

Exercice n° 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- 1/ a- Montrer que pour tout réel x , on a : $2|x| \leq x^2 + 1$.
 - b- En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
 - c- Déterminer les extremums de f .
- 2/ Soient a et b deux réels de $[1, +\infty[$.

$$f(a) - f(b) = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

- a- Montrer que :
- b- En déduire les variations de f sur $[1, +\infty[$.

Exercice n° 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$.

- 1/ Montrer que pour tout réel x f est impaire.
- 2/ En déduire l'expression de la fonction f .
- 3/ Etudier alors la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

4/ Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

Préciser le domaine de définition de g et étudier sa monotonie.

Exercice n° 3

I/ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{-2x^2 + 3x - 1}$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{2x - |x|}}{2x^2 + x + 3}$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{5x^4 - \pi}}{|x^2 - 1| + 3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 3}$$

$$f_5(x) = \frac{3\sqrt{x-3}}{x^2 - 9}$$

$$f_6(x) = \frac{-5x^2 + 5}{x + 1 - \sqrt{2x + 5}}$$

II/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(2x+4)^2 + 3$.

- 1/ Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
- 2/ Montrer que f est bornée sur $[-2, 4]$.
- 3/ Etudier les variations de f pour $x \geq -2$ puis pour $x \leq -2$.
- 4/ Déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$.

III/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$

- 1/ Déterminer le domaine de définition de f .
- 2/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1/2 \leq f(x) \leq 1/2$.
- 3/ Déduire que f admet deux extremums.

IV/ Montrer que la fonction $f(x) = x(1-x)$ est majorée par $1/4$, en déduire le maximum de f .