8. Выражения и их преобразования

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Рациональной алгебраической дробью называется выражение вида

$\frac{P}{Q}$, где P и Q - многочлены или одночлены. Множество значений переменной, при которых знаменатель отличен от нуля, называют **множеством допустимых значений алгебраической дроби**.

Свойства

1. $\frac{P}{Q} = 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$, а $Q \neq 0$.
2. $\frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q} = \frac{-P}{-Q}$, где $Q \neq 0$.
3. $\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot A}{Q \cdot A}$, где $Q \neq 0$, $A \neq 0$.
4. $\frac{P}{Q} \cdot \frac{A}{B} = \frac{P \cdot A}{Q \cdot B}$, где $Q \neq 0, B \neq 0$.
5. $\frac{P}{Q} : \frac{A}{B} = \frac{P \cdot B}{Q \cdot A}$, где $Q \neq 0, B \neq 0, A \neq 0$.
6. $\frac{P}{Q} + \frac{A}{B} = \frac{P \cdot B + A \cdot Q}{Q \cdot B}$, где $Q \neq 0, B \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Выпишите общий знаменатель дробей:

$\frac{3}{2x}$; $\frac{x-1}{9x^2y}$ и $\frac{1}{3y}$

1) $9x^2y$; 2) xy; 3) $18x^2y$; 4) $3yx$; 5) $6x$.

б) Выпишите общий знаменатель дробей:

$\frac{5}{3x}$; $\frac{x-8}{8x^2y}$; $\frac{1}{4y}$

1) xy; 2) x; 3) $8x^2y$; 4) $4y$; 5) $24x^2y$.

Решение:а) Рассмотрим знаменатели дробей $9x^2y$, $2x$ и $3y$. НОК(9,2,3)=18; НОК(x, x^2)=x^2 ; НОК(y,y)=y. Тогда общий знаменатель $18x^2y$.

Ответ: 3).

---

2. а) Из чисел 4; 1; 0,5; 3; -6; 0 выберите числа, входящие в область определения выражения

$\frac{5}{\sqrt{2x-6}}$

б) Из чисел 3; 2; 0,1; -3; 6; 0 выберите числа, входящие в область определения выражения

$$\frac{4}{\sqrt{3x-6}}$$

Решение:
а) Найдем область определения нашего выражения: 3x-6>0, x>2, т.е. D=(2; +∞). Числа, которые входят в область определения: 3, 6.
Ответ: 3,6.

---

3. Выполните вычитание:

$$а)\ \frac{4x^2}{x+1}-4x;\quad б)\ \frac{8x^2}{2x-1}-4x.$$

Решение:а) Приведем выражение к общему знаменателю (x+1), для этого домножим вычитаемое на (x+1):

$$\frac{4x^2}{x+1}-4x=\frac{4x^2}{x+1}-\frac{4x(x+1)}{x+1}=\frac{4x^2-4x(x+1)}{x+1}=\frac{4x^2-4x^2-4x}{x+1}=-\frac{4x}{x+1}.$$

---

4. Представьте выражение в виде дроби:

$$а)\left(-\frac{5x^2y^3}{4z^4}\right)^3;\quad б)\left(-\frac{2x^5y^2}{3z^3}\right)^4$$

Решение:

$$а)\left(-\frac{5x^2y^3}{4z^4}\right)^3=-\frac{5^3(x^2)^3(y^3)^3}{4^3(z^4)^3}=-\frac{125x^6y^9}{64z^{12}}$$

---

5. Упростите выражение:

$$а)-3\cdot\sqrt{0{,}81x^2},\text{если } x\le 0;\quad б)\ 5\cdot\sqrt{1{,}25x^2},\quad \text{если } x\le 0.$$

Решение:

$$а)-3\cdot\sqrt{0{,}81x^2}=-3\cdot 0{,}9\cdot|x|,\quad \text{т.к. } x\le 0, \text{то } |x|=-x \text{ и } -3\cdot 0{,}9\cdot|x|=2{,}7x$$

Ответ: 2,7x

---

6. Выполните деление:
а) $(42x^6y^3-14x^4y^5+7x^3y^2):(7x^2y)$;
б) $(27x^{12}y^4-12x^8y^6+9x^4y^5):(3x^4y^4)$.
Решение:а)Разделим каждое слагаемое из первой скобки на $7x^2y$:
$(42x^6y^3-14x^4y^5+7x^3y^2):(7x^2y)= 6x^4y^2-2x^2y^4+xy$.

---

7. Разложите на множители:
а) $5a^2b^2-45a^2c^2$; б) $3a^2b^2-48a^2c^2$.

Решение:а)Вынесем общие множители 5 и a^2 *за скобки:* $5a^2(b^2-9c^2)$*, воспользуемся формулой разность квадратов:* $5a^2(b-3c)(b+3c)$*.*
Ответ: $5a^2(b-3c)(b+3c)$*.*

---

8. Сократите дробь:

$$a)\ \frac{(3x^2+6x)^2}{(3x+6)^2};\quad б)\ \frac{(7x^2-21x)^2}{(7x-21)^2}$$

Решение:а) Вынесем в числителе общий множитель 3x и в знаменателе - 3:

$$a)\ \frac{(3x^2+6x)^2}{(3x+6)^2}=\frac{(3x(x+2))^2}{(3(x+2))^2}=\frac{3^2x^2(x+2)^2}{3^2(x+2)^2}=x^2, x\neq -2.$$

---

9. Сократите дробь:

$$a)\ \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6};\quad б)\ \frac{3x^2-12x-15}{2x^2-12x+10}$$

*Решение:а) По теореме Виетта корни в числителе 3 и -2 (x1*x2=-6 и x1+x2=1), корни в знаменателе 3 и 2 (x1*x2=6 и x1+x2=5). Зная корни разложим числитель и знаменатель на множители:*

$$a)\ \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}, x\neq 3.$$

---

10. Выполните действия:

$$a)\ \frac{9x^2-25y^2}{18y}\cdot\frac{27y^2}{9x^2+30xy+25y^2};\quad б)\ \frac{16x^2-9y^2}{24y^3}\cdot\frac{36y^2}{16x^2-24xy+9y^2}.$$

Решение:

$$a)\ \frac{9x^2-25y^2}{18y}\cdot\frac{27y^2}{9x^2+30xy+25y^2}=\frac{(3x-5y)(3x+5y)}{18y}\cdot\frac{27y^2}{(3x+5y))^2}=\frac{(3x-5y)3y}{2(3x+5y)}=\frac{9xy-15y^2}{6x+10y}$$

---

11. Сократите дробь (№ 2.4.57 [7]):

$$a)\ \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x};\quad б)\ \frac{x-16}{x-8\sqrt{x}+16}$$

Решение:а) Воспользуемся равенством

$$x=\left(\sqrt{x}\right)^2$$

$$a)\ \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=1+\frac{\sqrt{x}}{x}$$

---

12. а) Докажите, что при любом значении x значение выражения (5-x)(5+x) - 26 отрицательно.

б) Докажите, что при любом значении x значение выражения (4+x)(x-4) +17 положительно.

Решение:

а) (5-x)(5+x) - 26 =25- x^2-26=-x^2-1<0, т.к. -x^2 - отрицательное число и из него вычтем 1, получим отрицательное число.

---

13. Упростите выражение:

$$а)\ \frac{x^2-3x+2}{x-1}-\frac{3x^2+7x-10}{3x+10}-\frac{5-4x-9x^2}{x+1};\quad б)\ \left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)\cdot\frac{12+(3-x)^2}{2}$$

Решение:

а) Разложим на множители квадратные трехчлены:

x^2-3x+2=0, D=1, x_1=2, x_2=1. x^2-3x+2=(x-1)(x-2).

$3x^2$+7x-10=0, D=169, x_1=-10/3, x_2=1. $3x^2$+7x-10=3(x-1)(x+10/3)=(x-1)(3x+10).

$9x^2$+4x-5=0, D=196, x_1=5/9, x_2=-1. $9x^2$+4x-5=9(x+1)(x-5/9)=(x+1)(9x-5).

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}-\frac{3x^2+7x-10}{3x+10}-\frac{5-4x-9x^2}{x+1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}-\frac{(x-1)(3x+10)}{3x+10}-\frac{(x+1)(9x-5)}{x+1}=$$

=x-2-x+1-9x+5=4-9x, где x≠1, x≠-1, x≠-10/3.

Ответ: 4-9x, где x≠1, x≠-1, x≠-10/3.

---

14. Разложите на множители:

$$а)\ \sqrt{x}+x-2;\quad б)\ -3\sqrt{x}+x-4.$$

Решение:

а)

Пусть t=$\sqrt{x}$, тогда $\sqrt{x}+x-2$=t+t^2-2. Решим уравнение t+t^2-2=0 и найдем его корни: D=9, t1=1, t2=-2. Получим: $\sqrt{x}+x-2=(t-1)(t+2)=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$.

---

15. Упростите выражение:

$$а)\ \frac{1}{(x+1)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+9)}+\frac{1}{(x+9)(x+13)}+\frac{1}{(x+13)(x+17)};$$

$$б)\ \frac{1}{(x+2)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+12)}+\frac{1}{(x+12)(x+17)}+\frac{1}{(x+17)(x+22)}.$$

Решение:

$$а)\ \frac{1}{(x+1)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+9)}+\frac{1}{(x+9)(x+13)}+\frac{1}{(x+13)(x+17)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+13}+\frac{1}{x+13}-\frac{1}{x+17}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+17}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{(x+1)(x+17)}=\frac{4}{(x+1)(x+17)}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Верно ли равенство:
а) $(x-7)(x-2)=x^2+9x+14$; б) $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$?

2. Запишите в виде алгебраического выражения:
а) произведение полусуммы чисел a и b и числа z;
б) частное от деления числа a на полуразность чисел m и n.

3. Упростите выражение $-3x(2x+y) - 4y(3x-2y)$ и найдите значение полученного выражения при $x=-1$, $y=2$.

4. Упростите выражение:
$a)\ 3\sqrt{a}+4\sqrt{a}-\sqrt{b}$; б) $3\sqrt{c}-\sqrt{a}+2\sqrt{c}$.

5. Сократите дробь:
$a)\ \dfrac{64y^2-16y+1}{64y^2-1}$; б) $\dfrac{20x^2+40xy+20y^2}{15x^2-15y^2}$

6. Упростите выражение:
$a)\ \dfrac{6a+b}{2a}-\dfrac{4a^2}{b}\cdot\dfrac{b^2}{8a^3}$; б) $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x^2}{x^2-8x+16}$

7. Сократите дробь:
$$\frac{3b-9}{a^2-ab+a-b}:\frac{ab-3a+2b-6}{a^2-b^2}$$

8. Внесите множитель под знак корня и упростите выражение:
$a)-a^3\cdot\sqrt{\dfrac{9}{a^4}}$; б) $-a^2\cdot\sqrt{\dfrac{16}{a^4}}$

9. Докажите, что при любом значении переменной x значение дроби не является отрицательным числом:
$$\frac{3x^2+5}{4x^2-4x+19}$$

10. Докажите тождество:
$$\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+4x^2}+\frac{4}{1+16x^4}=\frac{8}{1-256x^8}$$