

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель начальника
управления образования
Могилёвского облисполкома

О.В.Стельмашок
«_____» ноября 2014 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 29 ноября 2014 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30

10 класс.

1. Существуют ли целые числа m и n такие, что верно равенство:
 $2009m^2 + 2013 = 2015n^2$? Ответ обосновать.
2. Дан треугольник. На одной из его сторон отмечено 5 различных точек, не совпадающих с вершинами, на второй стороне отмечено 8 различных точек, не совпадающих с вершинами, на третьей стороне – 12 различных точек, не совпадающих с вершинами треугольника. Сколько существует различных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
3. Дана прямоугольная доска размером 69×87 клеток. Какое наибольшее количество прямоугольных пластин размера 1×6 можно разместить на этой доске? Каждая пластина должна полностью покрывать 6 клеток доски.
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM ($M \in AC$). Окружность, проходящая через точку B и касающаяся стороны AC в точке M , пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Отрезки BM и KL пересекаются в точке P , при этом $BP:PM=5:1$. Найти площадь треугольника ABC , если площадь треугольника KBL равна 100 кв.ед.
5. Пусть a, b, c – попарно различные не равные нулю действительные числа. Рассмотрим три квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$, $y = cx^2 + ax + b$.
 - 1) Обязательно ли найдется точка, через которую проходят графики всех трех функций?
 - 2) Доказать, что среди данных трех функций можно выбрать хотя бы одну пару функций, графики которых пересекаются в двух точках.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!**1. Решение.**

Рассмотрим левую часть исходного равенства. Число 2009 при делении на 4 дает остаток 1, число m^2 при делении на 4 дает остаток 0 или 1, тогда число $2009m^2$ при делении на 4 даст остаток 0 или 1. Далее, число 2013 при делении на 4 дает остаток 1. Поэтому число $2009m^2 + 2013$ при делении на 4 даст остаток 1 или 2.

Рассмотрим правую часть исходного равенства. 2015 при делении на 4 даст остаток 3, n^2 при делении на 4 даст остаток 0 или 1. Поэтому $2015n^2$ при делении на 4 даст остаток 0 или 3.

Итак, левая часть исходного равенства при делении на 4 даст остаток 1 или 2, а правая часть – 0 или 3. Получили противоречие, значит, таких целых чисел m и n не существует.

Ответ: не существуют.

2. Решение.

Всего на контуре исходного треугольника отмечены $5+8+12=25$ точек. Первую вершину построенного треугольника можно выбрать 25 способами, вторую – 24, третью – 23. Итого три вершины можно выбрать $25 \cdot 24 \cdot 23$ способами. Необходимо учесть, что выбранные три вершины (например, А, В, С) могут быть выбраны в разном порядке: АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ, СВА (всего 6 вариантов). Поэтому количество различных троек

точек будет равно $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} = 2300$. (Знакомые с формулами комбинаторики тот же

результат могут просто получить по формуле C_{25}^3). Заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то они не образуют треугольник. Если три точки выбраны на стороне с 5-ю

точками, то таких троек будет $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ ($C_5^3 = 10$). Если три точки выбраны на стороне с

8-ю точками, то таких троек будет $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ ($C_8^3 = 56$). Если три точки выбраны на

стороне с 12-ю точками, то таких троек будет $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ ($C_{12}^3 = 220$).

Таким образом, получится $2300 - 10 - 56 - 220 = 2014$ различных треугольников.

Ответ: 2014 треугольников.

3. Решение.

Если от данной доски отрезать уголок размера 3×3 , то оставшаяся часть доски может быть легко замощена прямоугольниками 1×6 . Таких прямоугольников на доске

уместится $\frac{69 \cdot 87 - 3^2}{6} = 999$.

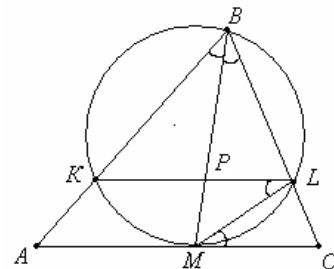
Докажем, что большее число прямоугольников разместить не удастся. Разобьем доску на квадраты размера 3×3 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Пусть при этом угловые квадраты будут черными. Имеем доску 23×29 , состоящую из квадратов 3×3 . Легко видеть, что общее количество таких квадратов будет нечетным и черных квадратов будет на 1 больше, чем белых, т.е. черных клеток будет на 9 больше, чем белых. Далее, заметим, что каждый прямоугольник 1×6 закрывает ровно 3 черные и 3 белые клетки, поэтому, если даже закрыть все белые клетки, то 9 черных клеток останутся незакрытыми. Всего на доске будет закрыто не более, чем $69 \cdot 87 - 9 = 5994$ клеток, что означает что на доске уместится не более, чем $5994 : 6 = 999$ прямоугольников.

Ответ: 999.

Указание для жюри: если в задаче получен правильный ответ, но не доказано, что это наибольшее возможное количество прямоугольников, то за задачу выставляется 50% баллов от максимально возможных.

4. Решение.

$\angle CML = \angle MBL$ (угол между касательной и хордой),
 $\angle MBL = \angle ABM$ (BM - биссектриса), $\angle ABM = \angle KLM$ (опираются на дугу KM). Значит $\angle CML = \angle KLM$. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими, поэтому $KL \parallel AC$. Отсюда следует подобие треугольников ABC и KBL . Так как $BP:PM=5:1$, то $BP:BM=5:6$.



$$\text{Тогда } \frac{S_{\triangle KBL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BP^2}{BM^2}, \quad \frac{100}{S_{\triangle ABC}} = \frac{25}{36}, \quad S_{\triangle ABC} = 144.$$

Ответ: 144 кв. ед.

5. Решение.

- 1). Да. График каждой из этих функций проходит через точку $(1; a+b+c)$.
- 2) Предположим противное: графики любых двух функций имеют менее двух общих точек. Это равносильно тому, что каждое из уравнений, записанных ниже, имеет не более одного корня.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= bx^2 + cx + a, & ax^2 + bx + c &= cx^2 + ax + b, & bx^2 + cx + a &= cx^2 + ax + b \\ (a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) &= 0, & (a-c)x^2 + (b-a)x + (c-b) &= 0, \end{aligned}$$

$$(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0 \quad (1)$$

Поскольку числа a, b, c попарно различны, то каждое из этих уравнений будет квадратным. Чтобы данные уравнения имели менее двух корней, необходимо, чтобы дискриминант каждого из них не превышал 0.

Рассмотрим первое уравнение: $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$.

$$D = (b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) = b^2 - 2bc + c^2 - 4ac + 4a^2 + 4bc - 4ab \leq 0,$$

$$b^2 + c^2 + 4a^2 \leq 4ac + 4ab - 2bc \quad (2)$$

Рассматривая второе и третье уравнение из (1) получим неравенства:

$$b^2 + a^2 + 4c^2 \leq 4ac + 4bc - 2ab \quad (3)$$

$$c^2 + a^2 + 4b^2 \leq 4ab + 4bc - 2ac \quad (4)$$

Сложив неравенства (2), (3) и (4), получим: $6a^2 + 6b^2 + 6c^2 \leq 6ab + 6bc + 6ac$.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ac \quad (5)$$

Сопоставим последнее неравенство с известным неравенством

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \quad (6).$$

Для доказательства (6) достаточно сложить неравенства

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad a^2 + c^2 \geq 2ac \quad (7).$$

Неравенства (5) и (6) могут быть одновременно истинными, только если $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ (8). Но из (8) следует, что когда все неравенства (7) являются равенствами:

$a^2 + b^2 = 2ab$, $b^2 + c^2 = 2bc$, $a^2 + c^2 = 2ac$, а это, в свою очередь, возможно только, если $a=b$, $b=c$, $a=c$, т.е. $a=b=c$. Однако, в условии сказано, что числа a, b, c попарно различны.

Получили противоречие, значит среди исходных трех функций можно выбрать две функции, графики которых имеют две общие точки. Что и требовалось доказать.

Указание для жюри: стоимость пункта 1) – 2 балла, стоимость пункта 2) – 6 баллов.