

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	6-10/10/2025
Sınıf	9	Süre	6 ders saati
Tema/Ünite	SAYILAR		
Konu (İçerik Çerçevesi)	Sayı Kümelerinin Özellikleri		

BÖLÜM II

Öğrenme Çıktısı	9.1.3. Farklı sayı kümelerinin özellikleri hakkında muhakeme yapabilme
Süreç Bileşenleri	a) Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçekte sayılara dair temel özelliklere (sıralama, arada olma ve işlem özellikleri) ilişkin varsayımlarda bulunur. b) Farklı sayı kümelerinde elde ettiği örüntüleri listeleterek varsayımlarına yönelik genellemeler yapar. c) Varsayımları ile genellemelerini karşılaştırır. ç) Elde ettiği genellemelerden sayı kümelerinin özellikleri hakkında önermeler sunar. d) Önermelerin kullanışlılığını problem durumlarında değerlendirir. e) Elde ettiği önermeleri ispatlamak ya da çürütmek için matematiksel ispat yöntemlerini kullanır. f) Kullandığı matematiksel ispat yöntemlerini kullanışlılık açısından değerlendirir.
Sosyal-Duygusal Öğrenme Becerileri	SDB2.1. İletişim, SDB2.2. İş Birliği
Değerler	D3. Çalışkanlık, D17. Tasarruf
Okuryazarlık Becerileri	OB3. Finansal Okuryazarlık
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

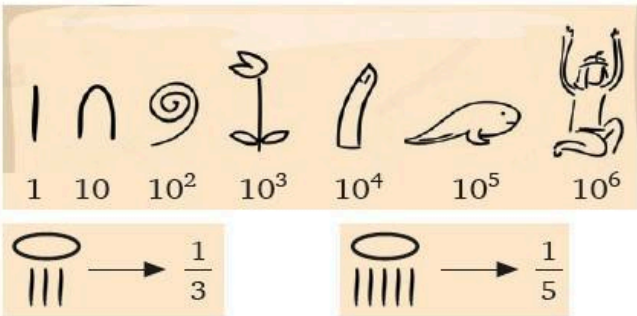
Öğrenme-Öğretme Süreci

SAYI KÜMELERİNİN ÖZELLİKLERİ



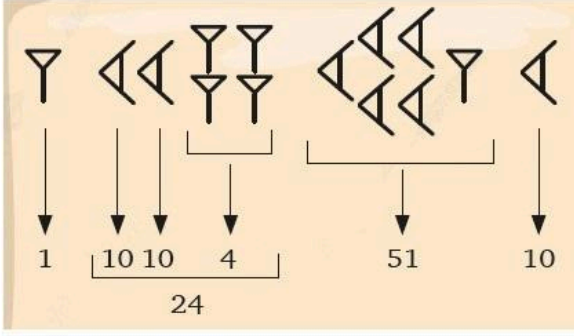
Görsel 1

Eski çağlardan itibaren insanlar mevsim ve ay döngülerini takip etmek, avladıkları hayvan sayısının miktarını belirtmek gibi durumlar için mağara duvarlarına veya ağaç gövdelerine attıkları çentiklerden yararlanmışlardır (Görsel 1).



Görsel 2

Antik Mısır medeniyetinde yaklaşık 3000 yıl önce sayılar, hiyerogliflerin tekrar edilmesiyle ifade edilmiştir. Büyük sayıları göstermek için onun katlarını tercih eden Antik Mısırlılar, kesirleri birim kesirler yardımıyla göstermiştir (Görsel 2).



Görsel 2

Konumsal yazım, matematikte sayıların değerinin sayının yazılışındaki konumuna bağlı olduğu bir sayı yazım sistemidir. Sembollerini tekrar ederek büyük sayıları yazmak zorlaşınca bazı medeniyetler, sayıların gösteriminde konumsal yazımı tercih etmiştir. Mezopotamya coğrafyasında MÖ 1894-MÖ 539 yılları arasında hüküm süren Babilliler, altmışlık sayı sistemiyle konumsal yazım kullanmıştır (Görsel 3).

Örneğin YBC 7289 adındaki Babil kil tabletinde Görsel 3'te verilen sayı yer almaktadır. Bu sayının günümüzdeki gösterimi $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$ şeklindedir. Babilliler, gösterimlerinde basamakları ayırmak için aralarına boşluk koymuştur.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Antik Mısırlıların kullandığı 10 ve 10'un kuvveti olan sayılar, günümüzde farklı olarak üslü şekilde gösterilmektedir. Bu farklılığın sebepleri neler olabilir?
2. Mezopotamya coğrafyasında hangi sayı sistemlerinden yararlanılmıştır?
3. Babillilerin kullandığı $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$ ifadesi 1,4142'ye eşittir. Babilliler, bu gösterimle ifade ettikleri sayıları günlük hayatta hangi amaçla kullanmış olabilir?

Sayı kümelerinin tarihî gelişimi, matematiksel düşüncenin insan ihtiyaçlarını karşılamak için nasıl değiştiğini göstermektedir. Her bir yeni kavram ve sayı kümesi, matematiksel bilgi birikimini genişletmiş ve matematiğin uygulamalarını çeşitlendirmiştir.

Serbest Düşme

Üçer kişilik gruplara ayrılarak aşağıda verilen problemi inceleyiniz ve soruları cevaplayınız.

Bir cismin yer çekimi kuvvetinin etkisiyle düşey doğrultuda yaptığı hareket, serbest düşmedir. Düşme sırasında cismin üzerine herhangi bir dış kuvvet uygulanmaz ve hava direnci gibi faktörler de göz ardı edilir. g yer çekimi ivmesini (m/s^2) göstermek üzere düşey doğrultuda serbest düşme hareketi yapan bir cismin t saniye sonunda ilk

konumuna göre yer değiştirme (m) miktarı $x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ eşitliği ile hesaplanabilir.

Yer çekimi ivmesi gök cisimlerine göre farklılık göstermektedir. Tablo 1'de Dünya, Ay ve Mars'ın yer çekimi ivmelerinin (m/s^2) yaklaşık değerleri verilmiştir.

Tablo 1

Gök Cismi	Yer Çekimi İvmesi (m/s^2)
Dünya	9,8
Ay	1,6
Mars	3,7

Tablo 2'de farklı gök cisimlerinde aynı yükseklikten bırakılan bir cismin serbest düşme hareketi yaparken ilk konumuna göre bazı yer değiştirme miktarları (m) verilmiştir.

Örneğin Dünya'da belirli bir yükseklikten serbest düşme hareketine başlayan bir cismin 2 saniye sonunda ilk konumuna göre yer değiştirme miktarı (m), yaklaşık olarak $x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 2^2 = 19,6 m$ bulunur.

Tablo 2

Dünya		Ay		Mars	
t (sn.)	x (m)	t (sn.)	x (m)	t (sn.)	x (m)
2	19,6	2		2	
1,3		1,3		1,3	
1,25		1,25		1,25	

Grup içinde her bir kişinin birer gök cismini seçmesi koşuluyla gök cisimlerini paylaşarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Hesap makinesi yardımıyla Tablo 2'yi örnekteki gibi tamamlayınız.
2. Tablo 2'de elde edilen yer değiştirme miktarlarını ifade etmek için hangi sayı kümelerine ve sayıların farklı temsillerine ihtiyaç duyulduğunu gerekçeleriyle açıklayınız.
3. "Mars'ta belirli bir yükseklikten serbest düşme hareketine başlayan bir cisim, kaç saniye sonra ilk konumuna göre 74 m yer değiştirir?" sorusunu cevaplamak için hangi sayı kümelerinin elemanlarına ihtiyaç vardır?

Sayı Kümelerinin Sıralı Olması ve Herhangi İki Sayı Arasındaki Sayıları Belirleme

Sayı kümelerinin sıralı olması, o kümedeki elemanların birbirleriyle karşılaştırılabilir ve bir düzen içinde sıralanabilir olması anlamına gelir.

ÖRNEK

" $a, b \in \mathbb{Q}$, $b < a$ olmak üzere a ve b nin toplamının yarısı b den büyük, a dan küçüktür." önermesinin doğru olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.

Çözüm

Önerme: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $b < a$ ise $b < \frac{a+b}{2} < a$ olur.

Hipotez: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $b < a$ olsun.

Hüküm: $b < \frac{a+b}{2} < a$ olur.

İspatın adımları aşağıdaki gibidir.

1. adım: Ortalama alınır.

a ve b nin aritmetik ortalaması $\frac{a+b}{2}$ olur.

2. adım: Eşitsizliğin iki tarafı b ile toplanarak b nin ortalamadan küçük olduğu gösterilir.

$$b < a \Rightarrow b + b < a + b \Rightarrow 2b < a + b \Rightarrow b < \frac{a+b}{2} \text{ olur.}$$

3. adım: Eşitsizliğin her iki tarafı a ile toplanarak a nin ortalamadan büyük olduğu gösterilir.

$$b < a \Rightarrow a + b < a + a \Rightarrow a + b < 2a \Rightarrow \frac{a+b}{2} < a \text{ olur.}$$

4. adım: 2 ve 3. adımlarda elde edilen eşitsizlikler yardımıyla $b < \frac{a+b}{2} < a$ elde edilerek hükme ulaşılır. Bu durumda önermenin doğru olduğu ispatlanmış olur.

Gerçek sayılarda sıralama özellikleri yardımıyla x, y, m ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$x < y$ ve $m < n$ için $x + m < y + n$ olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.

Bir sayı kümesindeki herhangi iki sayı arasında aynı sayı kümesinden başka bir sayının yer alması, o kümenin arada olma özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Örneğin bir mühendis, bir köprü veya bina tasarlarken yapının taşıyacağı maksimum ve minimum yükleri hesaplar. Arada olma özelliği sayesinde bu iki yük arasındaki herhangi bir değerin yapıyı güvenle taşıyabileceğini bilir ve buna göre tasarım yapar.

Sayı Kümelerinin Arada Olma Özelliğini İnceleme

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Doğal sayılar ($\mathbb{N}$), tam sayılar ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve gerçek sayılar ($\mathbb{R}$) kümelerinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

Karşıt örnek sunma bir genellemenin tüm durumlar için geçerli olmadığını kanıtlamak için kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek amacıyla bu önermeye uymayan tek bir örnek bulmak yeterlidir.

Kontrol Noktası



- Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümeleri sıralı kümelerdir.
- Ardışık iki doğal sayı arasında herhangi bir doğal sayı yer almaz.
- Ardışık iki tam sayı arasında herhangi bir tam sayı yer almaz.
- $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinde arada olma özelliği yoktur.
- Herhangi iki rasyonel sayı arasında istenen sayıda rasyonel sayı bulunabilir.
- Herhangi iki gerçek sayı arasında istenen sayıda gerçek sayı bulunabilir.
- $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde arada olma özelliği vardır.

Sayı Kümelerinin Dört İşleme Göre Kapalılığı

Bir sayı kümesinde yapılan işlemler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) sonucunda elde edilen değerlerin yine o küme içinde kalması, algoritmalar ve formüllerin geliştirilmesi sırasında tutarlılık ve işlevsellik sağlar. Bu durum, sayı kümeleriyle ilgili işlemlerin yapısal özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir role sahip olup çeşitli matematiksel yapıların temelini oluşturmaktadır.

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu küme o işleme göre kapalıdır.

ÖRNEK

İrrasyonel sayılar kümesinin çarpma işlemine göre kapalı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

İrrasyonel sayılar kümesinin çarpma işlemine göre kapalı olmadığı karşıt örnek sunularak gösterilebilir.

$\sqrt{3}, \sqrt{12} \in \mathbb{Q}'$ için $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6 \notin \mathbb{Q}'$ olur. Böylece aksine örnek verme yöntemi ile doğrulama yapılmış olur.

Bu durumda bazı $a, b \in \mathbb{Q}'$ için $a \cdot b \notin \mathbb{Q}'$ olduğundan $\mathbb{Q}'$ kümesi çarpma işlemine göre kapalı değildir.

İrrasyonel sayılar kümesinin bölme işlemine göre kapalı olup olmadığını gösteriniz.

ÖRNEK

$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

A kümesinin herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. $x_1 = 2a$ ve $x_2 = 2b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a + b) \in A \text{ olur.}$$

$$x_1 - x_2 = 2a - 2b = 2(a - b) \in A \text{ olur.}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2a \cdot 2b = 4ab \in A \text{ olur.}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} \text{ olur. } \frac{x_1}{x_2} \text{ ifadesi bazı } a, b \in \mathbb{Z} \text{ için A kümesinin elemanı olmaz. Bu durum, karşıt örnek}$$

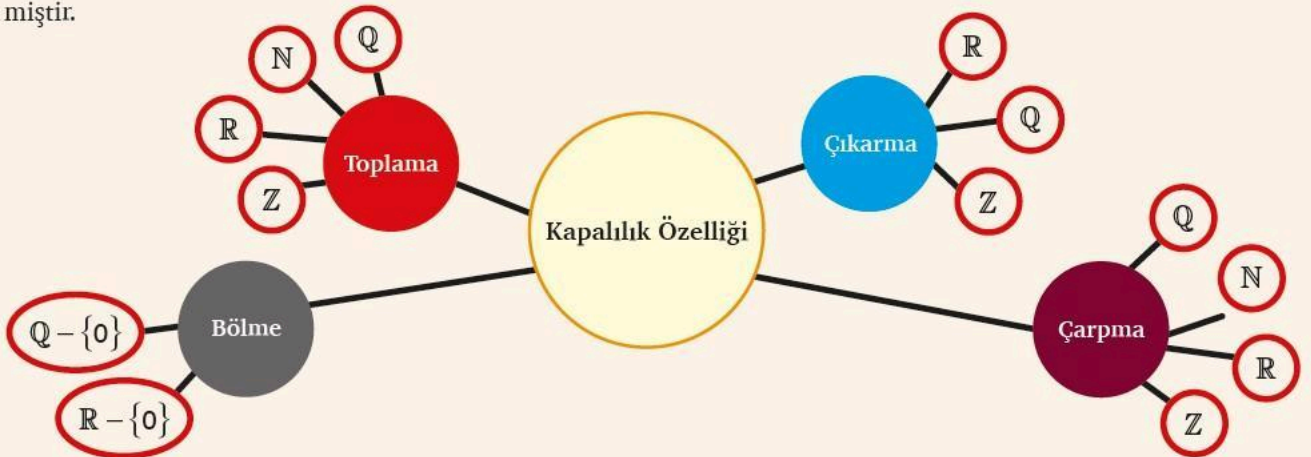
sunularak da gösterilebilir. $a = 1$ ve $b = 3$ seçilirse $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \notin A$ elde edilir.

Bu durumda A kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır; bölme işlemine göre kapalı değildir. Aksine örnek verme yöntemi hipotezin doğru olmadığını gösterirken matematiksel olarak kolaylık sağlamaktadır.

Kontrol Noktası



Aşağıdaki bilgi görselinde $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} - \{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} - \{0\}$ kümelerinin hangi işlemlere göre kapalı olduğu verilmiştir.



BÖLÜM IV**Ölçme ve Değerlendirme**

1. Bir yüzme yarışmasında farklı yaş gruplarında en hızlı yüzen üç yüzücünün kronometre ile elde edilen yarışı tamamlama süreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yaş Aralığı	Yüzücüler	Yarışı Tamamlama Süreleri (sn.)
18-25	Barış	57,32
	Ayşe	57,38
	Azra	57,67
26-35	Batuhan	58,15
	Elif	58,59
	Özlem	58,02
36-45	Uğur	57,88
	Engin	59,75
	Esra	59,43

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) 18-25 yaş aralığındaki yüzücülerden birinci olanı belirlemek için gerçek sayılarda sıralamanın özelliklerinden hangisinin kullanılabileceğini bulunuz.
- b) 18-25 yaş aralığındaki yüzücülerin her biri yarışı ikişer saniye geç tamamlasaydı sıralama değişir miydi? Bu durum gerçek sayılarda sıralamanın hangi özelliği ile açıklanabilir?
- c) 26-35 yaş aralığındaki yüzücülerin dereceleri arasında sadece saniyeler dikkate alınsaydı sıralamanın nasıl değişeceğini açıklayınız.
- ç) 36-45 yaş aralığındaki yüzücülerin dereceleri yardımıyla " $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ " özelliğini doğrulayınız. Doğrulama sırasında 1, 2 ve 3. olan sporcuların derecelerinin cebirsel temsillerinin yapılıp yapılamayacağını açıklayınız.
2. Herhangi iki farklı irrasyonel sayının arasında yer alan beş tane irrasyonel sayı bulunuz. Bulduğunuz sayıların arasında başka irrasyonel sayılar olup olmadığını inceleyiniz.
3. $A = \{x \mid x = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.