Exercice n° 1

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

1/ a- Montrer que pour tout réel x, on a : $2|x| \le x^2 + 1$.

b- En déduire que f est bornée sur IR.

c- Déterminer les extremums de f.

2/ Soient a et b deux réels de $[1,+\infty[$.

a- Montrer que : $f(a) - f(b) = \dfrac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$.

b- En déduire les variations de f sur $[1 , +\infty[$.

Exercice n°2

Soit f une fonction définie sur IR, tel que $\forall\ x \in IR$: $f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$.

1/ Montrer que pour tout réel x f est impaire.

2/ En déduire l'expression de la fonction f.

3/ Etudier alors la monotonie de f sur IR.

4/ Soit la fonction $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

Préciser le domaine de définition de g et étudier sa monotonie.

Exercice n°3

I/ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{-2x^2+3x-1} \qquad f_2(x) = \frac{\sqrt{2}x - |x|}{2x^2+x+3} \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt{5}x^4 - \pi}{|x^2-1|+3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{-2x^2+5x-3} \qquad f_5(x) = \frac{3\sqrt{x-3}}{x^2-9} \qquad f_6(x) = \frac{-5x^2+5}{x+1-\sqrt{2x+5}}$$

II/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -(2x+4)^2 + 3$.

1/ Montrer que f est majorée sur IR.

2/ Montrer que f est bornée sur [-2,4].

3/ Etudier les variations de f pour $x \ge -2$ puis pour $x \le -2$.

4/ Déduire que f admet un extremum sur IR.

III/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f.

2/ Montrer que $\forall\ x \in IR$, $-1/2 \le f(x) \le 1/2$.

3/ Déduire que f admet deux extremums.

IV/ Montrer que la fonction $f(x) = x(1 - x)$ est majorée par 1/4, en déduire le maximum de f.