Логарифми та їхні властивості. Основна логарифмічна тотожність

Логарифм

Логарифмом додатного числа b за основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого треба піднести число a, щоб одержати число b.

Наприклад, $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, оскільки $2^{-2} = \frac{1}{4}$

Десятковими логарифмами називають логарифми за основою 10, їх позначають lg.
Наприклад, $\lg 100 = 2$, $\lg 0{,}0001 = -4$

Натуральними логарифмами називають логарифми за основою e (число e — ірраціональне, $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$), їх позначають ln.
Наприклад, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$

Основна логарифмічна тотожність

Рівність $a^{\log_a b} = b$, справедлива при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, називається **основною логарифмічною тотожністю**. Наприклад, $2^{\log_2 5} = 5$, $2^{-\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Основні властивості логарифмів

Для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$ і будь-яких додатних x та y виконуються рівності:

1. $\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$\log_{11} 11 = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 (18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
5. $\log_a x^p = p \log_a x$, $(p \in R)$	$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$, $(p \in R)$	$\log_{125} 5 = \log_{5^3} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $(b > 0,\ b \neq 1)$	$\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2$

Дію знаходження логарифма числа (виразу) називають **логарифмуванням**.

$$\lg y = \lg \frac{a^2 b^2}{c^3} = \lg(a^2 b^2) - \lg c^3 = \lg a^2 + \lg b^2 - \lg c^3 = 2\lg a + 2\lg b - 3\lg c$$

Потенціювання — знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

$$\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c; \quad \lg x = \lg(5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4; \quad \lg x = \lg\sqrt{5a} - \lg b^3 + \lg c^4;$$

$$\lg x = \lg\left(\sqrt{5a} \cdot c^4\right) - \lg b^3; \quad \lg x = \lg \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}; \quad x = \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}$$