l'on a la relation $\frac{dE}{E} = \frac{dE'}{E'}$.

IV.4.2 La densité énergétique de flux neutronique est notée $\phi_e(E)$, c'est-à-dire que $\phi_e(E)dE$ désigne le flux des neutrons d'énergie comprise dans l'intervalle $[E, E + dE]$. Quel est le taux de disparition des neutrons de l'intervalle $[E, E + dE]$?

IV.4.3 Montrer qu'en régime stationnaire, on a $\Sigma_s(E) \phi_e(E) dE = \Sigma_s(E') \phi_e(E') dE'$.

IV.4.4 a) Dédurre de ce qui précède la conservation en régime stationnaire du «courant de ralentissement» des neutrons $K = \Sigma_s(E) \phi_e(E) E$, au cours du ralentissement.

b) On suppose la section efficace de diffusion Σ_s indépendante de E . Indiquer dans ces conditions comment varie la densité neutronique énergétique $n_e(E)$ en fonction de l'énergie au cours du ralentissement.

V. Diffusion des neutrons thermiques. Taille critique.

Dans cette partie, on s'intéresse à la population des neutrons thermiques. En première approximation, on suppose que les vecteurs-vitesse de ces neutrons dans le référentiel du laboratoire ont tous une même norme constante, notée v . Cette population « monocinétique » est décrite de façon simplifiée par une équation de la diffusion, qu'on se propose d'établir.

On se restreint de plus à un modèle à une dimension, ce qui se produit par exemple lorsque le milieu est constitué de couches homogènes, très étendues dans les directions Oy et Oz .

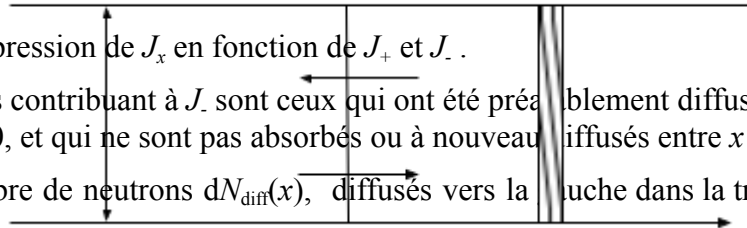
On pourra utiliser sans justification les résultats établis aux questions III.1.2.a) et III.2.3.

V.1 Loi de Fick.

Afin d'établir la loi de Fick, et obtenir une estimation du coefficient de diffusion D , on se placera dans le cas où les diffuseurs ont une masse suffisante pour pouvoir négliger leur recul. A la suite d'une diffusion, la moitié des neutrons diffusés est donc émise avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_1 = v \vec{e}_x$, l'autre moitié avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_2 = -v \vec{e}_x$. En outre,

les processus de diffusion élastique seront supposés très dominants ($\Sigma_s \gg \Sigma_a$). Enfin, on supposera dans cette question V.1 le régime stationnaire.

Pour établir la loi de Fick, on calcule le courant J_x des neutrons dans la direction x en $x = 0$. Le courant J_x se décompose en deux parties : J_+ dû aux neutrons provenant de la région $x < 0$, et J_- dû aux neutrons provenant de la région $x > 0$ (Cf. figure 4).



V.1.1 Donner l'expression de J_x en fonction de J_+ et J_- .

V.1.2 Les neutrons contribuant à J_- sont ceux qui ont été préalablement diffusés vers la gauche dans la partie $x > 0$, et qui ne sont pas absorbés ou à nouveau diffusés entre x et 0 .

a) Donner le nombre de neutrons $dN_{\text{diff}}(x)$, diffusés vers la gauche dans la tranche $[x, x + dx]$ ($x > 0$) de section S , pendant le temps dt , en fonction du flux neutronique $\phi(x)$ et de la section macroscopique de diffusion Σ_s .

b) En régime stationnaire, exprimer le nombre $dN_{\text{reçus}}$ de neutrons arrivant effectivement pendant dt en $x = 0$, en provenance de la tranche $[x, x + dx]$, en fonction de $dN_{\text{diff}}(x)$ et de la section efficace totale Σ_t .

$$J_- = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Sigma_s \phi(x) e^{-\Sigma_t x} dx$$

c) En déduire l'expression suivante du courant

d) Etablir une expression analogue pour le courant J_+ .

V.1.3 On suppose que le flux neutronique varie lentement sur la distance $1 / \Sigma_t$. On peut donc utiliser un développement limité de $\phi(x)$ au voisinage de $x = 0$.

a) Montrer que dans ces conditions, le courant J_- s'exprime comme

$$J_- = \frac{\Sigma_s}{2\Sigma_t} \left(\phi(0) + \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$$

b) Etablir l'équation analogue pour J_+ .

c) En déduire la loi de Fick reliant le flux et le courant neutronique, ainsi que la valeur du coefficient de diffusion D .

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_t^2}$$

d) Dans les situations réelles et dans la suite du problème, on utilisera la valeur Justifier sans détails les modifications par rapport au résultat établi au c).

e) Comment s'écrit la loi de Fick dans l'espace à trois dimensions ?

Pour la suite du problème, et dans le cadre de cette étude, on admettra que la loi de Fick ainsi établie reste valable en régime non stationnaire.

V.2 Equation bilan des neutrons.

On considère la population de neutrons monocinétique, décrite dans ce modèle à une dimension par le flux neutronique $\phi(x, t) = n(x, t) v$. Ces neutrons peuvent :

- être transportés, avec le courant $J(x, t)$ (Cf. étude du V.1) ,
- être absorbés, avec la section efficace macroscopique d'absorption Σ_a ,
- être créés par des réactions de fission, avec un nombre de créations par seconde et par unité de volume, ou taux de création, encore appelé *terme de source* :

$$R(x, t) = \frac{d^2 N_{\text{créés}}}{dV dt}$$

V.2.1 On considère une tranche de matériau de section S et d'épaisseur dx . Exprimer la variation du nombre de neutrons dN/dt contenus dans ce volume par seconde, en fonction de ϕ , v , S et dx .

V.2.2 Exprimer le nombre de neutrons dN_1/dt entrant ou sortant algébriquement par seconde dans ce volume, en fonction de J , S et dx .

V.2.3 Exprimer le nombre de neutrons dN_2/dt disparaissant par seconde de ce volume par absorption, en fonction de ϕ , Σ_a , S et dx .

V.2.4 En déduire que l'équation bilan décrivant l'évolution de la population neutronique s'écrit

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} - \Sigma_a \phi(x, t) + R(x, t)$$

V.3 Equation d'un milieu multiplicateur simple.

Afin d'obtenir une expression simple du terme de source, on ne tient pas compte de l'étape de ralentissement des neutrons, et on suppose que toute fission crée « instantanément » v neutrons thermiques. On note Σ_f la section efficace de fission du matériau multiplicateur, et on définit l'aire de diffusion par $M^2 = D/\Sigma_a$.

V.3.1 Le facteur de multiplication en milieu infini k_∞ (déjà rencontré à la question II), est défini ici de façon plus précise comme le rapport entre le nombre de neutrons créés par fissions et le nombre de neutrons absorbés. Montrer que ce facteur vaut

$$k_\infty = \frac{v \Sigma_f}{\Sigma_a}$$

V.3.2 Exprimer le terme de source $R(x,t)$ en fonction de φ , Σ_f et ν .

V.3.3 En supposant la loi de Fick établie au V.1 valide, montrer que l'équation bilan décrivant l'évolution des neutrons d'un tel milieu s'écrit

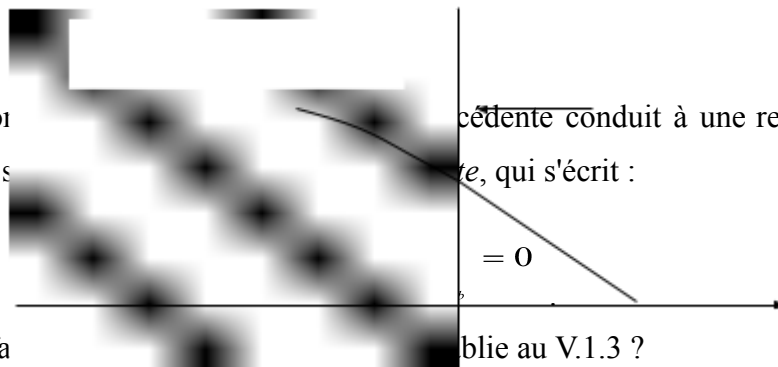
$$\frac{1}{\Sigma_a \nu} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = M^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + (k_\infty - 1) \phi(x, t)$$

V.4 Conditions au bord.

A l'interface entre le matériau multiplicateur et le vide, le courant de neutrons se dirigeant vers l'intérieur du matériau doit être nul. Dans la géométrie de la figure 5, cela s'exprime par la condition suivante :

$$J(x_b) = 0$$

V.4.1 On peut montrer que la condition précédente conduit à une relation entre les valeurs de φ et de J à l'interface, qui s'écrit :



Peut-on relier de façon simple au V.1.3 ?

V.4.2 Cette condition est difficile à utiliser, et on la remplace en pratique par une *condition de bord extrapolé* : pour $x > x_b$, on modélise le flux par une fonction affine de x . La condition du V.4.1 est alors équivalente à dire que le flux s'annule au point $x_b + d_e$, dit « bord extrapolé » :

$$\varphi(x_b + d_e) = 0.$$

a) Exprimer la valeur de d_e en fonction de Σ_t .

b) En utilisant pour Σ_t la valeur numérique de Σ obtenue à la question III.2.1, montrer que l'on peut confondre le bord extrapolé avec le bord réel du matériau (on supposera que l'épaisseur du milieu multiplicateur est de l'ordre du mètre).

Dans ce cas, on peut écrire simplement la condition au bord comme :

$$\varphi(x_b) = 0,$$

forme que l'on utilisera dans la suite de cette partie.

V.5 Taille critique.

On souhaite obtenir une répartition *stationnaire* de neutrons dans un milieu multiplicateur unidimensionnel d'épaisseur L .

V.5.1 Montrer que la solution de l'équation de la diffusion stationnaire établie en V.3.3 s'écrit

$$\varphi(x) = F \sin(\mu x) + G \cos(\mu x)$$

où F et G sont des constantes. Quelle condition doit vérifier la constante μ ?

V.5.2 Cette solution doit de plus satisfaire les conditions aux bords du type de celle établie à la question V.4.2.b, en $x=0$ et $x=L$.

a) Quelle valeur prend la constante G ?

b) Montrer que la constante μ ne peut prendre que des valeurs discrètes μ_n , dont on précisera les valeurs.

c) Le flux neutronique est par définition une quantité positive. Quelle valeur unique doit prendre la constante μ ?

V.5.3 a) Dédire de ce qui précède l'existence d'une épaisseur critique de matériau L_c , permettant l'existence d'une distribution stationnaire de neutrons. Exprimer la valeur de L_c en fonction de M et de k_∞ .

b) A.N. $k_\infty - 1 = 1 \times 10^{-2}$, $M = 1$ cm. Calculer l'épaisseur critique du matériau.

V.5.4. On donne la valeur maximale du flux de neutrons thermiques $\varphi_0 = 3 \times 10^{16} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Par ailleurs, chaque réaction de fission dégage en moyenne une énergie de fission récupérable E_f .

a) Tracer la forme du flux $\varphi(x)$ dans l'intervalle $0 < x < L$.

b) Montrer que la puissance produite par unité de volume de matériau peut s'écrire :

$$P(x) = \varphi(x) \Sigma_f E_f$$

c) En déduire l'expression de la puissance totale P_t produite par une telle tranche de matériau par unité de surface, en régime critique.

d) A.N. On donne $E_f = 180$ MeV, $\Sigma_f = 40 \text{ m}^{-1}$, calculer P_t .

V.6. Régime non stationnaire.

Lorsque $L \neq L_c$, il n'est plus possible d'établir un régime stationnaire. Dans ce cas, la résolution de l'équation de la diffusion s'effectue comme celle de l'équation de Schrödinger non stationnaire : on recherche la solution de l'équation avec les conditions au bord du V.5.2 sous la forme suivante :

$$\phi(x, t) = \sum_n A_n \sin(\mu_n x) f_n(t)$$

où les valeurs de μ_n sont celles déterminées en V.5.2.b.

V.6.1 On note $\omega_0 = (k_\infty - 1) v \Sigma_a$. Quelle est l'unité de ω_0 ?

V.6.2 Etablir les équations que doivent satisfaire les fonctions $f_n(t)$.

V.6.3 Montrer que les $f_n(t)$ sont de la forme $f_n(t) = \exp(\omega_n t)$. Exprimer les valeurs des constantes ω_n en fonction de ω_0 , L , L_c et n .

V.6.4 En déduire que pour $L < L_c$, le flux à l'intérieur du matériau décroît forcément au cours du temps, alors que pour $L > L_c$, il croît.

V.6.5 Indiquer, dans le cas $L > L_c$, le comportement temporel du flux pour de grandes valeurs de t (on supposera A_1 non nul). Peut-on rapprocher ces résultats de ceux obtenus à la partie II ?

VI. Génération du courant. Machine synchrone.

A l'issue de la chaîne de production de l'énergie d'une centrale nucléaire se trouve un *turboalternateur* : une turbine tournant à grande vitesse (3000 tours/minute) entraîne un *rotor* constitué d'un électroaimant bipolaire dont le flux magnétique est canalisé vers trois enroulements statoriques fixes dans le référentiel du laboratoire, orientés à 120° l'un de l'autre (voir figure 6). La variation de flux dans chaque enroulement statorique induit une force électromotrice de pulsation égale à la vitesse angulaire de rotation du rotor.

Dans toute la partie VI, on supposera le régime sinusoïdal permanent atteint, et la vitesse de rotation du rotor, constante, sera notée Ω .

VI.1 Champ magnétique créé par le rotor (champ excitateur).

On modélise le rotor par un solénoïde infini, c'est-à-dire de rayon a très inférieur à sa longueur L : $a/L \ll 1$. Celui-ci comporte n_r spires par unité de longueur, et est parcouru par un courant constant I_r . Il est rempli d'un noyau constitué d'un matériau magnétique linéaire de perméabilité relative μ_r . On se place dans cette question dans le référentiel tournant du rotor, dans lequel le champ magnétique créé par le rotor est indépendant du temps. On notera OX l'axe de symétrie du solénoïde, orienté de façon cohérente avec l'orientation des spires, et r la distance à l'axe OX .

VI.1.1 En justifiant soigneusement les arguments utilisés, montrer que ce champ magnétique est de la forme $\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_x$, où $\vec{e}_x$ désigne le vecteur unitaire colinéaire à OX .

VI.1.2 En déduire l'expression de $B(r)$ en tout point de l'espace. On admettra que $B(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Dans la suite de la partie VI, ce champ exciteur, canalisé par les pièces polaires de la machine, sera supposé uniforme et permanent dans le référentiel du rotor, et sa valeur $\vec{B}_0$ sera prise égale à sa valeur sur l'axe OX : $\vec{B}_0 = B(r=0)\vec{e}_x$.

VI.2 Tensions statoriques induites à vide.

Chaque enroulement statorique est constitué de N_s boucles de conducteur, de surface S . Les enroulements (2) et (3) sont identiques à l'enroulement (1). On notera $0xyz$ le système d'axes orthogonal direct lié au référentiel du laboratoire, tel que le vecteur unitaire normal orienté de l'enroulement (1) soit égal à $\vec{e}_y$. Les axes des trois enroulements sont dans le plan xOy de la figure 6, et sont orientés à 120° l'un de l'autre.

A l'instant $t = 0$, le champ exciteur est dirigé suivant l'axe $0x$; $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_x$ sont alors confondus. Par la suite, le vecteur $\vec{e}_x$ reste constamment dans le plan de figure xOy , et tourne à la vitesse angulaire Ω dans le sens trigonométrique (voir figure 6).

VI.2.1 a) Donner la valeur de la tension induite à l'axe $0x$ fixe dans le référentiel du laboratoire.

b) Exprimer les flux du champ exciteur en fonction de t .

VI.2.2 a) Rappeler la loi de Faraday.

b) En déduire les tensions aux bornes des enroulements statoriques, e_1 , e_2 et e_3 , appelées *tensions simples à vide*.

c) Dans la notation complexe, ces tensions s'écrivent

à l'instant t le champ exciteur avec l'axe Oy .

les enroulements (1) (2) et (3)

$$\underline{e}_1 = E_0 \exp(j(\Omega t + \psi_1)), \quad \underline{e}_2 = E_0 \exp(j(\Omega t + \psi_2)), \quad \underline{e}_3 = E_0 \exp(j(\Omega t + \psi_3))$$

Donner les expressions de l'amplitude E_0 et des phases ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 . Tracer les trois tensions e_1 , e_2 et e_3 dans le plan complexe à $t=0$ (diagramme de Fresnel).

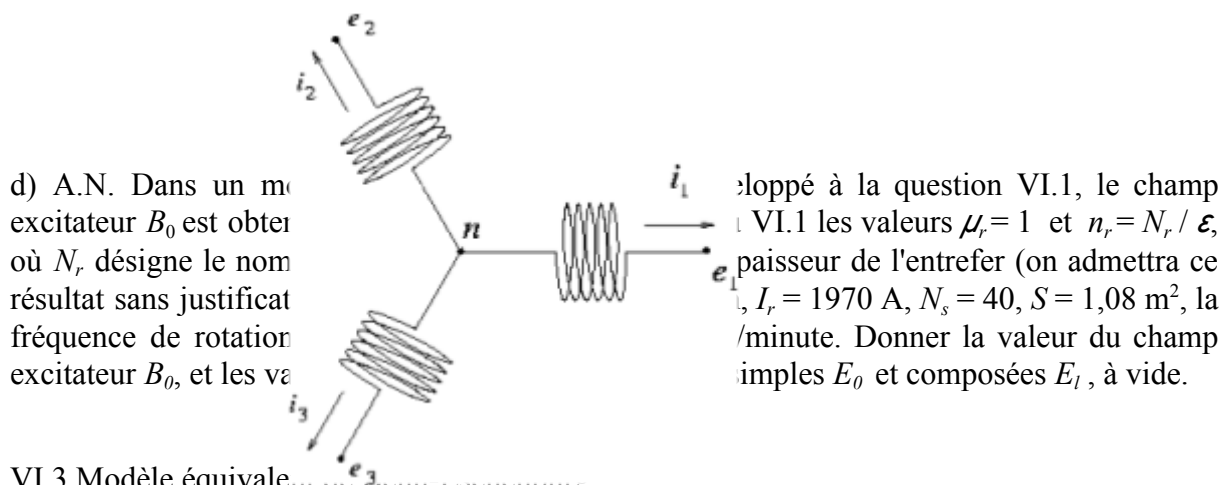
VI.2.3 Les trois enroulements sont connectés *en étoile* à un point neutre commun noté n , pris comme référence des potentiels (cf. figure 7).

De plus dans cette question VI.2.3, la machine fonctionne à vide, c'est-à-dire qu'elle ne débite aucun courant : on a donc $e_{1n} = e_1$, $e_{2n} = e_2$ et $e_{3n} = e_3$, et $i_1 = i_2 = i_3 = 0$.

a) Exprimer les tensions entre les trois bornes libres de (1) (2) et (3) , e_{12} , e_{23} et e_{31} , dites *tensions composées*, en fonction de e_1 , e_2 et e_3 .

b) Tracer les représentations de ces tensions, $\underline{e_{12}}$, $\underline{e_{23}}$ et $\underline{e_{31}}$ dans le diagramme de Fresnel.

c) On donne $1 - e^{-2j\pi/3} = \sqrt{3} e^{j\pi/6}$. Montrer que l'amplitude des tensions composées vaut $E_l = \sqrt{3}E_0$, et donner le déphasage de la tension composée e_{12} par rapport à la tension simple e_1 . Retrouver ces deux résultats grâce à la représentation de Fresnel.



VI.3 Modèle équivalent d'une machine synchrone

La machine synchrone reliée en étoile est maintenant supposée débiter des courants i_1 , i_2 et i_3 orientés avec la convention générateur (voir figure 7).

Dans toute cette question VI.3, on admettra que le point neutre se comporte comme un nœud isolé de la terre.

En plus du flux Φ_1^r induit par le rotor, l'enroulement statorique (1) est soumis à son flux propre Φ_1^1 , et aux flux $\Phi_1^2 = M_s i_2$ et $\Phi_1^3 = M_s i_3$ créés par les enroulements (2) et (3), où M_s est le coefficient d'inductance mutuelle entre deux enroulements statoriques. On notera L_s l'inductance propre de chaque enroulement statorique, et la quantité positive $\mathcal{A}_s = (L_s - M_s)$ sera appelée *inductance cyclique* de l'enroulement. Enfin la résistance équivalente des conducteurs de chaque enroulement sera notée R_s .

VI.3.1 a) Exprimer le flux total Φ_1^t à travers l'enroulement (1).

b) Quelle relation relie les courants i_1 , i_2 et i_3 ? En déduire l'expression de Φ_1^t en fonction de Φ_1^r , $\mathcal{A}_s$ et du courant i_1 .

VI.3.2 a) Donner l'expression de la tension u_1 à la sortie de l'enroulement statorique (1) en fonction de la tension simple à vide e_1 , de i_1 , de $\mathcal{A}_s$ et R_s .

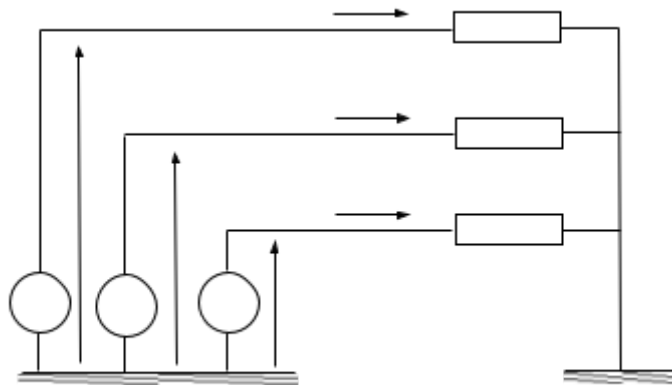
- b) Que vaut l'impédance interne complexe $\underline{Z}_s$ de l'enroulement ? Tracer le schéma électrique équivalent de ce dernier. Que peut on dire pour les enroulements (2) et (3) ?
- c) Tracer le diagramme de Fresnel permettant de relier les représentations complexes de e_1 , u_1 et i_1 (il est conseillé de prendre le courant i_1 comme origine des phases).

VI.4 Etude du régime nominal.

En régime de fonctionnement permanent en charge, dit *régime nominal*, les enroulements (1) (2) et (3) sont reliés à trois charges inductives identiques, d'impédances complexes $\underline{Z}_c = R_c + j L_c \Omega$. L'ensemble formé d'un enroulement et de sa charge constitue *une ligne* (cf. figure 8). Les trois lignes ont donc un fonctionnement symétrique (on dit que les lignes sont équilibrées). On admet que, dans ces conditions, la relation entre les courants établie au VI.3.1.b) reste valide.

VI.4.1 a) Tracer le schéma électrique équivalent de la ligne (1).

- b) Quelle est la relation entre les représentations complexes du courant $\underline{i}_1$ et de la tension $\underline{u}_1$?
- c) En déduire la relation entre les amplitudes U_{1n} et I_{1n} de u_1 et de i_1 en régime nominal, ainsi que la valeur du déphasage ϕ_c de u_1 par rapport à i_1 . Que peut-on dire pour les lignes (2) et (3) ?



d) A.N. $U_{In} = 19,6 \text{ kV}$, $R_c = 0,52 \Omega$, $L_c = 0,8 \text{ mH}$, $f = 3000 \text{ tours/minute}$. Donner les valeurs de I_{In} et de ϕ_c .

VI.4.2 a) Donner la relation entre l'amplitude de la tension simple à vide nominale E_{0n} et I_{In} , puis la relation entre E_{0n} et U_{In} .

b) On souhaite pouvoir faire varier l'impédance complexe $\underline{Z}_c$ de la charge en maintenant constamment l'amplitude de la tension nominale à la valeur $U_{In} = 19,6 \text{ kV}$. Qu'en déduit-on pour l'amplitude de la tension simple à vide nominale E_{0n} ? Quel paramètre physique peut-on faire varier pour réaliser un tel ajustement?

c) A.N. $R_s = 10^{-3} \Omega$, $\mathcal{A}_s = 4,7 \text{ mH}$, les autres valeurs étant celles définies aux VI.2.3.d) et VI.4.1.d) ci-dessus. Calculer la valeur de E_{0n} , puis la valeur du champ excitateur nominal B_{0n} , ainsi que la valeur du courant rotorique nominal I_{rn} .

VI.4.3 a) Exprimer la puissance instantanée $P_n(t)$ débitée en régime nominal par l'ensemble de la machine synchrone à un instant t . Montrer que cette puissance est indépendante de t , et donner sa valeur en fonction des amplitudes nominales I_{In} et U_{In} du courant et de la tension, et de la valeur du déphasage ϕ_c .

b) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule P_J dans l'ensemble des bobinages statoriques, ainsi que l'énergie moyenne E_M stockée sous forme magnétique dans ces bobinages en fonction de I_{In} , $\mathcal{A}_s$ et R_s .

c) A.N. Pour les valeurs définies aux questions VI.2.3.d), VI.4.1 d) et VI.4.2 c), donner les valeurs de la puissance nominale P_n de ce turboalternateur, de la puissance dissipée P_J , et enfin de l'énergie magnétique E_M .