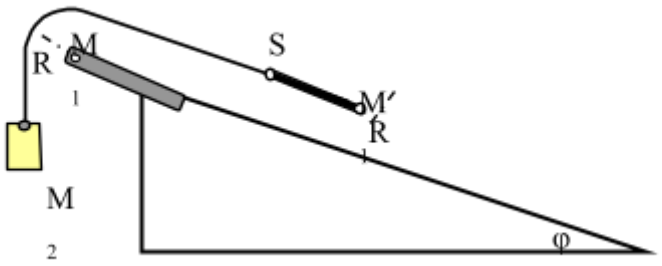
Ποια η μάζα του βαριδίου M_2;

Συγκρατούμε ακίνητο το σύστημα του σχήματος. Η τροχαλία και ο κύλινδρος έχουν ίδια μάζα M_1=2kg και ίδια ακτίνα R=10cm. Η τροχαλία είναι στερεωμένη στο κέντρο της και μπορεί να στρέφεται περί τον άξονά της χωρίς τριβές. Με ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα συνδέουμε τον κύλινδρο με ένα βαρίδι μάζας M_2 μέσω της τροχαλίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Το νήμα είναι παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και δε γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία βάσης φ=30°.



i) Να υπολογίσετε την μάζα m_1 του βαριδίου, ώστε το σύστημα να ισορροπεί.

Αντικαθιστούμε το βαρίδι με άλλο μάζας M_2=6kg και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να ανέρχεται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου κυλιόμενος προς τα πάνω.

ii) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα μάζας M_2, (βαρίδι).

iii) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα.

vi) Αν ο συντελεστής οριακής τριβής είναι $\mu_s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ η μέγιστη μάζα του βαριδίου, M_2 ώστε ο δίσκος να κυλίεται χωρίς ολίσθηση είναι:

α. $M_2 = \dfrac{M_1(4\mu g\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi + 2\mu g}$

β. $M_2 = M_1(4\mu g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\varphi)$

γ. Δεν υπάρχει περιορισμός στη μάζα

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.
Δικαιολογήστε την επιλογή σας.

Δίνονται : Για τον κύλινδρο και την τροχαλία, $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, $g = 10\ m/s^2$

Απάντηση

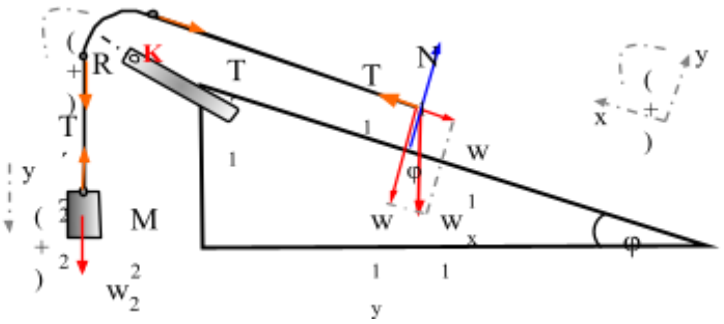
i.

Από την ισορροπία του κυλίνδρου προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(cm)} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_{T_{\sigma\tau}} = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{T_{\sigma\tau}} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 0$$



$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_1 = w_{1x} \Rightarrow T_1 = M_1 g \quad \Rightarrow$

$T_1 = 10\text{N}$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές $|T_1|=|T_1'|$ και $|T_2|=|T'_2|$

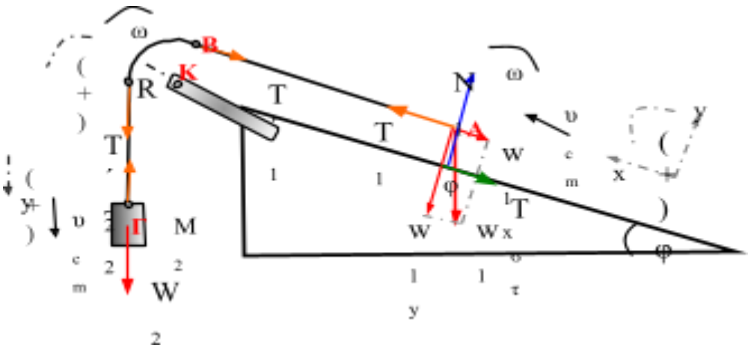
Από την ισορροπία της τροχαλίας προκύπτει:

$\Sigma\vec{\tau}_{(K)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{T_1'} + \vec{\tau}_{T_2'} = 0 \Rightarrow T_2' R - T_1' R = 0 \Rightarrow T_1' = T_2' = Mg = 10\text{ N}$

Από την ισορροπία του σώματος M_2 προκύπτει:

$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow w_2 = T_2 \Rightarrow M_2 g = M_1 g \Rightarrow M_2 = M_1 \quad \Rightarrow$

ii)



Επειδή το σχοινί είναι μη εκτατό όλα τα σημεία του έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας. Επιπλέον επειδή η τροχαλία και ο κύλινδρος έχουν ίσες ακτίνες θα έχουν και ίδιο μέτρο γωνιακής ταχύτητας.

$\upsilon_A = \upsilon_B = \upsilon_\Gamma \rightarrow \upsilon_{cm,1} = \omega_2 R_2 = \upsilon_{cm,2} \overset{\upsilon_{cm,1}=\omega_1 R_1}{\Rightarrow}$

$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \upsilon_{cm} \overset{R_1=R_2}{\Rightarrow} \omega R = \upsilon_{cm}$ και

$\alpha_\gamma R = \alpha_{cm}$ ***(1)***

<u>Για τον κύλινδρο</u>

$\Sigma\vec{F}_x = M_1\vec{a}_{cm} \overset{(+)\nwarrow}{\Rightarrow} T_1 - w_{1x} - T_{\sigma\tau} = M_1\alpha_{cm}$ ***(2)***

$\Sigma\vec{\tau}_{(cm)} = I_{cm}\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_{T_{\sigma\tau}} = 0 \overset{\odot(+)}{\Rightarrow} T_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2} M_1 R^2 \alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M_1 R \alpha_\gamma \Rightarrow$

$T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M_1 \alpha_{cm}$ ***(3)***

(2)+(3) $\Rightarrow T_1 - w_{1x} = \frac{3}{2} M_1 \alpha_{cm} \Rightarrow T_1 = w_{1x} + \frac{3}{2} M_1 \alpha_{cm} \Rightarrow T_1 = M_1 g \quad \frac{3}{2} \quad _1 \quad _{cm}$ ***(4)***

Επειδή το νήμα είναι αβαρές $|T_1| = |T_1'|$ και $|T_2| = |T'_2|$ ***(5)***

<u>Για την τροχαλία</u>

$\Sigma\vec{\tau}_{(K)} = I_{(K)}\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_{T_1'} + \vec{\tau}_{T_2'} = I_{(K)}\vec{\alpha}_\gamma \overset{\odot(+)}{\Rightarrow} T_2' R - T_1' R = \frac{1}{2} M_1 R^2 \alpha_\gamma \Rightarrow T_2' - T_1' = \frac{1}{2} M_1 \alpha_{cm} \overset{(5)}{\Rightarrow}$

$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 \alpha_{cm}$ ***(6)***

<u>Για το βαρίδι</u>

$$\Sigma\vec{F}_y = M_2\vec{\alpha}_{cm} \overset{(+)\downarrow}{\Rightarrow} w_2 - T_2 = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_2 = M_2 g - M_2\alpha_{cm} \quad (7)$$

$$(4),(7) \Rightarrow M_2 g - M_1 g\eta\mu\varphi = M_2\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M_1\alpha_{cm} + \frac{3}{2}M_1\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g = (2M_1 + M_2)\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{2M_1 + M_2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = 5m/s^2$$

iii)

$$T = M_1 g\eta\mu\varphi + M_1\alpha_{cm} = 25\,N$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει

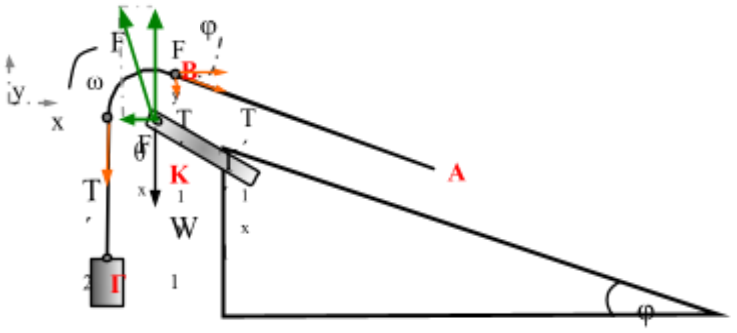
και από τη σχέση (7) T_2=30N

Από την ισορροπία στον οριζόντιο άξονα προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \overset{(+)\rightarrow}{\Rightarrow} T'_{1x} - F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_x = T'_1\sigma\upsilon\nu(\varphi) \Rightarrow$$

$$F_x = 25\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F_x = 12,5\sqrt{3}N$$



Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \overset{(+)\uparrow}{\Rightarrow} F_y - w_1 - T'_2 - T'_{1y} = 0 \Rightarrow F_y - 20 - 30 - 25\cdot\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = 62,5N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(12,5\sqrt{3})^2 + 62.5^2} = \sqrt{4375} \Rightarrow F \simeq 66,1N$$

$$\varepsilon\varphi(\theta) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{62.5}{12.5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

iv)

Από το ερώτημα ***ii)*** έχουμε βρει:

$$T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_1\alpha_{cm} \quad \text{και} \quad \alpha_{cm} = \frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{2M_1 + M_2} \quad \text{από όπου προκύπτει}$$

$$T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_1\frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{2M_1 + M_2}$$

Για να κυλίεται

$$T_{στ} \le \mu N_1 \Rightarrow \frac{1}{2}M_1 g\eta\mu\varphi + \frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{M_1 + M_2} \le \mu M_1 g \quad \Rightarrow$$

$$\frac{M_2 - M_1\eta\mu\varphi}{M_1 + M_2} \le \mu\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow M_2 - M_1\eta\mu\varphi \le \mu\sigma\upsilon\nu\varphi\left(4M_1 + 2M_2\right) \Rightarrow$$

$$M_2 - M_1\eta\mu\varphi \le \mu\sigma\upsilon\nu\varphi\left(4M_1 + 2M_2\right) \to M_2 - 2\cdot\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(4\cdot 2 + 2M_2\right) \to$$

$$M_2 - 1 \le \frac{3}{4}\left(4\cdot 2 + 2M_2\right) \to M_2 - 1 \le 1,5M_2 + 6 \to M_2 - 1 \le 1,5(M_2 + 4) \to$$

$$M_2 - 1 \le 1,5\cdot M_2 + 6$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται πως η ανισότητα ικανοποιείται για οποιαδήποτε τιμή της μάζας M_2. Συνεχίζοντας προκύπτει:

$$-0,5\cdot M_2 \le 7 \to M_2 \ge -14$$

Προφανώς η μάζα δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και συνεπώς δεν υπάρχει περιορισμός στη μάζα.

Σωστή επιλογή είναι το ***γ****.*

Σχόλιο: Γιατί να συμβαίνει αυτό;

Αν η μάζα του βαριδιού είναι μεγαλύτερη από 1kg τότε το βαρίδι κατέρχεται και ο κύλινδρος ανέρχεται. Αν η μάζα του βαριδιού είναι μικρότερη από ένα 1kg τότε το βαρίδι θα ανέρχεται και ο κύλινδρος θα κατέρχεται κατά μήκος του κεκλιμένου με επιτάχυνση $\alpha_{cm} = \frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{M_1 + M_2}$. Η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης του σώματος M_2 δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή του g εξαιτίας της τάσης T_2.

$$|\alpha_{cm}| \le g \Rightarrow -g \le \frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{M_1 + M_2} \le g$$

$$\frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{M_1 + M_2} \le g \Rightarrow M_2 - M_1\eta\mu\varphi \le 2M_1 + M_2 \Rightarrow -\eta\mu\varphi \le 2, \text{ ισχύει}$$

$$\frac{(M_2 - M_1\eta\mu\varphi)g}{M_1 + M_2} \ge -g \Rightarrow M_2 - M_1\eta\mu\varphi \ge -2M_1 - M_2 \Rightarrow 2M_2 \ge M_1(\eta\mu\varphi - 2) \Rightarrow M_2 \ge \frac{M_1(\eta\mu\varphi - 2)}{2}, \text{ ισχύει}$$

$$(\eta\mu\varphi - 2) < 0$$