

La balance du watt.

Partie I

I.1 Aspects géométriques

I.1.1.

- Volume du cylindre de révolution : $V = \pi R^2 H$;
- Surface du cylindre de révolution :

$$S_{\text{ext}} = 2\pi R H + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = S_{\text{ext}}$$

- $\frac{\partial S_{\text{ext}}}{\partial R} = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R$ s'annule pour $V = 2\pi R^3$;

donc : $H = 2R$; la hauteur du cylindre est égale à son diamètre.

La surface extérieure est alors : $S_{\text{ext}} = \frac{3\pi H^2}{2} = 6\pi R^2$;

Le volume est alors : $V = \frac{\pi H^3}{4} = 2\pi R^3$.

I.1.2. $\frac{H}{2} = R = \sqrt[3]{\frac{\text{masse}}{2\pi\rho}}$ donne :

- Pt-Ir : $R \approx 19,5 \text{ mm} \Rightarrow H = 2R \approx 39 \text{ mm} \approx H$;

$$V \approx 46,5 \text{ cm}^3 \text{ et } S \approx 71,6 \text{ cm}^2 .$$

- Inox : $R \approx 27,3 \text{ mm} \Rightarrow H = 2R \approx 54,5 \text{ mm} \approx H$;

$$V \approx 127 \text{ cm}^3 \text{ et } S \approx 140 \text{ cm}^2 .$$

I.1.3. Pifométriquement. Le tronc de cylindre de révolution optimal a une hauteur égale à son diamètre ; c'est une forme dont les trois dimensions sont égales. On peut penser extrapoler ce cas « discret » (lié à une direction particulière : l'axe du cylindre) à une forme ayant les mêmes hauteur, largeur et profondeur dans toutes les directions. On obtient une sphère ; résultat bien connu, mais difficile à démontrer.

I.2 Influence de l'air

I.2.1.

- La poussée d'Archimède vaut : $F_{\text{Arch}} = \rho_{\text{air}} g V$;
- La variation relative de masse apparente est : ρ_{air} / ρ .

I.2.2.

- A.N. : Cela fait $6,0 \cdot 10^{-5}$ pour le platine iridié et $1,7 \cdot 10^{-4}$ pour l'inox ;

$$\delta m_a = (1) \left(\frac{\rho_a}{\rho_{\text{Pt}}} - \frac{\rho_a}{\rho_{\text{Inox}}} \right) \approx -0,105 \text{ g} \approx \delta m_a$$

- L'erreur commise sur la masse est

I.2.3. Ce qui est 10^5 fois la précision de $1 \mu\text{g}$ à laquelle peuvent se faire les comparaisons de masse !

La précision de $1 \mu\text{g}$ sur des étalons de matériau différent implique cette correction, et donc la connaissance de la masse volumique de l'air à 10^{-5} près ! Il est pratiquement obligatoire, pour des comparaisons de masse aussi précises, d'utiliser le même matériau pour tous les étalons.

I.3 Adsorption à la surface des étalons

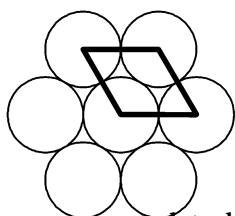
I.3.1. Force $-\frac{dW_p}{dz} = -3 \frac{K_p}{z^4}$ attractive d'origine électrostatique comme les forces de van der Waals.

I.3.2. Le liquide apparaît à la cote $z = d_{\text{liq}}$ pour laquelle $p(z) = p_s(T)$:

$$p_s(T) = p_\infty \exp \frac{K_p}{k_B T d_{\text{liq}}^3}, \text{ ce qui donne bien } d_{\text{liq}} = \sqrt[3]{\frac{K_p}{k_B T \ln \frac{p_s(T)}{p_\infty}}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

I.3.3.

a) On
b) Ce
pavage
au sol



obtient pour l'eau : $d_{\text{liq}} \approx 174 \text{ pm}$;
qui correspond à une seule couche moléculaire. Pour un hexagonal par des atomes sphériques de rayon a , la surface occupée par un atome est celle $2a\sqrt{3}$ du losange ci-contre.

$$\delta m_p = \frac{S_{\text{ext}}}{2a\sqrt{3}} \frac{M}{N_A}$$

La masse adsorbée est alors

avec N_A ; $6,0210^{23}$ nombre d'Avogadro et M ; 18 g masse molaire de l'eau.

c) On obtient δm_p ; 3 μg .

I.4 Effet du champ de pesanteur

I.4.1.

- Les centres de masse sont à $H/2$ au-dessus du plateau,
- d'où $\delta h = \frac{H_{\text{Inox}} - H_{\text{Pt}}}{2}$; 7,8 mm ; δh .

I.4.2.

- g varie en $(R_T + z)^{-2}$,
- d'où $\frac{\delta g}{g} = -\frac{2\delta h}{R_T}$; $-2,410^{-9}$; $\frac{\delta g}{g}$.

I.4.3.

- $\delta m_g = \frac{(1 \text{ kg})\delta g}{g}$; $-2,4 \mu\text{g}$; δm_g .
- Cette très faible variation d'altitude ne peut être négligée pour des mesures au μg près.

Mais il faut déjà prendre des étalons de même matériau (condition beaucoup plus importante, Cf §I.2.) ; s'ils ont la même forme, il n'y aura pas de différence d'altitude des centres d'inertie.

I.5 Principe d'une comparaison de haute précision

I.5.1.

- Calcul classique à partir de Biot & Savart du champ d'une spire circulaire sur son axe :

$$\vec{B}_A(z) = \tilde{\mathbf{N}}_{c_A} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_A d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 n_A I_A}{2R_A} \vec{u}_z \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 n_A I_A R_A^2}{2} (R_A^2 + z^2)^{-3/2} \vec{u}_z = \vec{B}_A(z)$$

- Puis : $\frac{\partial B_{Az}}{\partial z} = -\frac{3}{2} \mu_0 n_A I_A R_A^2 z (R_A^2 + z^2)^{-5/2}$

I.5.2. Énergie d'interaction : $W_m = -M B_{Az}$, donc force : $F_z = -\frac{dW_z}{dz} = \frac{M}{dz} \frac{dB_{Az}}{dz}$.

Ce qui donne bien :
$$F_z(z_0, I_A) = \frac{\partial B_{Az}}{\partial z} = -\frac{3}{2} \mu_0 n_A I_A R_A^2 M \frac{z_0}{(R_A^2 + z^2)^{5/2}}$$
 C.Q.F.D.

I.5.3. Les changements de signe de M et z_0 se compensent : les 2 aimants sont soumis à la même force.

I.5.4. $F_z(u) = F_z(z_0 + u, I_A) + F_z(z_0 - u, I_A)$ fonction paire de u , donc extrémale en $u = 0$.

I.5.5. Pour un équilibre de la balance en position horizontale, il faut annuler la somme (algébrique) des moments du poids de l'étalon m , de celui de la tare M_T et de celui de la force magnétique $F_z(u)$. Ce dernier terme étant proportionnel à I_A , on pourra faire l'équilibre en jouant sur I_A .

Partie II

II.1 Phase statique

II.1.1. Force de Laplace résultante : $\vec{F} = \oint_C I_w d\vec{l} \wedge (-B\vec{e}_r) = I_w B l \vec{u}_z \Rightarrow F_z = I_w B l$

II.1.2. Équilibre pour $F_z = I_w B l = mg$

II.2 Phase dynamique

II.2.1. f.é.m. d'induction : $E_w = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C (v_z \vec{e}_z \wedge (-B\vec{e}_r)) \cdot d\vec{l} = -IBv_z = E_w$

II.2.2.

- On déduit bien de II.1.2. et II.2.1. : $mgv_z + E_w I_w = 0$.
- Les mesures électriques de I_w et E_w permettent d'obtenir la puissance mécanique mgv_z : on a « pesé » des watts.

II.3 Dispositif expérimental

II.3.1. La longueur totale des spires est : $l = 600\pi \times 0,260 ; 490 \text{ m}$.

II.3.2.

- Pour un déplacement dx de la bobine de rayon R , la surface (en noir ci-contre) balayée est : $\delta S = dx \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} R \cos\theta d\theta = 2R dx$.

Équilibre pour EM
et EMBED Math

La variation de flux correspondante est, dans le pire des cas : $2\delta S |B_z|_{\max}$, et la f.é.m. induite parasite est au plus : $|\Delta E_w|_{\max} = 4|B_z|_{\max} R v_x$.

Alors : $\left| \frac{\Delta}{E_w} \right| \leq \frac{4|B_z|_{\max} R v_x}{I B v_z}$ majoré par 10^{-8} si : $\boxed{\left| \frac{v_w}{v_z} \right| \leq \frac{I B}{4 R |B_z|_{\max}} 10^{-8}} \Rightarrow \boxed{\left| \frac{v_w}{v_z} \right| \leq 0,094}$

II.3.3.

- Soient M_B la masse la bobine et de ses suspensions, M_T celle de la tare.

L'ajustement de la masse de la tare est réalisée pour obtenir : $M_B g P'O ; M_T OQ'$. Le signe ; au lieu de = traduit un ajustement éventuellement approximatif.

1^{er} équilibre pour : $(-I_1/B + M_B g) P'O ; (M_T + m') g OQ' \Rightarrow -I_1/B P'O ; m' g OQ'$.

2^{ème} équilibre pour : $(-I_2/B + M_B g + mg) P'O ; (M_T + m') g OQ' \Rightarrow (-I_2/B + mg) P'O ; m' g OQ'$.

Avec $P'O ; OQ'$ et $m' ; m/2$, on obtient $I_2 ; -I_1 ; \frac{m}{2B}$; I_1 et I_2 sont bien de signes opposés.

La différence entre les deux équilibres donne rigoureusement $(I_2 - I_1)B = mg$ et II.2.2. devient $\boxed{mg v_z + E_w (I_2 - I_1) = 0}$.

- L'intérêt est de s'affranchir d'un ajustement imparfait de la tare.

II.4 Généralisation à une bobine rigide, de forme géométrique quelconque

II.4.1.

- $\boxed{\vec{F} = \oint_C I_w d\vec{l} \wedge \vec{B}}$ et
- $F_z = \oint_C I_w (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = \boxed{I_w \oint_C (d\vec{l} \cdot \vec{B}, \vec{e}_z) = F_z}$

II.4.2. $E_w = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \boxed{-v_z \oint_C (d\vec{l} \cdot \vec{B}) = E_w}$

II.4.3. Avec $F_z = mg$ dans la phase statique, l'élimination de l'intégrale curviligne entre §II.4.1. et §II.4.2. donne : $mgv_z = -E_w l_w$, relation II.2.2. inchangée. C.Q.F.D.

II.4.4.

- Une composante horizontale de la vitesse v_a , s'il y a une composante B_z non uniforme, entraîner une f.é.m. parasite (Cf §II.3.2.).
- Une composante horizontale non nulle de $\vec{F}$ (qui peut être due à une composante B_z non uniforme) va entraîner un déplacement horizontal, et par suite une f.é.m. parasite.

Partie III

1.1.

- Soit d le quatrième sommet du quadrilatère ; on a :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{ac}{ad} = \frac{ac}{L} \theta \Rightarrow \boxed{ac(\theta) = \frac{L \tan \frac{\theta}{2}}{\theta}}$$

- Pour $\theta = 0 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$, on a :

$$ac(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3}{6} + o(\varepsilon^3) \right) \Rightarrow \boxed{\frac{L}{2} + \frac{L\varepsilon^2}{48} + \frac{L o(\varepsilon^3)}{\varepsilon} = ac(\varepsilon)}$$

1.2.

- On a : $ca(\varepsilon) \stackrel{\text{Symétrie de la Figure 7}}{=} cb(\varepsilon) \stackrel{[III.2.]}{\approx} \frac{ab}{2} \stackrel{\text{Poutre plate}}{\approx} ca(0) \approx cb(0)$; donc la longueur après flexion de la poutre ab tend – lorsque flexion est faible – à être la même que sa longueur avant flexion.

$\boxed{ca = cb \approx C^{\text{ste}}}$; donc les segments ca et cb ont tournés, autour de c , d'un angle θ .

D'après $ac(\theta) - ac(\varepsilon) = \frac{L\varepsilon^2}{48} + \frac{L o(\varepsilon^3)}{\varepsilon}$;

A.N. : $\boxed{ac(\theta) - ac(\varepsilon) \approx 28 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}$.

La pertinence du modèle est difficilement discutable, en effet :

- a) L'écart entre les deux longueurs semble « faible » (28 micromètres : grossièrement chaque bras – 140 mm et 210 mm – s'allonge de 2 fois 28 micromètres, soit d'environ $\frac{50 \cdot 10^{-3}}{200} \approx \frac{25}{100\,000}$) ; mais :
- b) La déformée d'une poutre est-elle un cercle (hypothèse implicite de la Figure 7 : $ab = L$ et $ad = L/\theta$) ?
- c) Que devient cette déformée pour les grandes déformations évoquées ici ?
- d) Est-on capable d'usiner 18 lames déformables de manière « identiques » de façon à ce que l'écart déterminé ici soit fiable ?
- e) Quel est l'impact de ce déplacement du centre des 18 pivots disposés suivant la géométrie particulière du banc d'essais – qui respecte une très grande symétrie pouvant potentiellement compenser mutuellement ces « défauts » – sur la précision souhaitée du montage évoquée dans les questions précédentes :
- i) « La bobine est alors animée d'un mouvement vertical d'ensemble ... » ?
 - ii) « Le cahier des charges exige de réaliser un guidage en translation avec une précision de l'ordre du micromètre, sur une course de 80 mm ... »
- f) Quelle est l'incidence de répétabilité de la mesure (a priori, la détermination de la masse étalon équivalente devrait se faire par une succession d'essais) sur la géométrie générale ?

1.3.

Schéma 1

- Pifométriquement, les seuls mouvements que peut avoir le segment CD par rapport au repère $(A; \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$ sont une rotation autour de $(A; \vec{Z}_0)$ et une translation dans le plan $Z_0 = 0$. Donc la liaison équivalente entre (3) et (9) est une **plane** de plan $Z_0 = C^{\text{ste}}$.

1.4.

- Une liaison équivalente formée de liaisons en série est (culturel) **isostatique**.
- Commentaire :
 - a) Le calcul est inutile pour le taupin « savant » ;
 - b) La métrologie a souvent recourt à des mécanismes isostatiques, afin de mieux maîtriser la géométrie, les mouvements, les calculs d'erreurs (aspect probablement méconnu du taupin « emmepien » !) ;
 - c) Cependant, un mécanisme isostatique est souvent sensible (par manque de rigidité) aux excitations et la mesure risque d'être perturbée (se pose, alors, le problème de l'isolation du système !) ;
 - d) La plane équivalente est sensible aux efforts qui lui sont appliqués : la coplanéité des segments AB , BC et CD ne sera pas forcément conservée en fonction de l'intensité des efforts qui sont appliqués à l'ensemble $\{1,2,3\}$;

1.5. Pifométriquement, trois planes en parallèles suivant des plans qui contiennent la droite $(D; \vec{Z})$ forment une **glissière** d'axe $\vec{Z}$ (c'est d'ailleurs dit dans les prémices de l'énoncé !).

1.6.

Schéma 2

- Globalement :

$$a) \quad m_{th} = E_s - I_s = 6(s-1) - \sum_i i_s = 6(2-1) - 3 \times \overset{\text{Plane}}{3} = -3$$

$$b) \quad m_c = m_u + m_p = \overset{\text{mouvement de la glissière}}{1} + 0 = 1$$

$$c) \quad h = m_c - m_{th} = \boxed{4 = h}$$

- On peut supposer, pour simplifier, que les trois ensembles de bras soient identiques ; i.e. que : $l_i^1 = l_i^2 = l_i^3 = l_i$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Toutefois, en observant la Figure 6, on voit que les poutres flexibles sont usinées « dans la masse » ; il sera peut-être difficile d'assurer – pour les 18 pivots – une régularité d'usinage à la hauteur de la précision de mesure souhaitée (étalon international !). L'épaisseur et la longueur des poutres flexibles jouant sur la position respective des pivots dont les mouvements de rotation relatif assurent une translation globale.
 - a) Influence conjointe de $l_1 + l_2$: ce sont les longueurs qui limitent la course supérieure et du coup la course inférieure, puisqu'un système symétrique à celui qui est étudié est monté pour le guidage : $d_{\max} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} - l_1$;
 - b) Influence de $l_1 \overset{\text{Cf. question 3.12.}}{\approx} 140 \text{ mm}$: ?
 - c) Influence de $l_2 \overset{\text{Cf. question 3.12.}}{\approx} 210 \text{ mm}$: ?
 - d) Influence de l_3 : nulle, car (3) est en translation rectiligne, théoriquement (d'ailleurs donnée non fournie par la suite du problème !).

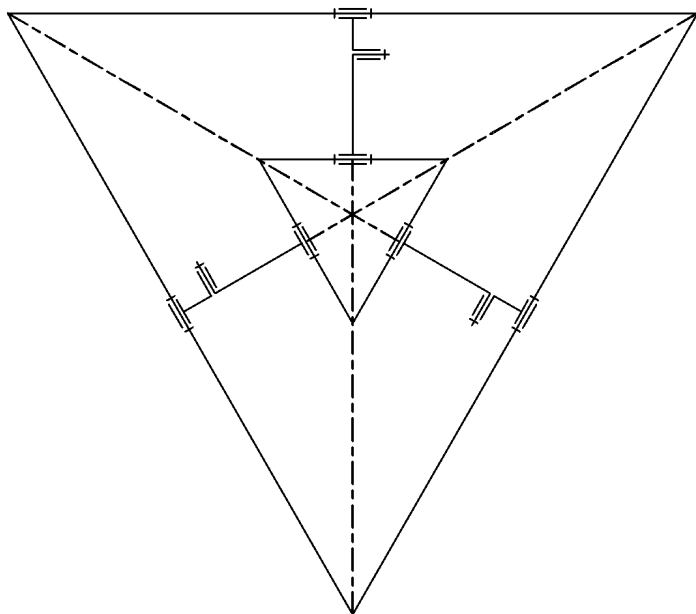
1.7. Si les trois points A sont prédéterminés tous les 120° sur un cercle de rayon OA imposé, alors dans chaque plan $(A; \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$, on a la configuration suivante :

Schéma 3

- $OA > l_1 + l_2 + l_3$; assemblage impossible des trois bras convergeant en O ;

techniquement :
rigoureusement
impossible

- $OA = l_1 + l_2 + l_3$; assemblage réalisable, mais aucun mouvement vertical n'est en théorie possible. Si on tient compte des incertitudes sur les longueurs ; on aura forcément une petite course verticale !
- $OA < l_1 + l_2 + l_3$; assemblage possible avec une course verticale du point D .
- Si on se fie à la Figure 10, la géométrie du mécanisme se situe dans le troisième cas, donc l'assemblage est possible ;
- Conditions de montage :



a) Système complexe de 14 solides à 18 pivots et une base de 6 cycles possédant un seul degré de liberté d'où un degré d'hyperstatisme de 12 ; donc douze contraintes géométrique de montage du système :

i) Une étude complète des conditions de montages par les petits mouvements virtuels semble hors de propos ici !

ii) On peut remarquer qu'il faut simplement respecter le parallélisme des pivots dans chacun des six groupes de trois bras ;

iii) ...

b) Il faut probablement compter sur l'effort de l'actionneur :

i) Il devrait être le plus faible possible, bien dirigé sur la verticale afin de ne pas contraindre le système dans une autre direction qu'une résultante verticale : la régularité (i.e. un état proche de la statique) est probablement un gage de qualité ;

ii) Il ne faut probablement pas « tordre » les lames ressort afin de ne pas se retrouver avec plusieurs positions d'équilibre dans le mouvement de « flexion » qu'on impose aux lames ;

c) ...

1.8.

Schéma 4

- La Figure 10 et le Schéma 4 nous montrent le débattement du segment DC vers le haut. Il est clair que son mouvement vers le bas n'impose pas du tout des variations angulaires symétriques des trois angles α , β et γ précédents, plus particulièrement pour l'angle β . En montant tête bêche un système analogue au premier ensemble de trois bras, D_0D va se déplacer verticalement de plus ou moins 40 mm de part et d'autre du point D_0 avec un déplacement des deux fois neuf bras de manière symétrique.

- La Figure 10 nous montre aussi que la glissière équivalente aux neuf pivots est « matérialisée » au point D du haut : D_H . La rigidité de cette glissière semble quasi nulle dans une direction orthogonale à $(D, \vec{x}_0)$ si le point d'application de l'effort est loin de D . En plaçant un second point d'encrage D en bas : D_B d'une seconde glissière, on assure un très grand bras de levier, pour résister aux efforts non verticaux appliqués au segment $D_B D_H$ et donc assurer un guidage vertical de « très grande précision » (assertion à vérifier géométriquement !).

1.9.

- Lorsque le débattement des degrés à libérer est petit et qu'une légère résistance à leur liberté est tolérable, une liaison élastique est une solution simple et élégante ;
- L'absence de « frottement sec » macroscopique limite le phénomène de « stick and slip » classique lors des phases d'arrêt d'une glissière, donc l'effort de la commande en position sera moins complexe à asservir ;
- Le phénomène d'hystérésis est probablement moins important dans cette glissière équivalente que dans une glissière à contact superficiel entre solides ; d'où une probable meilleure répétabilité des mesures ;
- L'absence de lubrification et d'usure des liaisons élastiques favorise l'utilisation du dispositif sous vide (Cf. adsorption § 1.3.) ;
- ...

1.10. L'observation du voisinage de B dans la Figure 10, montre que :

- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
 - $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
 - $\gamma = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
- $$\bullet \quad \beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_0) + (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \boxed{-\alpha + \gamma = \beta}$$

1.11. **Remarque :** les angles et la course sont algébriques ! Toutefois $\alpha \geq 0$.

$$\bullet \quad \overline{D_0 D} = \overline{C_0 C} = \overline{C_0 B_0} + \overline{B_0 A} + \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow$$

$$\overline{C_0 C} \cdot \vec{x}_0 = \cancel{\overline{y_0 x_0} \cdot \vec{x}_0} - l_1 \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 + l_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + l_2 \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_0 = \boxed{-l_1 + l_1 \cos \alpha - l_2 \sin \gamma = d'}$$

$$\bullet \quad \overline{C_0 C} \cdot \vec{y}_0 = -l_2 \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_0 + \cancel{\overline{x_0 y_0} \cdot \vec{y}_0} + l_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 + l_2 \vec{y}_2 \cdot \vec{y}_0 = -l_2 + l_1 \sin \alpha + l_2 \cos \gamma = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} l_2 \sin \gamma = -d - l_1 + l_1 \cos \alpha \\ l_2 \cos \gamma = l_2 - l_1 \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l_2^2 = d^2 + l_1^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2dl_1 - 2dl_1 \cos \alpha - 2l_1^2 \cos \alpha - 2l_1 l_2 \sin \alpha$$

$$d^2 + 2l_1(1 - \cos \alpha)d + 2l_1(l_1 - l_1 \cos \alpha - l_2 \sin \alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$d = l_1(\cos \alpha - 1) \pm \sqrt{l_1^2(1 - \cos \alpha)^2 - 2l_1(l_1 - l_1 \cos \alpha - l_2 \sin \alpha)}$$

$$d = l_1 (\cos \alpha - 1) \pm \sqrt{-l_1^2 + l_1^2 \cos^2 \alpha + 2l_1 l_2 \sin \alpha} = \boxed{l_1 (\cos \alpha - 1) \pm \sqrt{l_1 \sin \alpha (2l_2 - l_1 \sin \alpha)} = d}$$

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} l_1 \cos \alpha = +d + l_1 + l_2 \sin \gamma \\ l_1 \sin \alpha = l_2 - l_2 \cos \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow l_1^2 = d^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2dl_1 + 2dl_2 \sin \gamma + 2l_1 l_2 \sin \gamma - 2l_2^2 \cos \gamma$$

$$d^2 + 2(l_1 + l_2 \sin \gamma)d + 2l_2(l_2 + l_1 \sin \gamma - l_2 \cos \gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$d = -(l_1 + l_2 \sin \gamma) \pm \sqrt{(l_1 + l_2 \sin \gamma)^2 - 2l_2(l_2 + l_1 \sin \gamma - l_2 \cos \gamma)}$$

$$d = -(l_1 + l_2 \sin \gamma) \pm \sqrt{l_1^2 + l_2^2 \sin^2 \gamma - 2l_2^2 + 2l_2^2 \cos \gamma} = -(l_1 + l_2 \sin \gamma) \pm \sqrt{l_1^2 - l_2^2 \cos^2 \gamma - l_2^2 + 2l_2^2 \cos \gamma}$$

$$\boxed{d = -(l_1 + l_2 \sin \gamma) \pm \sqrt{l_1^2 - l_2^2 (1 - \cos \gamma)^2}}$$

1.12.

$$\bullet \quad d = l_1 (\cos \alpha - 1) \pm \sqrt{l_1 \sin \alpha (2l_2 - l_1 \sin \alpha)} \stackrel{\substack{\text{calcul} \\ \text{approximatif} \\ \text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}}{\approx} l_1 (1 - 1) \pm \sqrt{l_1 \alpha (2l_2 - l_1 \alpha)} \Rightarrow$$

$$d^2 \approx l_1 \alpha (2l_2 - l_1 \alpha) \Rightarrow l_1^2 \alpha^2 - 2l_1 l_2 \alpha + d^2 \approx 0 \Rightarrow \alpha \approx \frac{l_1 l_2 \pm \sqrt{l_1^2 l_2^2 - l_1^2 d^2}}{l_1^2}$$

$$\boxed{\alpha(d_{\max}) \stackrel{|d_{\max}|=|d_{\min}|}{\approx} \alpha(d_{\min}) \approx \frac{l_2}{l_1} - \frac{\sqrt{l_2^2 - d_{\max}^2}}{l_1} \quad \alpha \text{ est doit \u00eatre nul lorsque d l'est !}}$$

$$\alpha(d_{\max}) \approx \left[\frac{21}{14} - \frac{\sqrt{21^2 - 4^2}}{14} \right] \frac{180}{\pi} \approx \boxed{1,6^\circ \approx \alpha(d_{\max}) \approx \alpha(d_{\min})}$$

$$\bullet \quad d = -(l_1 + l_2 \sin \gamma) \pm \sqrt{l_1^2 - l_2^2 (1 - \cos \gamma)^2} \stackrel{\substack{\text{calcul} \\ \text{approximatif} \\ \text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}}{\approx} -(l_1 + l_2 \gamma) \pm \sqrt{l_1^2 - l_2^2 (1 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$d \approx -(l_1 + l_2 \gamma) \pm l_1 \approx l_2 \gamma \Rightarrow d_{\max} \approx -(l_1 + l_2 \gamma) + l_1 \approx l_2 \gamma \Rightarrow \boxed{\gamma(d) \approx \frac{d}{l_2}}$$

$$\gamma \approx \frac{\pm 4 \cdot 180}{21 \pi} \Rightarrow \boxed{\gamma(d_{\max}) \approx 11^\circ \quad \gamma(d_{\min}) \approx -11^\circ}$$

$$\bullet \quad \beta = \gamma - \alpha$$

d	α	$\beta = \gamma - \alpha$	γ
$d_{\max}$	$1,6^\circ$	9°	11°
0	0°	0°	0°
$d_{\min}$	$1,6^\circ$	-13°	-11°

1.13.

- D'après on a : $ac(\theta) - ac(\varepsilon) = \frac{L\varepsilon^2}{48} + \frac{L}{\varepsilon} o(\varepsilon^3)$; pour les trois articulations la longueur L devrait être identique, l'allongement maximal des deux demi poutres qui encadrent chaque pivot vaut donc :

	A	B	C
ΔL	0,2 micromètre	15 micromètres	12 micromètres

1.14.

$$\begin{cases} l_2 \sin \gamma = -d - l_1 + l_1 \cos \alpha \\ l_2 \cos \gamma = l_2 - l_1 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 \gamma + o(\gamma^2) = -d - l_1 + l_1 \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2) \\ \frac{l_2}{2} - l_2 \frac{\gamma^2}{2} + o(\gamma^2) = \frac{l_2}{2} - l_1 \alpha + o(\alpha^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} l_2 \gamma + o(\gamma^2) = -d - l_1 \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2) \\ -l_2 \frac{\gamma^2}{2} + o(\gamma^2) = -l_1 \alpha + o(\alpha^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_2 \gamma = -d - l_1 \frac{\alpha^2}{2} + o(\gamma^2) + o(\alpha^2) \\ \frac{l_2}{2l_1} \gamma^2 = \alpha + o(\gamma^2) + o(\alpha^2) \end{cases}$$

- $\frac{l_2}{2l_1} \gamma^2 = \alpha + o(\gamma^2) + o(\alpha^2)$ et $\frac{l_2}{2l_1}$ voisin de 1 ; donc l'angle α se comporte comme γ^2 devant γ ; **il est « négligeable » devant γ** .

$$\begin{cases} l_2 \gamma = -d - l_1 \frac{\alpha^2}{2} + o(\gamma^2) + o(\alpha^2) \\ \alpha = \frac{l_2}{2l_1} \gamma^2 + o(\gamma^2) + o(\alpha^2) \end{cases} \Rightarrow l_2 \gamma = -d - \frac{l_1}{2} \left(\frac{l_2}{2l_1} \gamma^2 \right)^2 + o(\gamma^2) + o(\alpha^2)$$

; d'où :

$$\boxed{d \approx -l_2 \gamma} + o(\gamma^2) + o(\alpha^2).$$

Pifométriquement : cette dernière relation confrontée à la Figure 10 indique :

- B confondu avec B_0 : $\alpha \ll 1$;
- $B_0 C_0 \approx BC$: $\gamma \ll 1$;
- $\tan \gamma \approx \frac{CC_0}{BB_0} \approx \frac{d}{l_2}$.

1.15. Les longueurs $l^1 \approx l^2 \approx \frac{L \tan \frac{\theta}{2}}{\theta}$ varient (Cf. Schéma 5) lors du déplacement du point D .
Il ne suffit pas de « dériver » la relation, car la géométrie au voisinage du point B ne serait pas prise en compte !

θ	A α	B $ \beta = \gamma - \alpha $	C $ \gamma $
----------	-----------------	--------------------------------------	-------------------

Soit D^* le point D « exact », on a en tenant compte de l'allongement des trois poutres, mais sans tenir compte de la variation des angles (par exemple, il est évident que l'allongement local de CC^2 va provoquer une remontée du point D^* , car les deux autres systèmes antagonistes, de trois bras, vont empêcher ce déplacement horizontal !) :

$$\overrightarrow{D_0 D^*} = \overrightarrow{D_0 A^1} + \overrightarrow{A^1 A} + \overrightarrow{A A^2} + \overrightarrow{A^2 B^1} + \overrightarrow{B^1 B} + \overrightarrow{B B^2} + \overrightarrow{B^2 C^1} + \overrightarrow{C^1 C} + \overrightarrow{C C^2} + \overrightarrow{C^2 D^*} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D_0 D^*} \cdot \vec{x}_0 = -\left(l_1 + \frac{L}{2}\right) + 0 + \frac{L^A}{2} + \left(\frac{L^A}{2} + l_1 - \frac{L}{2}\right) \cos \alpha + \left(\frac{L}{2} - \frac{L^B}{2}\right) \sin \alpha - \left(\frac{L^B}{2} + l_2 - 2\frac{L}{2} + \frac{L^C}{2}\right) \sin \gamma + 0$$

$$\overrightarrow{D_0 D^*} \cdot \vec{x}_0 = -l_1 - \frac{L}{2} + \frac{L^A}{2} + \left(\frac{L^A}{2} - \frac{L}{2}\right) \cos \alpha + l_1 \cos \alpha + \left(\frac{L}{2} - \frac{L^B}{2}\right) \sin \alpha - \left(\frac{L^B}{2} - 2\frac{L}{2} + \frac{L^C}{2}\right) \sin \gamma - l_2 \sin \gamma$$

Avec on a :

$$\Delta d = \overrightarrow{D_0 D^*} \cdot \vec{x}_0 - \overrightarrow{D_0 D} \cdot \vec{x}_0 = \frac{L}{2} - \frac{L^A}{2} + \left(\frac{L^A}{2} - \frac{L}{2}\right) \cos \alpha + \left(\frac{L}{2} - \frac{L^B}{2}\right) \sin \alpha - \left(\frac{L^B}{2} - 2\frac{L}{2} + \frac{L^C}{2}\right) \sin \gamma$$

$$\Delta d = -\Delta L^A + \Delta L^A \cos \alpha - \Delta L^B \sin \alpha - (\Delta L^B + \Delta L^C) \sin \gamma$$

$$\Delta d \approx [-0,2 + 0,2 \cos 3^\circ - 15 \sin 1,6^\circ - (15 + 12) \sin 11^\circ] 10^{-6} \approx -3 \cdot 10^{-6} \approx \Delta d$$

Schéma 5

$$\frac{\Delta d}{d} \approx \frac{[-0,2 + 0,2 \cos 3^\circ - 15 \sin 1,6^\circ - (15 + 12) \sin 11^\circ] 10^{-6}}{0,04} \approx \frac{-8}{100\,000} \approx \frac{\Delta d}{d}$$

- Comparons avec le résultat approximé tiré de :

$$\Delta d = d l_2 \gamma \approx (\Delta L^B + \Delta L^C) \gamma \approx (15 + 12) 10^{-6} \frac{10\pi}{180} \approx 5 \cdot 10^{-6} \approx \Delta d$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{dl_2 \gamma}{d} \approx \frac{\Delta L^B + \Delta L^C}{d} \gamma \approx \frac{(15+12)10^{-3}}{40} \frac{10\pi}{180} \approx \boxed{\frac{11}{100\,000} \approx \frac{\Delta d}{d}}$$

Remarque : Il semble que l'intérêt de la précision verticale du point D du haut et du point D du bas ne soit pas très important vis-à-vis de celui de leur position horizontale dont on donne un encadrement draconien et dont le § II.4.4. fait prendre conscience. Toutefois ici, avec le modèle proposé – sur lequel s'appuie la fermeture de chaîne du § 3.11. – $\overline{D_0 D} = d$ est tel que : $\vec{d} \cdot \vec{y}_0 = \vec{d} \cdot \vec{z}_0 = 0$!!! On ne peut donc analyser la variation horizontale du point D au cours de sa translation idéalement verticale.

1.16. Interprétation possible de l'énoncé : « Dans ces conditions, est-il utile de conserver les six pièces (1) ? Est-il envisageable de lier directement les six bras (2) au bâti (0) par un pivot ? »

C'est le Schéma 5, avec (1) solidaire de (0).

- Le nouveau dispositif est plus hyperstatique :

$$a) \quad m_{th} = E_s - I_s = 6(s-1) - \sum_I i_s = 6(8-1) - 12 \times \overset{\text{Pivot}}{5} = -18$$

$$b) \quad m_c = m_u + m_p = \overset{\text{mouvement de la glissière}}{1} + 0 = 1 \quad (\text{théoriquement discutable, car le mouvement « observable » est permis par une déformation des pivots !!})$$

$$c) \quad h = m_c - m_{th} = \boxed{19 = h}$$

- Il est donc plus rigide ; d'où probablement un meilleur guidage vertical de la pièce (3).
- Par contre sa déformation exigera probablement un effort plus conséquent de la part de l'actionneur inconnu du système.
- Si finalement on tient compte des conditions précédentes, sur la course, que le problème nous a fait découvrir (nous montre que la course ne dépend pas (approximation !) de la position de B , d'où l'idée de le choisir lié à (0)), on peut douter fortement de la validité de cette solution. En effet, pour permettre le mouvement vertical de D , le point B se

déplaçait horizontalement de $l_1 \sin \alpha \approx l_1 \alpha$; i.e. : $140 \cdot 10^{-3} \frac{1,6\pi}{180} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Les pivots élastiques ne vont peut être pas supporter cette contrainte.

Partie IV

1.1. Les « conditions initiales sont nulles », d'où :

$$M_{eq} p^2 Z = K_e I_w - mgH \Rightarrow Z = \frac{1}{M_{eq} p^2} [K_e I_w - mgH]$$

- (1) donne :

$$Z = D [B I_w - mgH] ;$$

- (2) donne : $E = K_e p Z = G Z$;
- (3) donne : $U_b = L p I_w + R I_w + E \Rightarrow I_w [R + L p] = U_b - E \Rightarrow$

$$I_w = [U_b - E] \frac{1}{R + L p} = [U_b - E] A$$

A	B	G	D
$\frac{1}{R + L p}$	K_e	$K_e p$	$\frac{1}{M_{eq} p^2}$

1.2. $Z_{BO} = D [-P + AB (-G Z_{BO} + C Z_r)] = -DP - ABDG Z_{BO} + ABCD Z_r$

$$Z_{BO} (1 + ABDG) = -DP + ABCD Z_r \Rightarrow Z_{BO} = \frac{ABCD}{1 + ABDG} Z_r - \frac{D}{1 + ABDG} P$$

$$O_1 = \frac{ABCD}{1 + ABDG} = \frac{\frac{1}{R + L p} K_e K_h \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R + L p}{R + L p} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p}$$

•

$$O_1 = \frac{K_e K_h}{L M_{eq} p^3 + R M_{eq} p^2 + K_e^2 p}$$

$$O_2 = \frac{D}{1 + ABDG} = \frac{\frac{R + L p}{R + L p} \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R + L p}{R + L p} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p}$$

•

$$O_2 = \frac{R + L p}{L M_{eq} p^3 + R M_{eq} p^2 + K_e^2 p}$$

1.3. $Z_{BF} = D \left\{ -P + AB \left[-G Z_{BF} + C (Z_r - Z_{BF}) \right] \right\} = -DP - ABDG Z_{BF} + ABCD Z_r - ABCD Z_{BF}$

$$Z_{BF} (1 + ABDG + ABCD) = -DP + ABCD Z_r \Rightarrow$$

$$Z_{BF} = \frac{ABCD}{1 + ABDG + ABCD} Z_r - \frac{D}{1 + ABDG + ABCD} P$$

$$F_1 = \frac{ABCD}{1 + ABDG + ABCD} = \frac{\frac{1}{R+Lp} K_e K_h \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p + \frac{1}{R+Lp} K_e K_h \frac{1}{M_{eq} p^2}}$$

$$F_1 = \frac{K_e K_h}{LM_{eq} p^3 + RM_{eq} p^2 + K_e^2 p + K_e K_h}$$

$$F_2 = \frac{D}{1 + ABDG + ABCD} = \frac{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p + \frac{1}{R+Lp} K_e K_h \frac{1}{M_{eq} p^2}}$$

$$F_2 = \frac{R+Lp}{LM_{eq} p^3 + RM_{eq} p^2 + K_e^2 p + K_e K_h}$$

1.4. On suppose que le système soit soumis à des excitations séparées : $Z_r = H$ et $P = 0$; puis $Z_r = 0$ et $P = H$.

- $Z_r = H$ et $P = 0$. La Figure 11 indique que le système est à retour unitaire. indique que la classe de la fonction de transfert en « boucle ouverte » vaut 1. Lorsque ces deux conditions sont remplies on a (culturel) :

$\varepsilon_0 = 0$: écart statique de la fonction de transfert en « boucle fermée ».

Le correcteur est ici inutile !

$$\bullet \quad Z_r = 0 \text{ et } P = mgH \quad \varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - z) \stackrel{\text{Si } z \text{ bornée}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p(-F_2 mgH) = \lim_{p \rightarrow 0} -mgF_2$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{p \rightarrow 0} -mg \left(\frac{R+Lp}{LM_{eq} p^3 + RM_{eq} p^2 + K_e^2 p + K_e K_h} \right)$$

$$\simeq \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{mgR}{K_e K_h}$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{mgR}{K_e K_h}$$

$$\bullet \quad Z_r = H \text{ et } P = mgH \quad \varepsilon_0 = -\frac{mgR}{K_e K_h}$$

Il n'existe aucune valeur de K_h qui permette d'annuler ε_0 .

Remarque : Il faut vérifier qu'aucune racine de $LM_{eq}p^3 + RM_{eq}p^2 + K_e^2p + K_eK_h$ n'ait une partie réelle positive. On peut justifier formellement la validité de l'utilisation du théorème de la valeur finale, avec la recette de Routh :

- a) K_e^2 , coefficient du monôme de degré 1 est positif ; donc tous les autres coefficients doivent être positifs (ce qui semble physiquement assez vraisemblable dans ce problème) : $mg - z$ peut être bornée.
- b) Pour qu'elle le soit, il suffit que la condition ci-dessous soit respectée :

p^3	LM_{eq}	K_e^2	$\Rightarrow LK_h - RK_e > 0 \Rightarrow \boxed{K_h > \frac{RK_e}{L}}$
p^2	RM_{eq}	K_eK_h	
p^1	$\frac{LM_{eq}K_eK_h - RM_{eq}K_e^2}{RM_{eq}}$	0	
p^0	K_eK_h	0	

1.5.

$$G_1(\omega) = |H_1(s)| = \frac{K_1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = G_1(\omega)$$

•

$$G_2(\omega) = |H_2(s)| = \frac{K_2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{K_2}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}} = G_2(\omega)$$

•

$$G_3(\omega) = |H_3(s)| = \frac{K_3}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{K_3}{\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 2\frac{\omega^4}{\omega_c^4} + \frac{\omega^6}{\omega_c^6} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4}}}$$

•

$$\boxed{G_3(\omega) = \frac{K_3}{\sqrt{1 + \frac{\omega^6}{\omega_c^6}}}}$$

• $G_n(\omega)$

$$\boxed{G_n(\omega) = \frac{K_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}}$$

- a) *Mathématiquement :*
- b) *Physiquement :* le gain du régime harmonique **permanent** est scindé en deux par rapport à la pulsation de cassure ω_c :
- i) $\omega \ll \omega_c \Rightarrow G_n \sim K_n$: ce qui donne une asymptote horizontale ;

- ii) $\omega \gg \omega_c \Rightarrow G_n \sim \frac{K_n \omega_c^n}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} : \text{ce qui donne une asymptote oblique de pente } -20n \text{ par décade ;}$
- iii) Ces deux asymptotes se coupent pour une pulsation ω_c .

1.6.

$$G_1(\omega) = H_1(s) = \frac{K_1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}}$$

- $\frac{\omega}{\omega_c}$ est un premier ordre ; donc la pulsation de coupure à -3 dB est (culturel) égale à ω_c : $\boxed{\omega_{c,1} \approx \omega_c}$;

$$G_2(\omega) = H_2(s) = \frac{K_2}{1 + i\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

- est un deuxième ordre. Je ne crois pas que le taupin lambda sache la formule donnant la pulsation de coupure à -3 dB !

C'est la pulsation telle que : $20 \log_{10} |H_2(0)| - 20 \log_{10} |H_2(\omega_{c,2})| = 3$;

$$20 \log_{10} K_2 - 20 \log_{10} \frac{K_2}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{c,2}^4}{\omega_c^4}}} = 3 \Rightarrow \cancel{20 \log_{10} K_2} - \cancel{20 \log_{10} K_2} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega_{c,2}^4}{\omega_c^4}} = 3$$

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega_{c,2}^4}{\omega_c^4}} = 3 \Rightarrow 1 + \frac{\omega_{c,2}^4}{\omega_c^4} = 10^{\frac{3}{10}} \Rightarrow \boxed{\omega_{c,2} = \left(10^{\frac{3}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{4}} \omega_c}$$
 , avec des pulsations positives ;

$$\boxed{\omega_{c,3} = \left(10^{\frac{3}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{6}} \omega_c}$$

- Par analogie, on obtient :
- $\omega_{c,n}$

$$\boxed{\omega_{c,n} = \left(10^{\frac{3}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{2n}} \omega_c}$$

a) *Mathématiquement* :

Remarque : on voit ici que notre culture est insuffisante pour le premier ordre et que la valeur approchée de la pulsation de coupure n'est pas pertinente dans ce contexte, car cette

pulsation a une forme mathématique générale !! $\boxed{\omega_{c,1} = \omega_c \sqrt{10^{\frac{3}{10}} - 1}}$.

- b) *Physiquement* : la « coïncidence » de ω_c et de $\omega_{c,n}$ s'améliore au fur et à mesure de l'augmentation de n . A priori, le « gain » du rapprochement de ces deux pulsations semble assez insignifiant. Voici le résultat machinal de ce coefficient pour n variant de 1 à 10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,997\,628 ; 0,998\,813 ; 0,999\,209 ; 0,999\,407 ; 0,999\,525 ; \\ 0,999\,604 ; 0,999\,661 ; 0,999\,703 ; 0,999\,736 ; 0,999\,763 \end{array} \right\}$$

1.7. $K_1 = K_2 = K_3 = K$

- Il est clair que plus la valeur de n augmente, plus l'atténuation du gain est importante dès que la pulsation d'excitation est supérieure à la pulsation de coupure. Par exemple, pour une excitation de pulsation $\omega = 2\omega_{c,n}$ on a une atténuation de $6n$ dB. Il s'agit d'un formidable filtre **passe-bas** dont l'efficacité dépend de n .

1.8. $s^{2k+4} + (-1)^4 = 0 \Rightarrow s^8 = -1 \Rightarrow s = (-1)^{\frac{1}{8}} \Rightarrow s = \exp^{\frac{1}{8}i}(2k+1)\pi = \exp i \frac{(2k+1)\pi}{8} ;$

Seules les racines à parties réelles négatives sont à prendre en compte, i.e. :

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{8} \leq 0 ; \text{ Un petit dessin montre que les racines utiles sont : }$$

$$s = \cos \frac{5\pi}{8} \pm i \sin \frac{5\pi}{8} \quad \text{et} \quad s = \cos \frac{7\pi}{8} \pm i \sin \frac{7\pi}{8} ;$$

On veut que : $\left(s - \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) \left(s - \cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8} \right) = 1 + a_1 s + s^2$

$$s^2 - 2s \cos \frac{5\pi}{8} + 1 = 1 + a_1 s + s^2 \Rightarrow \boxed{a_1 = -2 \cos \frac{5\pi}{8}}$$

$$\boxed{a_1 \approx 0,77}$$

- Par analogie : $\boxed{b_1 = -2 \cos \frac{7\pi}{8}}$

$$\boxed{b_1 \approx 1,8}$$

1.9. $H_n(s) = \frac{K_n}{B_n(s)} \stackrel{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{K_n}{1}$. D'après ce qui précède, les polynômes de Butterworth possèdent, quel que soient leur ordre, un coefficient unitaire de s^0 ; d'où l'équivalence.

Donc : $\lim_{s \rightarrow 0} |s^\alpha H_n(s)| \sim \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{K_n}{1} \right| \stackrel{\text{Imposé}}{=} 1 \Rightarrow \boxed{K_n = 1}$

1.10.

• donne avec $C = \frac{K_c}{a_c + T_c p}$:

$$O_1 = \frac{ABCD}{1 + ABDG} = \frac{\frac{1}{R+Lp} K_e \frac{K_c}{a_c + T_c p} \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p}}$$

$$O_1 = \frac{K_e K_c}{a_c R M_{eq} p^2 + a_c L M_{eq} p^3 + R M_{eq} T_c p^3 + L M_{eq} T_c p^4 + a_c K_e K_e p + K_e K_e T_c p^2}$$

$$O_1 = \frac{K_e K_c}{a_c K_e^2 p + (a_c R M_{eq} + K_e^2 T_c) p^2 + (a_c L + R T_c) M_{eq} p^3 + L M_{eq} T_c p^4}$$

Le correcteur proposé ne modifie ni le retour unitaire de la fonction de transfert en « boucle fermée », ni la classe de la fonction O_1 comme le montre le résultat ci-dessus. Donc, l'écart statique (culturel) est toujours nul : $\varepsilon_0 = 0$.

• $F_2 = \frac{D}{1 + ABDG + ABCD} = \frac{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p + \frac{1}{R+Lp} K_e K_h \frac{1}{M_{eq} p^2}}$

$$F_2 = \frac{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{1}{M_{eq} p^2} \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{K_c}{a_c + T_c p} \frac{1}{M_{eq} p^2}}$$

$$F_2 = \frac{a_c R + a_c L p + R T_c p + L T_c p^2}{a_c R M_{eq} p^2 + a_c L M_{eq} p^3 + R M_{eq} T_c p^3 + L M_{eq} T_c p^4 + a_c K_e K_e p + K_e K_e T_c p^2 + K_e K_c}$$

$$F_2 = \frac{a_c R + (a_c L + R T_c) p + L T_c p^2}{K_e K_c + a_c K_e^2 p + (a_c R M_{eq} + K_e^2 T_c) p^2 + (a_c L + R T_c) M_{eq} p^3 + L M_{eq} T_c p^4}$$

$$F_2 \stackrel{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{a_c R}{K_e K_c}$$

$$\varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - z) \stackrel{\text{Si } z \text{ bornée}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p(-F_2 mgH) = \lim_{p \rightarrow 0} -mgF_2$$

$$\varepsilon_0 \sim \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{a_c mgR}{K_e K_c} = \boxed{-\frac{mga_c R}{K_e K_c} = \varepsilon_0}$$

Remarque : résultat prévisible, car le nouveau correcteur n'augmente pas la classe de la fonction de transfert de la « boucle ouverte » en amont de la perturbation. Donc, on n'obtient pas une annulation de l'écart statique dû à la perturbation.

1.11.

$$\bullet \quad F_1 = \frac{ABCD}{1 + ABDG + ABCD}$$

$$F_1 = \frac{\frac{1}{R+Lp} K_e \frac{K_c}{a_e+T_c p} \frac{1}{M_{eq} p^2}}{\frac{R+Lp}{R+Lp} \frac{M_{eq} p^2}{M_{eq} p^2} \frac{a_e+T_c p}{a_e+T_c p} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{1}{M_{eq} p^2} K_e p \frac{a_e+T_c p}{a_e+T_c p} + \frac{1}{R+Lp} K_e \frac{K_c}{a_e+T_c p} \frac{1}{M_{eq} p^2}}$$

$$F_1 = \frac{K_e K_c}{a_c R M_{eq} p^2 + a_c L M_{eq} p^3 + R M_{eq} T_c p^3 + L M_{eq} T_c p^4 + a_c K_e^2 p + K_e^2 T_c p^2 + K_e K_c}$$

$$F_1 = \frac{1}{1 + \frac{a_c K_c}{K_e} p + \frac{a_c R M_{eq} + K_e^2 T_c}{K_e K_c} p^2 + \frac{a_c L + R T_c}{K_e K_c} M_{eq} p^3 + \frac{L M_{eq} T_c}{K_e K_c} p^4}$$

$$\bullet \quad \text{On souhaite : } F_1 = \frac{1}{(1+a_1 s+s^2)(1+b_1 s+s^2)} = \frac{1}{1+(a_1+b_1)s+(2+a_1 b_1)s^2+(a_1+b_1)s^3+s^4};$$

D'où, par identification, sachant que $p = i\omega = s\omega_c$:

$$\text{a) } \frac{a_c K_c}{K_e} = \frac{a_1 + b_1}{\omega_c} \Rightarrow \boxed{a_c K_c \omega_c = (a_1 + b_1) K_e};$$

$$\text{b) } \frac{a_c R M_{eq} + K_e^2 T_c}{K_e K_c} = \frac{2 + a_1 b_1}{\omega_c^2} \Rightarrow \boxed{a_c R M_{eq} + K_e^2 T_c = (2 + a_1 b_1) K_e \frac{K_c}{\omega_c^2}};$$

$$\text{c) } \frac{a_c L + R T_c}{K_e K_c} M_{eq} = \frac{a_1 + b_1}{\omega_c^3} \Rightarrow \boxed{a_c L M_{eq} + R M_{eq} T_c = (a_1 + b_1) K_e \frac{K_c}{\omega_c^3}};$$

$$\text{d) } \frac{L M_{eq} T_c}{K_e K_c} = \frac{1}{\omega_c^4} \Rightarrow \boxed{L M_{eq} T_c = K_e \frac{K_c}{\omega_c^4}}.$$

• Quatre relations à quatre inconnues ;

1.12. Les « conditions initiales sont toujours supposées nulles » :

$$M_{eq} p^2 Z = K_e I_w - mgH - k_{eq} Z \Rightarrow Z = \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2} [K_e I_w - mgH] ;$$

• (1') donne :

$$Z = D [B I_w - mgH] ;$$

• (2) donne : $E = K_e p Z = G Z ;$

• (3) donne : $U_b = L p I_w + R I_w + E \Rightarrow I_w [R + L p] = U_b - E \Rightarrow$

$$I_w = [U_b - E] \frac{1}{R + L p} = [U_b - E] A$$

$\frac{A}{1}$	B	C	G	D
$\frac{1}{R + L p}$	K_e	$\frac{K_c}{a_c + T_c p}$	$K_e p$	$\frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2}$

Le schéma est identique à celui de la Figure 11 ; seules les fonctions C et D ont changé de valeur.

1.13.

• $F_1 = \frac{ABCD}{1 + ABDG + ABCD}$

$$F_1 = \frac{\frac{1}{R + L p} K_e \frac{K_c}{a_c + T_c p} \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2}}{\frac{R + L p}{R + L p} \frac{k_{eq} + M_{eq} p^2}{k_{eq} + M_{eq} p^2} \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2} K_e p \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{K_c}{a_c + T_c p} \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2}}$$

$$\frac{K_e K_c}{a_c R k_{eq} + K_e K_c + (a_c L k_{eq} + R k_{eq} T_c + a_c K_e^2) p + (a_c R M_{eq} + L k_{eq} T_c + K_e^2 T_c) p^2 + (a_c L + R T_c) M_{eq} p^3 + L M_{eq} T_c p^4}$$

• $F_2 = \frac{D}{1 + ABDG + ABCD}$

$$F_2 = \frac{\frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} \frac{R + L p}{R + L p} \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2}}{\frac{R + L p}{R + L p} \frac{k_{eq} + M_{eq} p^2}{k_{eq} + M_{eq} p^2} \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2} K_e p \frac{a_c + T_c p}{a_c + T_c p} + \frac{1}{R + L p} K_e \frac{K_c}{a_c + T_c p} \frac{1}{k_{eq} + M_{eq} p^2}}$$

$$\frac{a_c R + (T_c R + a_c L) p + T_c L p^2}{a_c R k_{eq} + K_e K_c + (a_c L k_{eq} + R k_{eq} T_c + a_c K_e^2) p + (a_c R M_{eq} + L k_{eq} T_c + K_e^2 T_c) p^2 + (a_c L + R T_c) M_{eq} p^3 + L M_{eq} T_c p^4}$$

1.14. La modification du correcteur semble délicate, car ses coefficients sont déterminés par le § 1.11 qu'il faut respecter pour être dans les conditions de « Butterworth » et en plus imposer un écart statique nulle pour les deux « entrées » possibles. Il faudrait revoir le détail de tout cela. On se limite ici à une évaluation simple.

$$\bullet \quad Z_r = H \quad \text{et} \quad P = 0. \quad \varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_r - z) \stackrel{\text{Si } z_r - z \text{ bornée}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p(H - F_1 H) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p} (1 - F_1)$$

$$\varepsilon_0 \sim \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K_e K_c}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} \right) = \boxed{\frac{a_c R k_{eq}}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} = \varepsilon_0}$$

$$\bullet \quad Z_r = 0 \quad \text{et} \quad P = mgH. \quad \varepsilon_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (0 - z) \stackrel{\text{Si } z \text{ bornée}}{=} \lim_{p \rightarrow 0} p(-F_2 mgH) = \lim_{p \rightarrow 0} -mgF_2$$

$$\varepsilon_0 \sim \lim_{p \rightarrow 0} -\frac{a_c mgR}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} = \boxed{-\frac{a_c mgR}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} = \varepsilon_0}$$

$$\bullet \quad Z_r = H \quad \text{et} \quad P = mgH. \quad \varepsilon_0 = \frac{a_c R k_{eq}}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} - \frac{a_c mgR}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} = \boxed{a_c R \frac{k_{eq} - mgR}{a_c R k_{eq} + K_e K_c} = \varepsilon_0}$$

Le correcteur proposé ne permet pas d'obtenir un écart statique nul !

- On pose « $C = \frac{C}{p}$ », pour augmenter la classe de la fonction de transfert en « boucle ouverte » sans vérifier si cela est compatible avec la méthode du § 1.11.

$$F_1 = \frac{AB \frac{C}{p} D}{1 + ABDG + AB \frac{C}{p} D} = \frac{\frac{ABCD}{p}}{\frac{p + pABDG + ABCD}{p}} \stackrel{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{ABCD}{ABCD} = 1$$

a)

$$Z_r = H \quad \text{et} \quad P = 0. \quad \varepsilon_0 = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - F_1) = 0 \quad ; \text{efficace pour cette contrainte partielle !!}$$

$$F_2 = \frac{D}{1 + ABDG + AB \frac{C}{p} D} = \frac{\frac{pD}{p}}{\frac{p + pABDG + ABCD}{p}} \stackrel{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{p}{ABC} = 0$$

b)

$$Z_r = 0 \quad \text{et} \quad P = H. \quad \varepsilon_0 = \lim_{p \rightarrow 0} (0 - mgF_2) = 0 \quad ; \text{efficace pour cette contrainte partielle !!}$$

- Il reste à vérifier que :
 - La fonction de transfert reste stable malgré l'augmentation de la classe de la fonction de transfert du correcteur ;
 - Nous restons dans les conditions de « Butterworth ».

Partie V

1.1. $E_w = \frac{f_{\text{dyn}} h}{2e}$; $I_w = \frac{U}{R} = \frac{\frac{f_{\text{dyn}} h}{2e}}{p R_K}$; d'où : $E_w I_w = \frac{h f_{\text{dyn}} f_{\text{st}}}{4p}$.

1.2. Des mesures « mécaniques » donnent mgv_z et donc $E_w I_w$. La mesure de p et des fréquences permettent alors d'accéder à la constante de Planck h .

1.3. Inversement, si l'on fixe h à une valeur conventionnelle, la balance du watt permet de définir une puissance mgv à partir de mesures de fréquences et du facteur p sans étalon matériel.

Comme g et v font intervenir longueur et temps (définis sans étalon matériel pour la seconde et le mètre), il en sera de même pour la masse.

**

*

Remarque : Bien que relu, ce corrigé n'est probablement pas exempt d'erreurs de calcul, d'interprétation ou pire de compréhension !