

8. Выражения и их преобразования

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Рациональной алгебраической дробью называется выражение вида

$$\frac{P}{Q}$$

, где P и Q - многочлены или одночлены. Множество значений переменной, при которых знаменатель отличен от нуля, называют **множеством допустимых значений алгебраической дроби**.

Свойства

1. $\frac{P}{Q} = 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$, а $Q \neq 0$.

2. $\frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q} = \frac{-P}{-Q}$, где $Q \neq 0$.

3. $\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot A}{Q \cdot A}$, где $Q \neq 0$, $A \neq 0$.

4. $\frac{P}{Q} \cdot \frac{A}{B} = \frac{P \cdot A}{Q \cdot B}$, где $Q \neq 0$, $B \neq 0$.

5. $\frac{P}{Q} : \frac{A}{B} = \frac{P \cdot B}{Q \cdot A}$, где $Q \neq 0$, $B \neq 0$, $A \neq 0$.

6. $\frac{P}{Q} + \frac{A}{B} = \frac{P \cdot B + A \cdot Q}{Q \cdot B}$, где $Q \neq 0$, $B \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Выпишите общий знаменатель дробей:

$$\frac{3}{2x}; \frac{x-1}{9x^2y} \text{ и } \frac{1}{3y}$$

1) $9x^2y$; 2) xy ; 3) $18x^2y$; 4) $3yx$; 5) $6x$.

б) Выпишите общий знаменатель дробей:

$$\frac{5}{3x}; \frac{x-8}{8x^2y}; \frac{1}{4y}$$

1) xy ; 2) x ; 3) $8x^2y$; 4) $4y$; 5) $24x^2y$.

Решение: а) Рассмотрим знаменатели дробей $9x^2y$, $2x$ и $3y$. $\text{НОК}(9, 2, 3) = 18$; $\text{НОК}(x, x^2) = x^2$; $\text{НОК}(y, y) = y$. Тогда общий знаменатель $18x^2y$.

Ответ: 3).

2. а) Из чисел 4; 1; 0,5; 3; -6; 0 выберите числа, входящие в область определения выражения

$$\frac{5}{\sqrt{2x-6}}$$

б) Из чисел 3; 2; 0,1; -3; 6; 0 выберите числа, входящие в область определения выражения

$$\frac{4}{\sqrt{3x-6}}$$

Решение:

а) Найдем область определения нашего выражения: $3x-6>0$, $x>2$, т.е. $D=(2; +\infty)$. Числа, которые входят в область определения: 3, 6.

Ответ: 3,6.

3. Выполните вычитание:

$$а) \frac{4x^2}{x+1} - 4x; \quad б) \frac{8x^2}{2x-1} - 4x.$$

Решение: а) Приведем выражение к общему знаменателю $(x+1)$, для этого домножим вычитаемое на $(x+1)$:

$$\frac{4x^2}{x+1} - 4x = \frac{4x^2}{x+1} - \frac{4x(x+1)}{x+1} = \frac{4x^2 - 4x(x+1)}{x+1} = \frac{4x^2 - 4x^2 - 4x}{x+1} = -\frac{4x}{x+1}.$$

4. Представьте выражение в виде дроби:

$$а) \left(-\frac{5x^2y^3}{4z^4}\right)^3; \quad б) \left(-\frac{2x^5y^2}{3z^3}\right)^4$$

Решение:

$$а) \left(-\frac{5x^2y^3}{4z^4}\right)^3 = -\frac{5^3(x^2)^3(y^3)^3}{4^3(z^4)^3} = -\frac{125x^6y^9}{64z^{12}}$$

5. Упростите выражение:

$$а) -3 \cdot \sqrt{0,81x^2}, \text{ если } x \leq 0; \quad б) 5 \cdot \sqrt{1,25x^2}, \quad \text{если } x \leq 0.$$

Решение:

$$а) -3 \cdot \sqrt{0,81x^2} = -3 \cdot 0,9 \cdot |x|, \quad \text{т.к. } x \leq 0, \text{ то } |x| = -x \text{ и } -3 \cdot 0,9 \cdot |x| = 2,7x$$

Ответ: 2,7x

6. Выполните деление:

$$а) (42x^6y^3 - 14x^4y^5 + 7x^3y^2) : (7x^2y);$$

$$б) (27x^{12}y^4 - 12x^8y^6 + 9x^4y^5) : (3x^4y^4).$$

Решение: а) Разделим каждое слагаемое из первой скобки на $7x^2y$:

$$(42x^6y^3 - 14x^4y^5 + 7x^3y^2) : (7x^2y) = 6x^4y^2 - 2x^2y^4 + xy.$$

7. Разложите на множители:

$$а) 5a^2b^2 - 45a^2c^2; \quad б) 3a^2b^2 - 48a^2c^2.$$

Решение: а) Вынесем общие множители 5 и a^2 за скобки: $5a^2(b^2-9c^2)$, воспользуемся формулой разность квадратов: $5a^2(b-3c)(b+3c)$.
 Ответ: $5a^2(b-3c)(b+3c)$.

8. Сократите дробь:

$$а) \frac{(3x^2 + 6x)^2}{(3x + 6)^2}; \quad б) \frac{(7x^2 - 21x)^2}{(7x - 21)^2}$$

Решение: а) Вынесем в числителе общий множитель $3x$ и в знаменателе - 3:

$$а) \frac{(3x^2 + 6x)^2}{(3x + 6)^2} = \frac{(3x(x+2))^2}{(3(x+2))^2} = \frac{3^2 x^2 (x+2)^2}{3^2 (x+2)^2} = x^2, x \neq -2.$$

9. Сократите дробь:

$$а) \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}; \quad б) \frac{3x^2 - 12x - 15}{2x^2 - 12x + 10}$$

Решение: а) По теореме Виетта корни в числителе 3 и -2 ($x_1 \cdot x_2 = -6$ и $x_1 + x_2 = 1$), корни в знаменателе 3 и 2 ($x_1 \cdot x_2 = 6$ и $x_1 + x_2 = 5$). Зная корни разложим числитель и знаменатель на множители:

$$а) \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}, x \neq 3.$$

10. Выполните действия:

$$а) \frac{9x^2 - 25y^2}{18y} \cdot \frac{27y^2}{9x^2 + 30xy + 25y^2}; \quad б) \frac{16x^2 - 9y^2}{24y^3} \cdot \frac{36y^2}{16x^2 - 24xy + 9y^2}.$$

Решение:

$$а) \frac{9x^2 - 25y^2}{18y} \cdot \frac{27y^2}{9x^2 + 30xy + 25y^2} = \frac{(3x-5y)(3x+5y)}{18y} \cdot \frac{27y^2}{(3x+5y)^2} = \frac{(3x-5y)3y}{2(3x+5y)} = \frac{9xy - 15y^2}{6x + 10y}$$

11. Сократите дробь (№ 2.4.57 [7]):

$$а) \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x}; \quad б) \frac{x - 16}{x - 8\sqrt{x} + 16}$$

Решение: а) Воспользуемся равенством

$$x = (\sqrt{x})^2$$

$$а) \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + x} = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

12. а) Докажите, что при любом значении x значение выражения $(5-x)(5+x) - 26$ отрицательно.

б) Докажите, что при любом значении x значение выражения $(4+x)(x-4) + 17$ положительно.

Решение:

а) $(5-x)(5+x) - 26 = 25 - x^2 - 26 = -x^2 - 1 < 0$, т.к. $-x^2$ - отрицательное число и из него вычтем 1, получим отрицательное число.

13. Упростите выражение:

$$а) \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} - \frac{3x^2 + 7x - 10}{3x + 10} - \frac{5 - 4x - 9x^2}{x + 1}; \quad б) \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \right) \cdot \frac{12 + (3 - x)^2}{2}$$

Решение:

а) Разложим на множители квадратные трехчлены:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, D = 1, x_1 = 2, x_2 = 1. \quad x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

$$3x^2 + 7x - 10 = 0, D = 169, x_1 = -10/3, x_2 = 1. \quad 3x^2 + 7x - 10 = 3(x - 1)(x + 10/3) = (x - 1)(3x + 10).$$

$$9x^2 + 4x - 5 = 0, D = 196, x_1 = 5/9, x_2 = -1. \quad 9x^2 + 4x - 5 = 9(x + 1)(x - 5/9) = (x + 1)(9x - 5).$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} - \frac{3x^2 + 7x - 10}{3x + 10} - \frac{5 - 4x - 9x^2}{x + 1} &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} - \frac{(x - 1)(3x + 10)}{3x + 10} - \frac{(x + 1)(9x - 5)}{x + 1} = \\ &= x - 2 - x + 1 - 9x + 5 = 4 - 9x, \text{ где } x \neq 1, x \neq -1, x \neq -10/3. \end{aligned}$$

Ответ: $4 - 9x$, где $x \neq 1, x \neq -1, x \neq -10/3$.

14. Разложите на множители:

$$а) \sqrt{x} + x - 2; \quad б) -3\sqrt{x} + x - 4.$$

Решение:

а)

Пусть $t = \sqrt{x}$, тогда $\sqrt{x} + x - 2 = t + t^2 - 2$. Решим уравнение $t + t^2 - 2 = 0$ и найдем его корни: $D = 9$, $t_1 = 1$, $t_2 = -2$. Получим: $\sqrt{x} + x - 2 = (t - 1)(t + 2) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$.

15. Упростите выражение:

$$а) \frac{1}{(x + 1)(x + 5)} + \frac{1}{(x + 5)(x + 9)} + \frac{1}{(x + 9)(x + 13)} + \frac{1}{(x + 13)(x + 17)};$$

$$б) \frac{1}{(x + 2)(x + 7)} + \frac{1}{(x + 7)(x + 12)} + \frac{1}{(x + 12)(x + 17)} + \frac{1}{(x + 17)(x + 22)}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} а) & \frac{1}{(x + 1)(x + 5)} + \frac{1}{(x + 5)(x + 9)} + \frac{1}{(x + 9)(x + 13)} + \frac{1}{(x + 13)(x + 17)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x + 9} + \frac{1}{x + 9} - \frac{1}{x + 13} + \frac{1}{x + 13} - \frac{1}{x + 17} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 17} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{(x + 1)(x + 17)} = \frac{4}{(x + 1)(x + 17)} \end{aligned}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Верно ли равенство:

а) $(x-7)(x-2)=x^2+9x+14$; б) $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$?

2. Запишите в виде алгебраического выражения:

а) произведение полусуммы чисел а и б и числа z;

б) частное от деления числа а на полуразность чисел m и n.

3. Упростите выражение $-3x(2x+y) - 4y(3x-2y)$ и найдите значение полученного выражения при $x=-1$, $y=2$.

4. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} - \sqrt{b}$; б) $3\sqrt{c} - \sqrt{a} + 2\sqrt{c}$.

5. Сократите дробь:

а) $\frac{64y^2 - 16y + 1}{64y^2 - 1}$; б) $\frac{20x^2 + 40xy + 20y^2}{15x^2 - 15y^2}$

6. Упростите выражение:

а) $\frac{6a+b}{2a} - \frac{4a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{8a^3}$; б) $\frac{x}{x-4} - \frac{x^2}{x^2-8x+16}$

7. Сократите дробь:

$$\frac{3b-9}{a^2-ab+a-b} : \frac{ab-3a+2b-6}{a^2-b^2}$$

8. Внесите множитель под знак корня и упростите выражение:

а) $-a^3 \cdot \sqrt{\frac{9}{a^4}}$; б) $-a^2 \cdot \sqrt{\frac{16}{a^4}}$

9. Докажите, что при любом значении переменной x значение дроби не является отрицательным числом:

$$\frac{3x^2+5}{4x^2-4x+19}$$

10. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^4} = \frac{8}{1-256x^8}$$