

EXERCICE N°1

1/ Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{1}{2}(n+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 Calculer W_0 , W_1 et W_2 . En déduire que W n'est ni arithmétique ni géométrique

2/ Soit U la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ tel que $U_1 = 1$ et $U_{20} = \frac{21}{2}$
 a- Calculer la raison r et le premier terme de cette suite
 b- Exprimer U_n en fonction de n

c- En déduire $\sum_{k=1}^{20} \frac{1+k}{2}$
 3/ On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = W_n - U_n$
 a- Montrer que V est une suite géométrique

b- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$
 c- Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$; Exprimer S_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

EXERCICE N°2

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Calculer : u_1 et u_2 ; En déduire que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 1$
 c) Montrer que u est croissante.

2/ Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$

a) Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3/a) Exprimer en fonction de n : $S = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

b) Exprimer en fonction de n : $S' = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

EXERCICE N°3

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

1/a) Calculer : u_1 et u_2 ; En déduire que la suite u n'est ni arithmétique ni géométrique

b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 3$
 c) Montrer que u est croissante.

2/ Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

a) Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°4

Soit la suite U définie par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

- 1/ Montrer par récurrence que pour tout entier n , $0 \leq U_n \leq 2$.
- 2/ Montrer que U est strictement croissante.
- 3/ Dédire que U est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N°5

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 1} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq u_n \leq \sqrt{2}$
 - b) Montrer que la suite u est croissante
 - c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite l
- 2/ on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 2$
 - a) Montrer que v est une suite géométrique
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
 - c) Retrouver la limite de la suite u

EXERCICE N°6

Soit la suite réelle u définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1/a) Montrer que la suite u est minorée par 3
 - b) Montrer que la suite u est décroissante
 - c) En déduire que la suite u est convergente

2/a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3).$$

- b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
- c) Calculer la limite de la suite u