Programme de révision
MATHÉMATIQUES

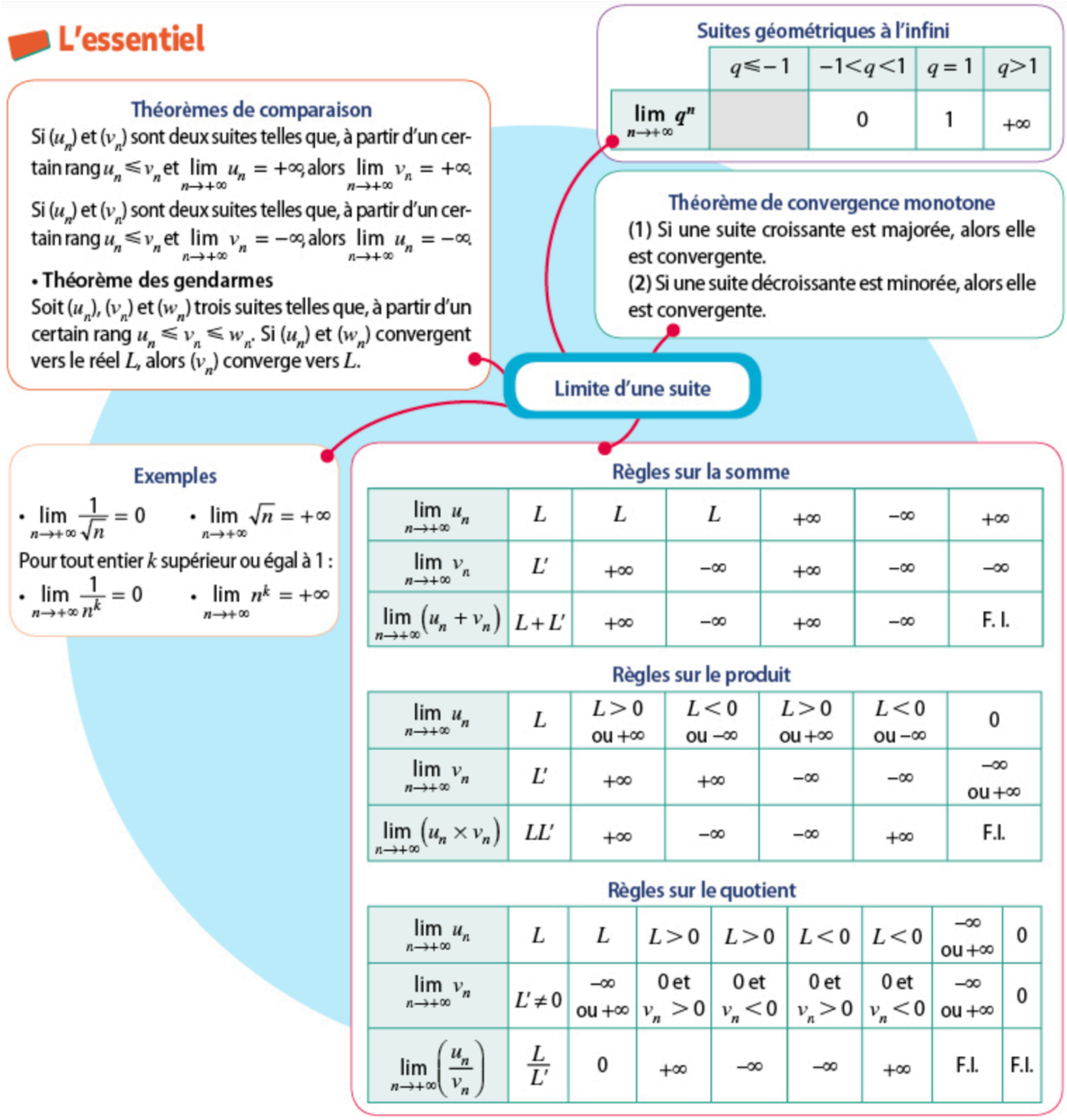
Ça y est, il reste 20 jours avant les épreuves et 4 grands thèmes à réviser ! Je vous conseille de commencer par celui qui vous a donné le plus de mal pour éventuellement y revenir par la suite.

Le programme
Chapitre 01 Suites numériques et récurrence **pdf** ou **docx**
Chapitre 02 Limites de suites **pdf** ou **docx**
Chapitre 03 Limites de fonctions **pdf** ou **docx**
Chapitre 04 Dérivation, convexité et continuité **pdf** ou **docx**
Chapitre 05 Fonctions trigonométriques **pdf** ou **docx**
Chapitre 06 Logarithme népérien **pdf** ou **docx**
Chapitre 07 Équations différentielles **pdf** ou **docx**
Chapitre 08 Calcul intégral **pdf** ou **docx**
Chapitre 09 Combinatoire et dénombrement **pdf** ou **docx**
Chapitre 10 Vecteurs, droites et plans de l'espace **pdf** ou **docx**
Chapitre 11 Orthogonalité et distance dans l'espace **pdf** ou **docx**
Chapitre 12 Représentations paramétriques et équations cartésiennes (voir chapitre 10)
Chapitre 13 Lois binomiale **pdf** ou **docx**
Chapitre 14 Lois des grands nombres **pdf** ou **docx**

Notation des exercices
* pas dur (sujet bateau en fait, à savoir faire absolument)
** dur (mais il vaut mieux savoir le faire, certaines questions sont incontournables)
*** Très dur (si vous y arrivez, rien ne vous surprendra)

Remarques
- Dans les sujets proposées, logarithme et convexité sont souvent couplés.
- **Suites et probabilités** sont souvent couplés (bien maîtriser l'usage du logarithme pour le calcul du seuil).
- Il faut impérativement faire un sujet sur les suites et sur les probabilités avec une **partie algorithmique**.
- Les sujets qui proposent la plus digressions par rapport aux attendus est la partie sur les fonctions et sur les suites (c'est dans ces domaines que l'on trouve les exercices les plus difficiles).
- Les exercices les plus proches de l'application du cours concernent la loi binomiale et la géométrie dans l'espace.
- J'ai opté pour une révision par thèmes mais on peut tout-à-fait s'entraîner en temps limité par sujet (4h) ou par exercice (1h). Les sujet 0, 1, 2 et les sujets Asie ainsi que certains de métropoles sont plus exigeants. Ceux de Polynésie sont en général plus accessibles.
- N'hésitez pas à travailler de plusieurs manières les sujets (en temps limité, sans aide, avec aide mais en allant au bout de la compréhension,…)
- Si vous bloquez sur la compréhension d'une question ou d'une réponse, n'hésitez pas à me poser des questions.
- Bonnes révisions !

Chapitre 01 et 02 Suites, récurrence et limites



L'essentiel

Suites géométriques à l'infini

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

Théorèmes de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

- **Théorème des gendarmes**

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers le réel L, alors (v_n) converge vers L.

Théorème de convergence monotone

(1) Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.

(2) Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

Limite d'une suite

Exemples

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1 :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$

Règles sur la somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

Règles sur le produit

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Règles sur le quotient

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Sujets à faire

Exercice	Sujet	Date	Lieu	Difficulté	Énoncé du sujet	Corrigé	Compétences visées
2		2 juin 2021	Polynésie	*	pdf	pdf	Suite récurrente, étude de fonctions, TVI
1	2	14 mars 2023	Polynésie	*	pdf	pdf	Probabilités, suite récurrente
4	1	13 mars 2023	Polynésie	**	pdf	pdf	Suite récurrente
2	1	mai 2021	Amérique du Nord	**	pdf	pdf	Suite récurrente, seuil
3	2	22 mai 2024	Amérique du Nord	**	pdf	pdf	Étude de fonction, suite récurrente et seuil
2	2	15 mars 2021		***	pdf	pdf	Suites récurrentes croisées
3	2 dévoilé	20 juin 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Suite récurrente à paramètre

L'essentiel

Limites d'une fonction

Limites

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$;

si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

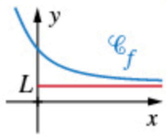
Si n impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$; si n pair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} k = \lim\limits_{x \to +\infty} k = k$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

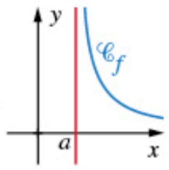
Asymptotes

a et *L* sont des réels.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ alors asymptote horizontale d'équation $y = L$.



- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors asymptote verticale d'équation $x = a$.



Croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Théorèmes de comparaison

Le réel a peut être remplacé par $-\infty$ ou $+\infty$; $L \in \mathbb{R}$

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$
- Théorème des gendarmes

Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Formes indéterminées

« $\infty - \infty$ » ; « $\infty \times 0$ » ;

« $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ »

Fonction composée u suivie de v

$v \circ u$ telle que $v \circ u(x) = v(u(x))$

Dérivée de $v \circ u$

- $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(u^n)' = n\,u'u^{n-1}$ (où $n \in \mathbb{Z}^*$)
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

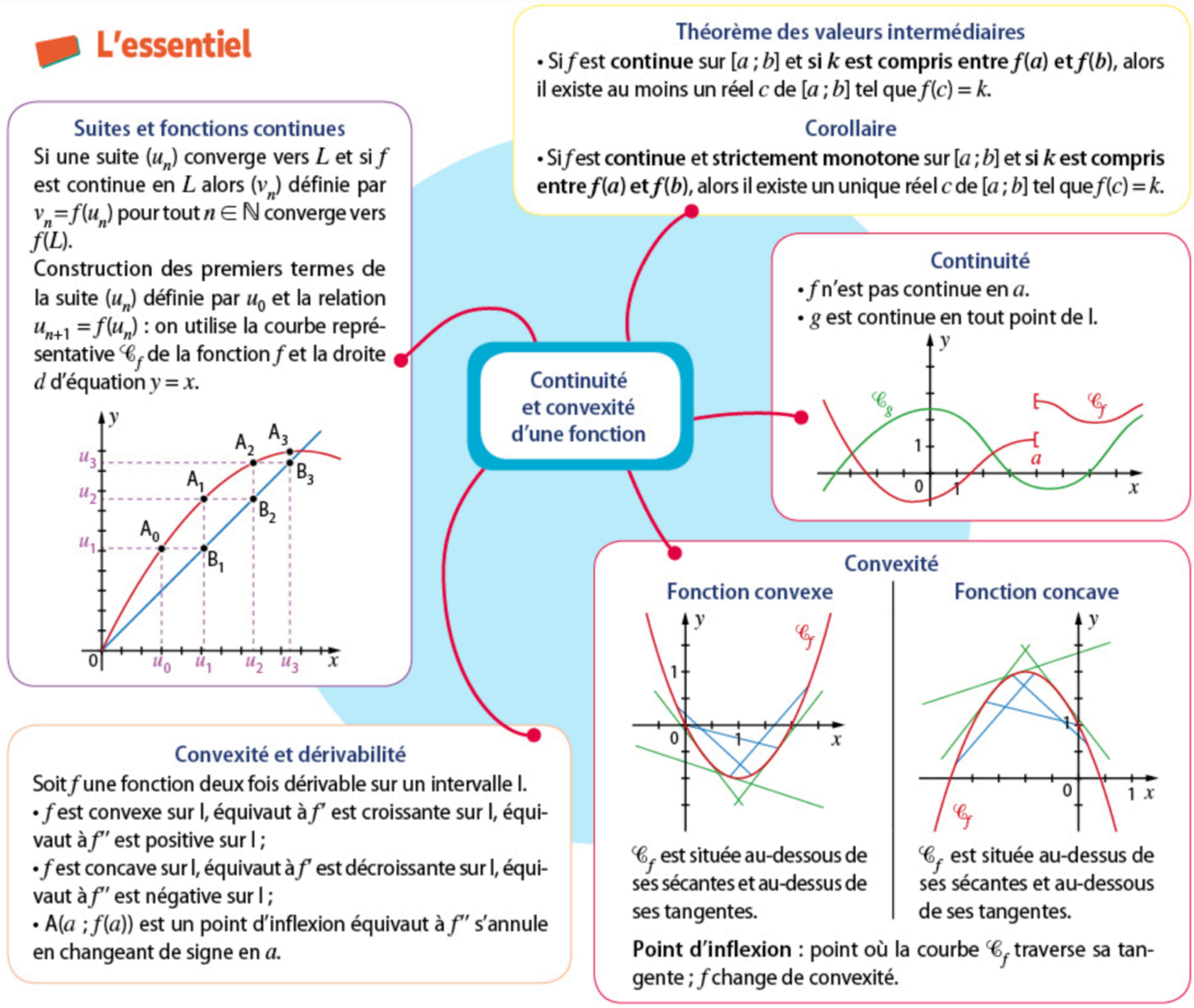
Exemple de calcul d'une limite

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

Sujets à faire

Exercice	Sujet	Date	Lieu	Difficulté	Énoncé du sujet	Corrigé	Compétences visées
B		2 juin 2021	Polynésie	*	pdf	pdf	Logarithme
B	1	15 mars 2021		*	pdf	pdf	Logarithme, convexité
2	1	15 mars 2021		*	pdf	pdf	Exponentielle, asymptote, tangente
3	1	13 septembre 2021	Métropole	*	pdf	pdf	Exponentielle, probabilités
2	2	14 mars 2023	Centres étrangers	*	pdf	pdf	Logarithme, TVI, suites
1	1	21 mars 2023	Centres étrangers	**	pdf	pdf	Logarithme, TVI
3	1	21 mai 2024	Amérique du Nord	**	pdf	pdf	Logarithme, TVI
2	1	15 mars 2021		**	pdf	pdf	Exponentielle, tangente
3	2	13 septembre 2021	Métropole	**	pdf	pdf	Exponentielle, courbe, racine, tangente
B	2	15 mars 2021		**	pdf	pdf	Logarithme, TVI, primitive
A	2	15 mars 2021		***	pdf	pdf	Exponentielle
B	1	mai 2021	Amérique du Nord	***	pdf	pdf	Logarithme à paramètre, convexité
3	2	20 juin 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Logarithme, TVI, distance

4	2 dévoilé	20 juin 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Exponentielle, convexité, intégration



L'essentiel

Continuité et convexité d'une fonction

Suites et fonctions continues

Si une suite (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $f(L)$.

Construction des premiers termes de la suite (u_n) définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$: on utilise la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d d'équation $y = x$.

Théorème des valeurs intermédiaires

- Si f est **continue** sur $[a\,;b]$ et **si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$**, alors il existe au moins un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire

- Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a\,;b]$ et **si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$**, alors il existe un unique réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Continuité

- f n'est pas continue en a.
- g est continue en tout point de I.

Convexité

Fonction convexe

$\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.

Fonction concave

$\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de ses sécantes et au-dessous de ses tangentes.

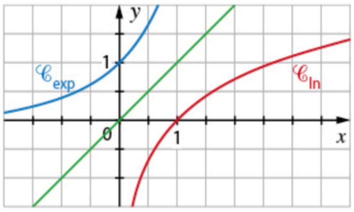
Point d'inflexion : point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente ; f change de convexité.

Convexité et dérivabilité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I, équivaut à f' est croissante sur I, équivaut à f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I, équivaut à f' est décroissante sur I, équivaut à f'' est négative sur I ;
- $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion équivaut à f'' s'annule en changeant de signe en a.

L'essentiel

Courbe représentative



- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de ln.

Lien avec la fonction exponentielle

- Pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$, ce qui s'écrit $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ce qui s'écrit $e^{\ln(x)} = x$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ et pour tout entier n, $\ln(e^n) = n$.

Relation fonctionnelle Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Logarithme népérien

- **La fonction logarithme népérien** que l'on note **ln** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
  Pour $x > 0$, $y = \ln(x)$ équivaut à $e^y = x$.
- La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

Variations et conséquences

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b)$ équivaut à $a = b$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a) < \ln(b)$ équivaut à $a < b$.
- $0 < x < 1$ équivaut à $\ln(x) < 0$.
- $x > 1$ équivaut à $\ln(x) > 0$.

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$

Croissances comparées

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln(x) = 0$

Pour tout entier n strictement positif

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$

Fonction dérivée

- Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.

Pour tout réel x de I, on a $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Chapitre 07, 08 et 09 Équations différentielles. Primitives et intégrales.

L'essentiel

Primitives d'une fonction

Si F est une primitive de f sur I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Primitive d'une fonction f sur I : fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitive F
$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\,;0\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$

Primitives des fonctions composées

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'u^n$ où $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u}$ $(u>0)$	$\ln(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $(u>0)$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Équations différentielles

- L'équation $y' = f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où F est une primitive de f et C une constante.
- L'équation $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.
- L'équation $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + f_0(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et f_0 est la solution constante de cette équation.
- L'équation (E) $y' = ay + f$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + p(x)$, où $k \in \mathbb{R}$ et p est une solution particulière de (E).

L'essentiel

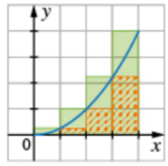
Calcul intégral

Théorème fondamental

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
La fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Méthode des rectangles

f continue et positive sur $[a\,;b]$.
$\int_a^b f(x)\,dx$ peut être encadrée par la somme des aires des rectangles hachurés en rouge et colorés en vert.



Méthodes de calcul

- **À l'aide d'une primitive**

f fonction continue sur $[a\,;b]$ et F primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

- **Intégration par parties**

u et v dérivables sur I, u' et v' continues sur I.
a et b sont deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Propriétés de l'intégrale

f et g continues sur $[a\,;b]$, $c\in[a\,;b]$, $k\in\mathbb{R}$.

- **Linéarité**

$$\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx \text{ et}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

- **Positivité :** Si $f(x)\geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$.
- **Comparaison :** Si $f(x)\geqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$.

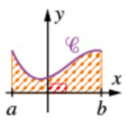
Valeur moyenne d'une fonction f sur $[a\,;b]$

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Calcul d'aires

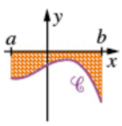
- **f continue et positive sur $[a\,;b]$**

$\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



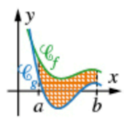
- **f continue et négative sur $[a\,;b]$**

L'aire, en u.a., de la surface hachurée est l'opposé de $\int_a^b f(x)\,dx$.



- **Aire entre deux courbes**

$\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$, $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée.



Sujets à faire

Exercice	Sujet	Date	Lieu	Difficulté	Énoncé du sujet	Corrigé	Compétences visées
A		2 juin 2021	Polynésie	*	pdf	pdf	Équations différentielles, exponentielle, convexité
2		19 juin 2014	Antilles Guyane	*	pdf	pdf	Exponentielle, TVI, calcul intégral
3	1	5 juin 2024	Centres étrangers	*	pdf	pdf	Équations différentielles
2	2	20 juin 2024	Métropole	*	pdf	pdf	Suites, équations différentielles
1	1	21 novembre 2024	Amérique du Sud	*	pdf	pdf	Équations différentielles, TVI
1	0	2024		**	pdf	pdf	Équations différentielles, exponentielle
2	1	11 septembre 2024	Métropole	**	pdf	pdf	Intégration, TVI
3	2	12 septembre 2024	Métropole	**	pdf	pdf	Équations différentielles, convexité
4	2	22 mai 2025	Amérique du Nord	**	pdf	pdf	Calcul intégral
2	0	2024		***	pdf	pdf	Intégrale à paramètre, IPP, comparaison
4		10 juin 2010	Polynésie	***	pdf	pdf	Suites, logarithmes, intégration par parties
4		novembre 2010	Amérique du Sud	***	pdf	pdf	Calcul intégral
4		septembre 2011	Polynésie	***	pdf	pdf	Calcul intégral
4	1	21 mai 2024	Amérique du Nord	***	pdf	pdf	Intégration, fonctions trigonométriques

3	1 Secours	19 juin 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Étude de fonctions, suites, intégrale

Chapitre 10 et 11 Espace

L'essentiel

Colinéarité

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$

Coplanarité

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$.

Base de l'espace

• Triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

• Coordonnées de $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ dans cette base : $(x\,;y\,;z)$.

Repère de l'espace

• Quadruplet $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Vecteurs de l'espace

Caractérisation vectorielle d'un plan

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de la direction d'un plan $\mathcal{P}$, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$, avec x et y réels quelconque, est un plan passant par A.

Représentation paramétrique

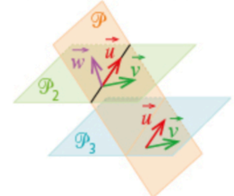
Droite passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur

$$\vec{u}(a\,;b\,;c) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Plans de l'espace

• $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon la droite d ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires).

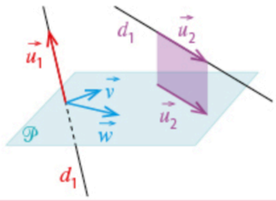
• $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont parallèles : $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}_3$.



Droites de l'espace

• d_1 et $\mathcal{P}$ sont sécants en M ($\vec{u_1}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires).

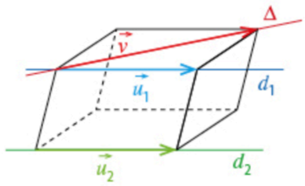
• d_2 est parallèle à $\mathcal{P}$ ($\vec{u_2}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires).



• d_1 et d_2 sont parallèles ($\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires).

• d_1 et Δ sont sécantes ($\vec{u_1}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

• d_2 et Δ ne sont pas coplanaires ($\vec{u_2}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

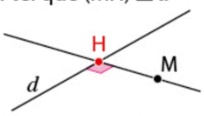


L'essentiel

Projeté orthogonal

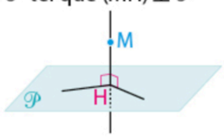
• **Projeté orthogonal de M sur une droite d**

Point H de d tel que (MH) ⊥ d



• **Projeté orthogonal de M sur un plan $\mathcal{P}$**

Point H de $\mathcal{P}$ tel que (MH) ⊥ $\mathcal{P}$



Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et k est un réel, alors :

(1) Bilinéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

(2) Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

(3) Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=\|\vec{u}\|^2$.

(4) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

(5) Dans un repère orthonormé :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ avec $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

Orthogonalité dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

• Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;

• sinon $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

Vecteur normal et équation de plan

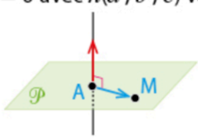
$\mathcal{P}$ plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$ équivaut à $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

• $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

• Dans un repère orthonormé, équation d'un plan $\mathcal{P}$:

$ax+by+cz+d=0$ avec $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.



Orthogonalité de droites et de plans

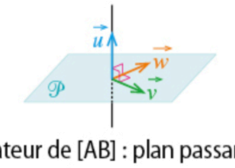
d et d' droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

$\mathcal{P}$ plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

(1) $d \perp d'$ équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$

(2) $d \perp \mathcal{P}$ équivaut à $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \end{cases}$ équivaut à :

$\vec{u}\cdot\vec{t}=0$ pour tout vecteur $\vec{t}$ de la direction de $\mathcal{P}$.



(3) Plan médiateur de [AB] : plan passant par le milieu de [AB] et orthogonal à (AB).

Sujets à faire

Exercice	Sujet	Date	Lieu	Difficulté	Énoncé du sujet	Corrigé	Compétences visées
3		2 juin 2021	Polynésie	*	pdf	pdf	Droites, plans, orthogonalité, aire, volume
3	2	mars 2021		*	pdf	pdf	Droites, plans, orthogonalité, aire, volume
3		mai 2021	Amérique du Nord	*	pdf	pdf	Droites, plans, orthogonalité, parallélisme
2	1	7 juin 2021	Asie	**	pdf	pdf	Droites, plans, orthogonalité
A	1	7 juin 2021	Métropole	***	pdf	pdf	Droites, plans, orthogonalité, distance, aire, volume
4		5 septembre 2024	Polynésie	***	pdf	pdf	Droites, orthogonalité, produit scalaire et angle
1	1	11 septembre 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Un des plus complets que j'ai vu…

L'essentiel

Modèle de la succession d'épreuves indépendantes

La probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i, pour i entier allant de 1 à n.

La succession de deux épreuves indépendantes d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 a pour univers $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Loi binomiale de paramètres n et p

Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves.

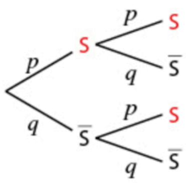
- La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathcal{B}(n,p)$.
- Pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1-p$.

Loi binomiale

Schéma de Bernoulli

Succession de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, identiques et indépendantes.

- L'univers des issues d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\{0,1\}^n$.
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre associé à un schéma de Bernoulli.



Épreuve de Bernoulli de paramètre p

Expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une, nommée « succès », a pour probabilité p et l'autre, nommée « échec » a pour probabilité $1-p$.

- La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.
- La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

$E(X)=p$, $\quad V(X)=p(1-p)\quad$ et $\quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$.

L'essentiel

Variables aléatoires indépendantes

- Deux variables aléatoires sont dites indépendantes quand elles sont associées à des épreuves indépendantes.
- Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, quelles que soient les valeurs x_i et y_j :
$P(X=x_i \text{ et } Y=y_j) = P(X=x_i) \times P(Y=y_j)$
où X prend les valeurs x_i et Y les valeurs y_j.

Opérations sur les variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires. On définit :
– la variable aléatoire aX, produit de X par un réel a ;
– la variable aléatoire $X+Y$, somme des variables X et Y.

Propriétés

- $E(aX) = a\,E(X)$ • $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- $V(aX) = a^2\,V(X)$ • $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$
- Si les variables X et Y sont indépendantes :
$V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

- **Inégalité de concentration**

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.
Pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$.

- **Loi faible des grands nombres**

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable X.
Pour tout réel $\delta > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0$.

Échantillon d'une loi de probabilité

- Un **échantillon de taille** n de la loi de la variable aléatoire X est une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.
- La **variable aléatoire somme** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :
$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
$E(S_n) = n\,E(X) \quad V(S_n) = n\,V(X) \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\;\sigma(X)$
- La **variable aléatoire moyenne** est la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n} S_n$.
$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \dfrac{1}{n}V(X) \quad \sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$
- **Loi binomiale** de paramètres n et p : c'est la variable somme de n variables aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

Espérance : np
Variance : $np(1-p)$ Écart-type : $\sqrt{np(1-p)}$

Sujets à faire

Exercice	Sujet	Date	Lieu	Difficulté	Énoncé du sujet	Corrigé	Compétences visées
2		2 juin 2021	Polynésie	*	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale
1		mai 2021	Amérique du Nord	*	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale
1	1	mars 2021		*	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale
2	2	8 juin 2021	Métropole	*	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale
2	1	19 juin 2024	Métropole	*	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale, Tchebychev
4	1	11 septembre 2024	Métropole	**	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale, Tchebychev
1	1	21 mai 2025	Amérique du Nord	**	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale, Tchebychev
1	0	2024		***	pdf	pdf	Somme de variables aléatoires
1	2	20 juin 2024	Métropole	***	pdf	pdf	Probabilités conditionnelles, loi binomiale, Tchebychev ⚠ Question utilisant la formule des probabilités totales atypique