

MINES-PONTS 99 - PSI - 2ème épreuve

Première partie

1) La propriété demandée est trivialement vérifiée pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$. Si $w^{(n)}(x) = P_n(x)w(x)$ où P_n est un polynôme de degré n , on obtient par dérivation $w^{(n+1)}(x) = P_n'(x)w(x) - 2xP_n(x)w(x) = P_{n+1}(x)w(x)$ où P_{n+1} est un polynôme vérifiant $\deg(P_{n+1}) = 1 + \deg(P_n)$ ce qui prouve le résultat pour tout n par récurrence.

Les théorèmes de croissance comparée des fonctions polynômes et exponentielles prouvent alors que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p w^{(q)}(x) = 0$, donc que w est une fonction de $\mathcal{S}$.

2) a. Si f est dans $\mathcal{S}$, f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p f^{(q+1)}(x) = 0$.

2) b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, P_f l'est aussi et c'est une fonction de $\mathcal{S}$ car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p (P_f)^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{r=0}^q C_q^r x^p P^{(r)}(x) f^{(q-r)}(x) = 0.$$

2) c. Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f.g$ l'est aussi et c'est une fonction de $\mathcal{S}$ car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p (f.g)^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{r=0}^q C_q^r x^p f^{(r)}(x) g^{(q-r)}(x) = 0.$$

2) d. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 f(x) = 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) e. Si f est dans $\mathcal{S}$, $\bar{f}$ aussi et $\bar{f}f$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) a. Il est immédiat que w_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et comme la dérivation commute à la translation, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p w_{k(q)}^{(q)}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^p w^{(q)}(x - k) = 0$. Donc w_k est dans $\mathcal{S}$ pour tout entier naturel k .

3) b. Supposons l'existence de scalaires $a_0, \dots, a_n$ tels que $\sum_{k=0}^n a_k w_k = 0$. En particulier,

$$\sum_{k=0}^n a_k w_k(j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{k=0}^n a_k e^{-(j-k)^2} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{ou encore}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k e^{-k^2} e^{-2kj} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{Ceci s'interprète comme un système d'inconnues } a_0, a_1 e^{-1}, \dots, a_n e^{-n^2}$$

dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde associé aux scalaires deux à deux distincts $1, e^{-2}, \dots, e^{-2n}$. Il en résulte que $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, donc que la famille $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre. Par suite, l'espace vectoriel

$\mathcal{S}$ est de dimension infinie.

4) a. $H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$

4) b. w satisfait l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$, d'où $w^{(n+1)} = -2(xw^{(n)} + nw^{(n-1)})$ et $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \quad (\mathbf{R}).$

4) c. Supposons que le terme de plus haut degré de H_n soit $2^n x^n$ (ce qui est vrai pour $n = 0$). Il résulte de $(\mathbf{R})$ que celui de H_{n+1} est $2^{n+1} x^{n+1}$ d'où le résultat par récurrence.

4) d. En dérivant $(\mathbf{I})$, on obtient $w^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x)w(x) = (-1)^n (H'_n(x)w(x) - 2xH_n(x)w(x))$ d'où $H_{n+1} = -H'_n + 2xH_n \quad (\mathbf{S}).$

On en déduit

$$H'_n = 2nH_{n-1}.$$

5) a. $H_n(x) = 2^n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$

D'après le théorème de Rolle (puisque une fonction polynôme est dérivable), le polynôme H'_n s'annule au moins une fois sur tout intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, $1 \leq k \leq n-1$. Comme H'_n ne peut avoir plus de $n-1$ racines, il existe une racine unique β_k dans chacun des intervalles $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, $1 \leq k \leq n-1$. D'où $H'_n(x) = n2^n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_{n-1}).$

En utilisant (R), $H_{n+1}(\alpha_k) = -n2^n(\alpha_k - \beta_1) \dots (\alpha_k - \beta_{n-1})$. Tous les facteurs de $H_{n+1}(\alpha_k)$ étant négatifs, $H_{n+1}(\alpha_k)$ est du signe de $(-1)^n$ et plus généralement, celui de $H_{n+1}(\alpha_k)$ est $(-1)^{n-k+1}$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors (puisque une fonction polynôme est continue) l'existence de $n-1$ racines g_k vérifiant $\alpha_k < g_k < \alpha_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

$H_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. On peut donc trouver un réel α_0 tel que $H_{n+1}(\alpha_0) > 0$ et $H_{n+1}(\alpha_1) < 0$ soient de signe contraire, et le théorème des valeurs intermédiaires sur $[\alpha_0, \alpha_1]$ donne l'existence d'une racine supplémentaire $g_0 < \alpha_1$. De même, $H_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, tandis que $H_{n+1}(\alpha_n) < 0$; on prouve donc de manière analogue l'existence d'une racine $g_n > \alpha_n$. Au total, on a donc trouvé au moins $n+1$ racines réelles pour H_{n+1} et comme le degré de ce polynôme est égal à $n+1$, il ne peut en exister d'autres.

5) b. Le résultat demandé est prouvé par récurrence: il est évidemment satisfait au rang 1 car $H_1(x) = 2x$ et l'hérédité de la propriété a été démontrée dans **a**. On a montré de plus que les n racines de H_n sont intercalées entre les $n+1$ racines de H_{n+1} .

Seconde partie

1) a. $xa f(x)e^{-i\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de même module que f . Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$ car $(x, \lambda)af(x)e^{-i\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et cette fonction est de même module que — donc majorée par — la fonction intégrable $f(x)$. Enfin, elle est bornée et, plus précisément, $|\mathcal{F}(f)(\lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$.

1) b. La fonction $(x, \lambda)af(x)e^{-i\lambda x}$ admet une dérivée partielle par rapport à λ qui s'écrit $(x, \lambda)a - ixf(x)e^{-i\lambda x}$. Comme $xa - ixf(x)$ est, d'après **1) a.**, une fonction de $\mathcal{S}$, cette dérivée partielle est elle aussi majorée indépendamment de λ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(f)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\mathcal{F}(f)' = -i \mathcal{F}[xf(x)]$. Plus généralement, $xax^p f(x)$ est, d'après **1) a.**, une fonction de $\mathcal{S}$ pour tout p ; on peut donc itérer le raisonnement et en déduire que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^n pour tout n donc de classe C^∞ et vérifie $\mathcal{F}(f)^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}[x^n f(x)]$.

1) c. Par intégration par parties,

$$\mathcal{F}(f')(\lambda) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int f'(x)e^{-i\lambda x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[f(x)e^{-i\lambda x} \right]_{-a}^a + \lim_{a \rightarrow +\infty} i\lambda \int f(x)e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \mathcal{F}(f)(\lambda).$$

Comme, d'après **1) a.**, toutes les dérivées d'une fonction de $\mathcal{S}$ y sont aussi, on peut itérer le raisonnement et en déduire que

$$\mathcal{F}(f^{(q)})(\lambda) = (i\lambda)^q \mathcal{F}(f)(\lambda).$$

1) d. $g(\lambda) = \lambda^p \frac{d^q}{d\lambda^q} \mathcal{F}(f)(\lambda) = (-i)^q \lambda^p \mathcal{F}[x^q f(x)] = (-i)^q (-i)^p \mathcal{F}\left[\frac{d^p}{dx^p}(x^q f(x))\right];$

d'où $h = (-i)^{p+q} \frac{d^p}{dx^p}(x^q f(x))$ qui est bien une fonction de $\mathcal{S}$ d'après **1) a.** et **b.**

On sait déjà que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}$ est indéfiniment dérivable. Si on montre qu'elle tend vers 0 en $\pm\infty$, on déduira de ce qui précède que g tend vers 0 en $\pm\infty$ pour tout p et tout q donc que $\mathcal{F}(f)$ est dans $\mathcal{S}$. Or, pour toute fonction f de $\mathcal{S}$, et pour $\lambda \neq 0$, $\mathcal{F}(f)(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \mathcal{F}(f')(\lambda)$. Comme $\mathcal{F}(f')$ est bornée d'après **1) a.**, le résultat cherché en résulte.

Enfin, la linéarité de l'intégrale implique la linéarité de $\mathcal{F}$ qui est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

2) $(j_p | j_q) = \int_{\mathbb{R}} H_p(x) H_q(x) e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} H_p(x) w^{(q)}(x) dx$. Intégrons p fois par parties (en dérivant successivement H_p). Les termes intégrés contiennent le produit d'un polynôme par une dérivée de w et tendent donc vers 0 lorsque a tend vers $\pm \infty$. On obtient $(j_p | j_q) = (-1)^{p+q} \int_{\mathbb{R}} 2^p p! w^{(q-p)}(x) dx = \dots$

3) a. La fonction $j_0: xae^{-x^2/2}$ vérifie l'équation différentielle $y' + xy = 0(F)$.

j_0 est indéfiniment dérivable et ses dérivées sont le produit d'un polynôme et de j_0 . Comme la fonction w de la première partie, j_0 est donc une fonction de $\mathcal{S}$, et admet par conséquent une transformée de Fourier $j_0^\wedge$ qui est aussi dans $\mathcal{S}$ d'après 1) d..

Appliquons l'endomorphisme $\mathcal{F}$ à la relation $j_0'(x) + xj_0(x) = 0$. En utilisant 1) b. et c., il vient $i\lambda j_0^\wedge(\lambda) - \frac{1}{i} j_0^\wedge'(\lambda) = 0$. Donc $j_0^\wedge$ est aussi solution de (F).

Or $j_0(0) = 1$ et $j_0^\wedge(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \sqrt{2} dy = \sqrt{2\pi}$. Il en résulte que $j_0^\wedge = \sqrt{2\pi} j_0$.

3) b. Comme $j_n(x) = H_n(x)j_0(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k j_0(x)$, on obtient, en appliquant $\mathcal{F}$ et en utilisant 1) b.,

$j_n^\wedge(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k i^k j_{0(k)}^\wedge = \sum_{k=0}^n c_k i^k \sqrt{2\pi} j_{0(k)}$ qui est bien le produit d'un polynôme et de la fonction $j_0: xae^{-x^2/2}$ puisque c'est le cas de chacune des fonctions $j_{0(k)}^\wedge$ (même démonstration que pour la fonction w au I 1)).

3) c. De la relation de récurrence (R) prouvée en I 4) b., on déduit $j_{n+1}(x) = 2xj_n(x) - 2nj_{n-1}(x)$. D'autre part, en dérivant la relation de définition de j_n et compte tenu de I 4) d., on obtient

$$j_n'(x) = H_n'(x)e^{-x^2/2} - xj_n(x) = 2nH_{n-1}(x)e^{-x^2/2} - xj_n(x) = 2nj_{n-1}(x) - xj_n(x).$$

La combinaison de ces deux relations éliminant les termes $xj_n(x)$ donne $j_{n+1}(x) = -2j_n'(x) + 2nj_{n-1}(x)$.

3) c. On a déjà vu que $j_0^\wedge = \sqrt{2\pi} j_0$.

De l'égalité $j_1 = -2j_0'$, on déduit $j_1^\wedge(\lambda) = -2i\lambda j_0^\wedge(\lambda) = -2i\sqrt{2\pi}\lambda j_0(\lambda) = -i\sqrt{2\pi} j_1(\lambda)$.

De même, $j_2 = -2j_1' + 2j_0$ donne $j_2^\wedge(\lambda) = -2i\lambda j_1^\wedge(\lambda) + 2j_0^\wedge(\lambda) = 2\sqrt{2\pi}(1 - 2\lambda^2)j_0(\lambda) = -\sqrt{2\pi} j_2(\lambda)$.

Plus généralement, $j_{n+1} = -2j_n' + 2nj_{n-1}$ donne $j_{n+1}^\wedge(\lambda) = -2i\lambda j_n^\wedge(\lambda) + 2nj_{n-1}^\wedge(\lambda)$, d'où $Q_{n+1}(\lambda) = -2i\lambda Q_n(\lambda) + 2nQ_{n-1}(\lambda)$. En multipliant cette relation par i^{n+1} , on obtient $i^{n+1}Q_{n+1}(\lambda) = 2i^n\lambda Q_n(\lambda) - 2ni^{n-1}Q_{n-1}(\lambda)$ ce qui montre que les polynômes $i^n Q_n$ satisfont la relation de récurrence (R). Or $Q_0 = \sqrt{2\pi}H_0$ et $iQ_1 = \sqrt{2\pi}H_1$. Donc $i^n Q_n = \sqrt{2\pi}H_n$ et $j_n^\wedge = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^n} j_n$.

L'endomorphisme $\mathcal{F}$ admet donc au moins 4 valeurs propres qui sont $\pm \sqrt{2\pi}$ et $\pm i\sqrt{2\pi}$, chacune d'elles étant associée à un sous-espace propre de dimension infinie. Ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.