

DIPOLE RLC LIBRE

Prof : GHOZZI RYM

A-S : 2025-2026

Exercice n°1

I- On réalise le circuit de la **figure -1** - qui comporte :

- Un générateur de tension constante $E = 4V$.
- Un condensateur de capacité C .
- Une bobine supposée idéale d'inductance L .
- Un conducteur ohmique de résistances R .
- Un interrupteur inverseur K

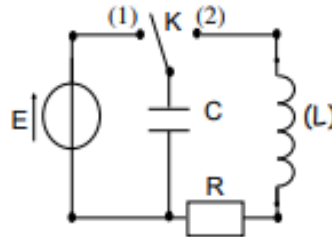


Figure-1-

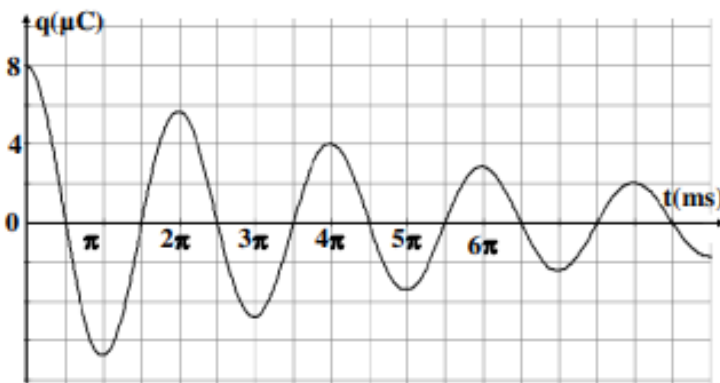
On bascule l'interrupteur K en position (1) puis à un instant pris comme origine des temps, on bascule l'interrupteur K en position (2)

1- Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps de la charge $q(t)$

du condensateur est $\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot q(t) = 0$ avec α et ω_0 des constantes qu'on exprimera en fonction de R , L et C (0,75pt)

2- Montrer que dans ce cas que l'énergie totale E_{tot} du circuit (R, L, C) décroît au cours du temps.

3- Un dispositif approprié a permis de tracer les courbes d'évolution au cours du temps de la charge $q(t)$ du condensateur.



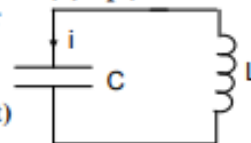
a- Déterminer la pseudo-période T des oscillations de la charge $q(t)$. (0,25pt)

b- La résistance R étant faible, on admet que la pseudo période T est égale à la période propre T_0 de l'oscillateur. Déterminer la capacité C du condensateur et déduire l'inductance L de la bobine (1pt)

c- Déterminer la perte d'énergie totale E_{tot} entre les instants $t_0 = 0s$ et $t_1 = 4\pi ms$ (0,75pt)

II- On élimine le résistor du circuit précédent, on décharge le condensateur et on refait l'expérience

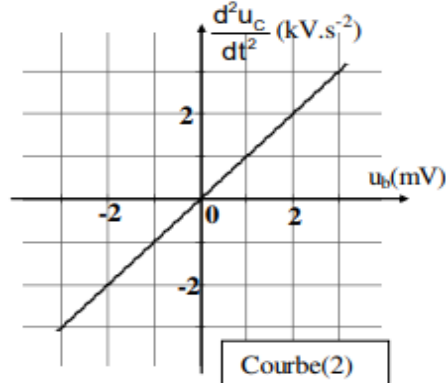
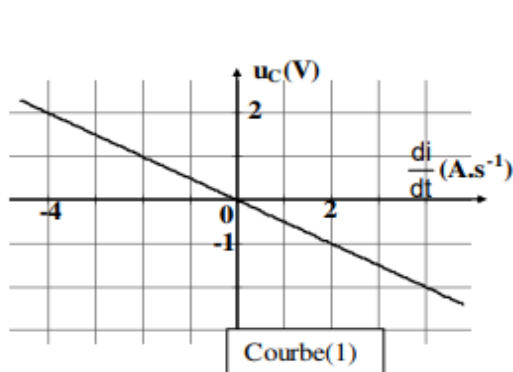
1-a- Etablir l'équation différentielle reliant la tension instantanée aux bornes du condensateur et sa dérivée seconde par rapport au temps. (0,75pt)



b- Montrer que $u_C(t) = E \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$ est une solution de l'équation différentielle pour une valeur de ω_0 qu'on exprimera en fonction de L et C . (0,75pt)

c- Montrer que l'énergie totale E_{tot} du circuit (L, C) se conserve et donner son expression en fonction de la f.é.m E et la capacité C (0,5pt+0,25pt)

2-Un dispositif approprié nous a permis de tracer les courbes de $u_C = f\left(\frac{di}{dt}\right)$ et de $\frac{d^2u_C}{dt^2} = g(u_b)$



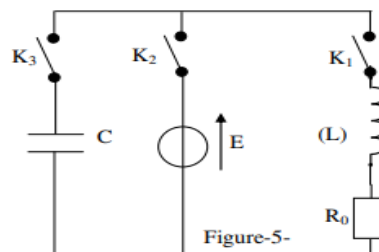
- a- Justifier l'allure de ces deux courbes (0,5pt)
b- Retrouver les valeurs de L et C. (0,5pt)

Exercice n°2 :

Avec :

- Un générateur idéal de tension de f.e.m E.
- Un résistor de résistances R_0
- Une bobine idéale d'inductance L
- Un condensateur de capacité $C = 4 \mu F$.
- Trois interrupteurs K_1 , K_2 et K_3

On réalise le circuit ci-contre (Figure-5-)



I- On ferme les interrupteurs K_2 et K_3 et on laisse l'interrupteur K_1 ouvert.

Exprimer en fonction de C et E, la charge Q_0 du condensateur et l'énergie E_{C0} qu'il emmagasine (0,5pt)

II- On ouvre K_2 et on ferme K_1 à l'instant choisi comme origine des temps

1- Etablir l'équation différentielle relative à la charge q du condensateur (0,75pt)

2-Un dispositif approprié nous a permis de tracer la courbe d'évolution au cours du temps de la charge q du condensateur (Figure-6-)

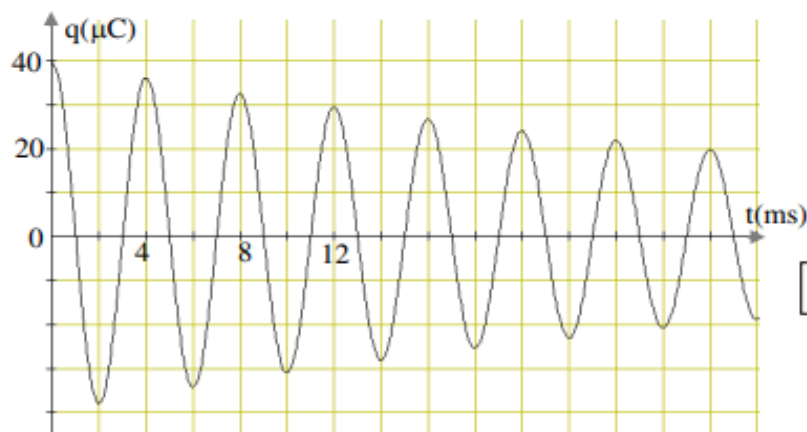
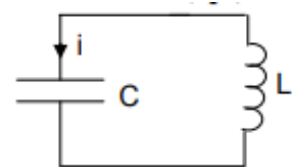


Figure-6-

- a- Déterminer la f.e.m E du générateur. (0,5pt)
b- Déterminer la pseudo période T des oscillations (0,25pt)
c- En admettant que la pseudo période T est sensiblement égale à la période propre T_0 , déterminer l'inductance L de la bobine. (0,5pt)
d- Déterminer à l'instant $t = 12$ ms, la tension u_b aux bornes de la bobine. (0,75pt)
e- Déterminer la perte de l'énergie totale de l'oscillateur entre les instant $t_1 = 0$ s et $t_2 = 12$ ms (1pt)

3-On élimine le résistor du circuit précédent, on charge le condensateur et on le relie à la bobine

a- Etablir l'équation différentielle reliant la tension instantanée aux bornes du condensateur et sa dérivée seconde par rapport au temps (0,5pt)



b- Montrer que $u_C(t) = E \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc})$ est une solution de l'équation différentielle pour une valeur de ω_0 qu'on exprimera en fonction de L et C. (0,75pt)

c- Montrer que l'énergie totale E_{tot} du circuit (L,C) se conserve et donner son expression en fonction de la f.é.m E et la capacité C (0,5pt+0,25pt)

Exercice 3:

I- On réalise le circuit de la **figure -1** - qui comporte :

- Un générateur de tension constante E .
- Un condensateur de capacité C.
- Une bobine supposée idéale d'inductance L.
- Un interrupteur inverseur K

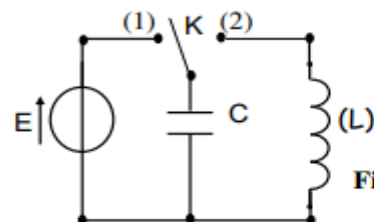


Figure-1-

On bascule l'interrupteur K en position (1) puis à un instant pris comme origine des temps, on bascule l'interrupteur K en position(2)

1- Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot u_C(t) = 0 \text{ avec } \omega_0 \text{ une constantes qu'on exprimera en fonction de L et C (0,5pt)}$$

2- Montrer que dans ce cas que l'énergie totale E_{tot} du circuit (L,C) se conserve. (0,5pt)

3- Un dispositif approprié a permis de tracer les courbes d'évolution au cours du temps de l'intensité du courant $i(t)$ qui traverse le circuit et l'énergie électrique $E_C(t)$ du condensateur.(Figure-2-) et (Figure-3-)

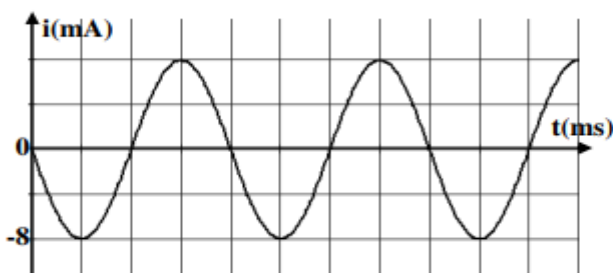


Figure-2-

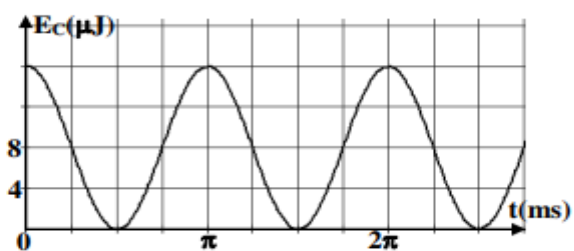


Figure-3-

a- En exploitant les figures-2- et-3-, déterminer l'intensité maximale I_{max} du courant qui circule dans le circuit (L,C) et sa période propre T_0 . (0,25pt+0,5pt)

b- Déterminer l'énergie totale du circuit et déduire l'inductance L de la bobine (0,75pt)

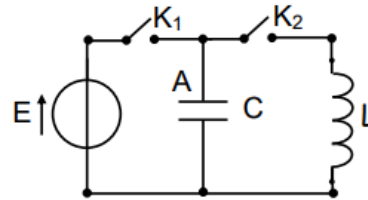
c- En déduire la capacité C du condensateur et la f.é.m E du générateur. (0,5pt+0,5pt)

4- On remplace la bobine idéale d'inductance L par une bobine idéale d'inductance L_2 , on constate que l'intensité du courant indiquée par un ampèremètre branché en série avec cette bobine est $I_2 = 5\sqrt{2}$ mA. Déterminer l'inductance L_2 de cette bobine (0,75pt)

Exercice n°4 :

Le circuit électrique de la figure ci-contre est constitué par :

- Un générateur de tension idéal de fem E
- Un condensateur de capacité C .
- Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.
- Deux interrupteurs K_1 et K_2 .



L'interrupteur (K_2) étant ouvert, on ferme l'interrupteur (K_1), après une brève durée le condensateur se charge et son armature A porte la charge $Q_0 = 12 \cdot 10^{-5} \text{ C}$.

1/ À un instant $t = 0 \text{ s}$, on ferme l'interrupteur K_2 et on ouvre K_1 .

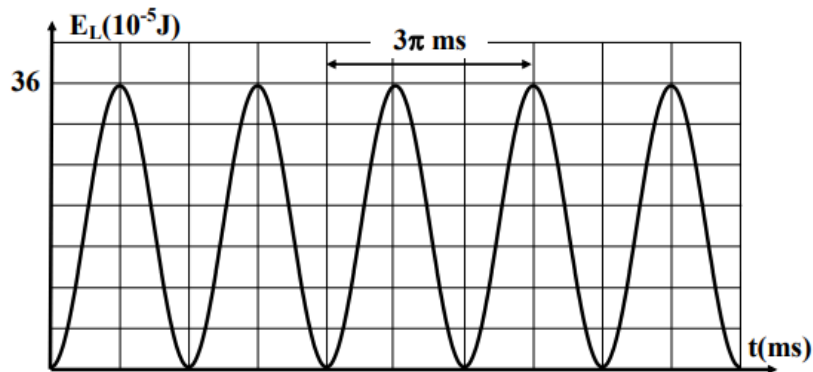
a) Établir l'équation différentielle régissant la variation de la charge $q(t)$ du condensateur.

b) Montrer que $q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$ est solution de l'équation différentielle pour laquelle $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Déduire l'expression de la période T_0 des oscillations.

c) Montrer que $I_m = \omega_0 Q_0$. I_m désigne la valeur maximale de l'intensité du courant qui circule dans le circuit.

2/ À l'aide d'un dispositif informatisé branché aux bornes du circuit on a pu tracer la courbe représentant les variations, au cours du temps, de l'énergie magnétique E_L .



a) L'énergie magnétique E_L est périodique de période T_E . Exprimer T_E en fonction de ω_0 .

b) En utilisant le graphe :

➤ Déterminer la période énergétique T_E et déduire la valeur de ω_0 .

➤ Exprimer l'énergie magnétique maximale $E_{L\max}$ en fonction de L , Q_0 et ω_0 et déduire la valeur de l'inductance L .

➤ En déduire la capacité C du condensateur.

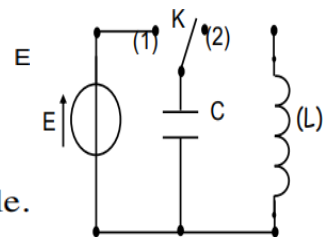
c) Sachant que l'énergie totale est constante déduire la fem E du générateur.

Exercice n°5 :

On considère le montage de la figure 1. Le commutateur est en position (1). Le condensateur de capacité C se charge. Lorsque la charge est maximale, on isole le condensateur du générateur et on ferme le commutateur en position (2) à un instant pris comme origine des dates.

On suppose que la bobine d'inductance L a une résistance négligeable.

1°/ a) Etablir l'équation différentielle relative à la tension $u_C(t)$.

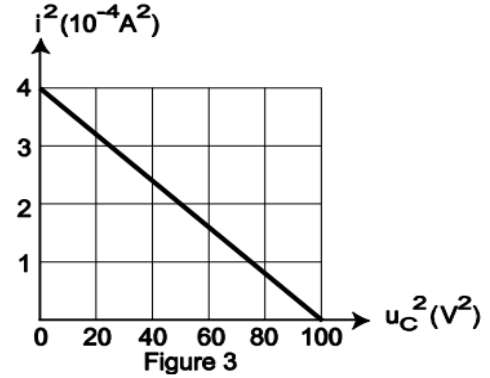
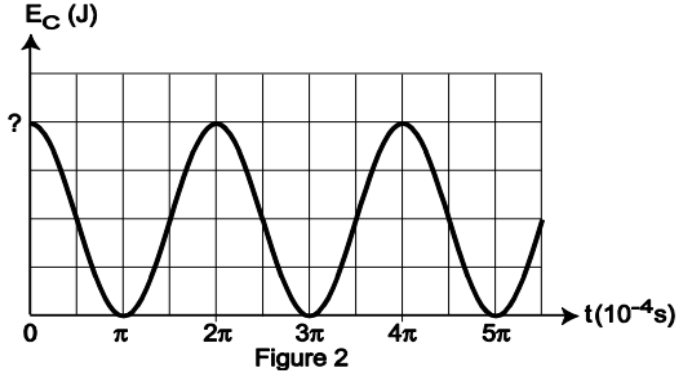


b) Exprimer $u_C(t)$ en fonction de la f.e.m E du générateur, ω_0 et t , où ω_0 désigne la pulsation propre du dipole LC.

c) Exprimer l'intensité du courant $i(t)$ en fonction de C , E , ω_0 et t .

2°/ Donner l'expression de l'énergie totale E du circuit LC en fonction de L , C , u_C et i .

3°/ On donne les représentations de l'énergie électrique E_C en fonction du temps : $E_C = f(t)$ et $i^2 = f(u_C^2)$. (Figure 2 et 3).



a) Montrer que la relation entre i et u_C est de la forme : $i^2 = -\frac{C}{L} \cdot [u_C^2 - E^2]$.

b) En déduire les valeurs de :

- La pulsation propre ω_0 .
- La charge maximale Q_m .
- La capacité C du condensateur.
- L'énergie électrique maximale du condensateur.
- L'inductance L de la bobine.

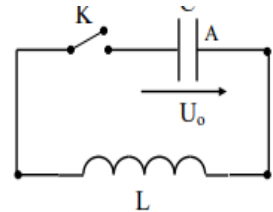
4°/ a) Donner l'expression numérique de l'énergie magnétique E_L emmagasinée dans la bobine en fonction du temps.

b) Tracer sur la figure 2, le graphe $E_L = f(t)$.

5°/ Déterminer, analytiquement, les instants pour lesquelles l'énergie magnétique est égale à l'énergie électrostatique pour $t \in [0, T_0]$.

Exercice n°6 :

Un circuit électrique comporte, branchés en série, une bobine d'inductance L variable et de résistance interne négligeable, un condensateur de capacité C initialement chargée à l'aide d'une tension continue U_0 et un interrupteur K . A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



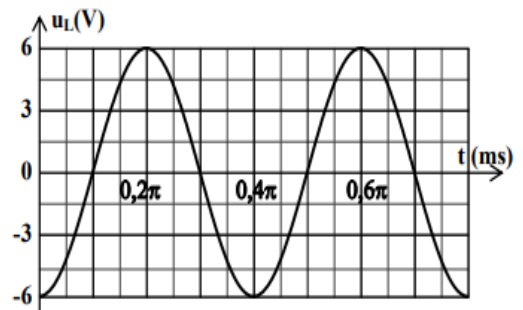
- 1) a- Montrer que l'équation différentielle en u_L (tension instantanée aux bornes de la bobine) s'écrit :

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_L = 0$$

- b- La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme : $u_L(t) = U_{Lm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_L})$

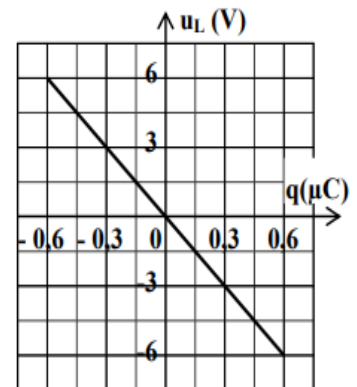
Montrer que l'on peut écrire $u_L(t) = U_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{\pi}{2}\right)$

- c- La courbe de la figure ci-dessous représente la tension $u_L(t)$ pour une valeur L_1 de l'inductance de la bobine. Déterminer la tension U_0 et la pulsation propre ω_0 des oscillations.



- 2) L'évolution de la tension u_L en fonction de la charge q de l'armature A du condensateur est représentée par la courbe ci-contre.

- a- Exprimer la tension u_L en fonction de q et de la capacité C .
b- Montrer que $C = 0,1 \mu\text{F}$.
c- En déduire l'inductance L_1 de la bobine.



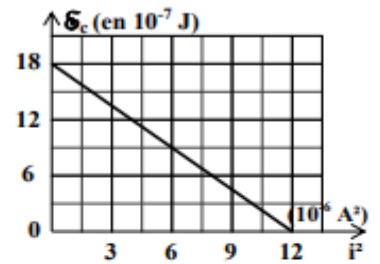
- 3) la charge q de l'armature A évolue en fonction du temps selon l'expression $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$.

- a- Déterminer Q_m et φ_q .
b- En déduire l'expression numérique de l'intensité $i(t)$ du courant électrique

4) On fait varier l'inductance de la bobine. Pour une valeur L_2 de L , on étudie l'évolution de l'énergie électrique $\mathcal{E}_c$ emmagasinée dans le condensateur en fonction du carré de l'intensité du courant.

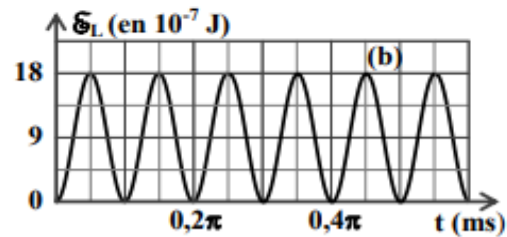
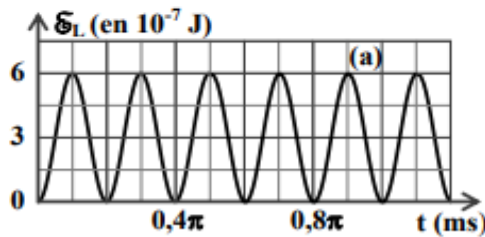
a- Montrer que $\mathcal{E}_c = -\frac{1}{2} L_2 i^2 + 18 \cdot 10^{-7} \text{ (J)}$

b- La courbe de la figure ci-contre représente $\mathcal{E}_c = f(i^2)$. En déduire L_2



5) On fixe l'inductance de la bobine à une valeur L_3 .

a- Préciser en le justifiant, parmi les courbes (a) et (b) ci-dessous, laquelle qui peut traduire l'évolution de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_L$ en fonction du temps.



b- Déterminer l'inductance L_3

Exercice n°7 :

I- On réalise le circuit de la figure -3 qui comporte :

- un générateur de tension constante $E = 10 \text{ V}$;
- un condensateur de capacité C ;
- une bobine (B) d'inductance L et de résistance r ;
- un conducteur ohmique de résistances R ;
- un interrupteur inverseur K

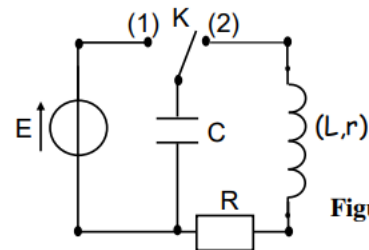


Figure-3

On bascule l'interrupteur K en position (1) puis en position (2) à un instant $t = 0 \text{ s}$

1) Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps de la charge q du

condensateur est : $LC \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (r + R)C \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$

2) Un dispositif approprié permet de tracer la courbe d'évolution au cours du temps de la charge q du condensateur (Figure-4)

a- Montrer que la capacité du condensateur est $C = 2 \mu\text{F}$

b- En admettant que la pseudo période a la même expression que la période propre du dipôle (L, C) , déterminer l'inductance L de la bobine. (On prendra $\pi^2 = 10$)

3) Sachant qu'à l'instant t_1 , la charge du condensateur est $q(t_1) = 6 \mu\text{C}$ et la tension aux bornes du conducteur ohmique est minimale et elle vaut $-2,9 \text{ V}$.

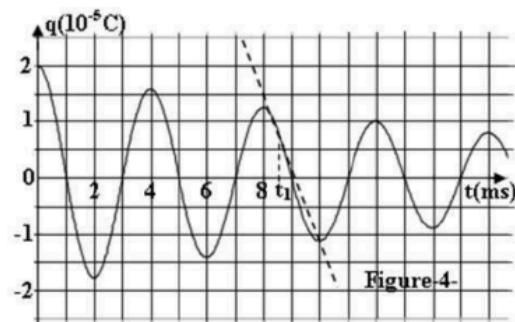


Figure-4

- a- Déterminer, l'intensité du courant qui circule dans le circuit à l'instant t_1 et déduire la résistance R du conducteur ohmique.
- b- Déterminer la tension aux bornes de la bobine à l'instant t_1 et déduire sa résistance r

4) Montrer que l'énergie totale du circuit décroît au cours du temps

5) Calculer la perte d'énergie par effet joule subie par l'oscillateur libre amorti ($R+r, L, C$) entre les instants $t_0 = 0$ et t_1

II- On enlève le conducteur ohmique et on remplace la bobine (B) par une bobine (B_2) purement inductive d'inductance L_2 . On bascule l'interrupteur K en position (1) puis en position (2) à un instant pris comme origine des temps.

1) Déduire de la question I-1) l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps de la charge q du condensateur.

2) Montrer que la relation entre la charge q du condensateur l'intensité du courant i qui circule dans le circuit s'écrit sous la forme $q^2 = a i^2 + b$. Calculer a et exprimer b en fonction de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

3) La courbe de la figure-5 ci-contre représente $q^2 = f(i^2)$.

a- Déterminer la pulsation propre ω_0 et déduire L_2 .

b- Etablir l'expression numérique de $q(t)$.

4) a- En utilisant les expressions de $i(t)$ et $q(t)$, montrer que l'énergie totale du circuit (L_2, C) se conserve et calculer sa valeur

b- Tracer la courbe d'évolution de l'énergie magnétique E_L en fonction du temps: $E_L = f(t)$

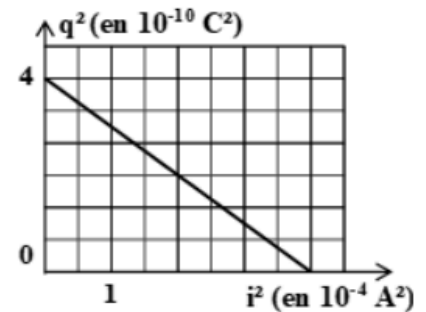


Figure-5

Exercice n°8

On réalise le circuit de la figure -3 - qui comporte :

- Un générateur de tension constante $E = 4 \text{ V}$.
- Un condensateur de capacité C .
- Une bobine idéale d'inductance L .
- Un conducteur ohmique de résistances R .
- Deux interrupteurs K_1 et K_2 .

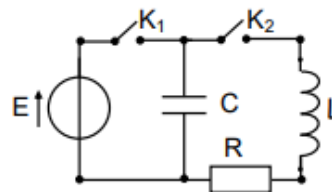


Figure-3-

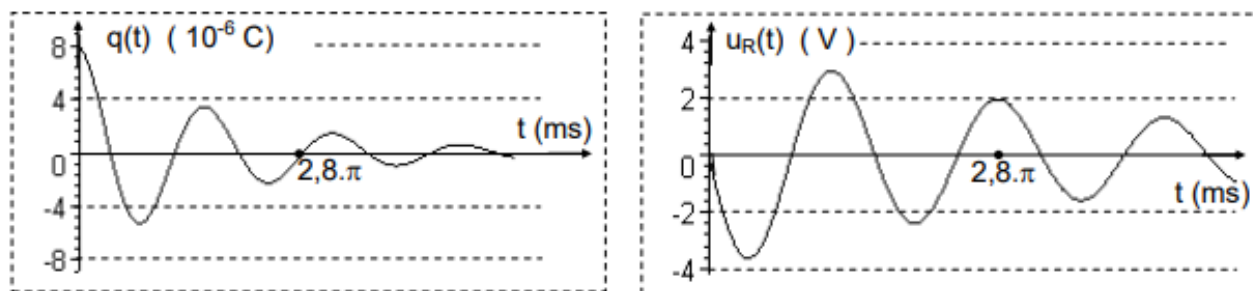
1/ L'interrupteur K_2 est ouvert et K_1 est fermé. Exprimer la charge q_0 acquise par le condensateur en fonction de C et E .

2/ À un l'instant pris comme origine des temps, on ouvre K_1 et on ferme l'interrupteur K_2 . Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution au cours du temps la charge $q(t)$ du condensateur est :

$$LC \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R.C \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$$

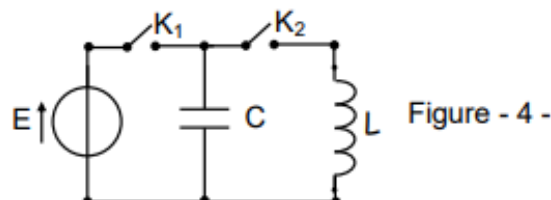
3/ Un dispositif approprié permet de tracer les courbes d'évolution au cours du temps de la

charge $q(t)$ du condensateur et de la tension $u_R(t)$ aux bornes du conducteur ohmique.



- Pourquoi les oscillations sont dites amorties ?
- Déterminer la charge du condensateur à l'instant $t = 0$, déduire que la capacité C est égale à $2 \mu\text{F}$.
- Déterminer la pseudopériode T de l'oscillateur.
- En admettant que la pseudo période est donnée par la même expression que la période propre du dipôle (L, C) , déterminer l'inductance L de la bobine.
- Calculer la perte d'énergie par effet joule subie par l'oscillateur libre amorti (R, L, C) entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 2,8.\pi$ millisecondes.

4/ On élimine le conducteur ohmique de résistance R comme l'indique la figure - 4 - puis on refait la même expérience.



- Déduire de la question 2/, l'équation différentielle relative à la charge $q(t)$ du condensateur.
- Exprimer l'énergie totale E_{tot} du circuit (L, C) en fonction de L , C , $q(t)$ et $i(t)$.
- Montrer que l'énergie totale du circuit se conserve.
- Tracer l'allure des courbes des différentes formes de l'énergie en fonction du temps.

Correction

Exercise1

I- On bascule K sur (1) puis sur (2) à l'instant choisi comme origine des temps

1- Loi des mailles $u_b(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$

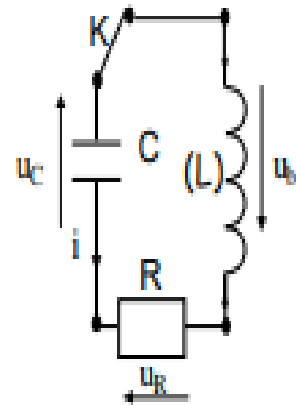
$$\text{Avec } u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ et } i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

$$\text{Donc } u_b(t) = L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2}, u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\text{On trouve } u_b(t) + u_R(t) + u_C(t) = L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\text{Si on divise par } L, \text{ on trouve } \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot q(t) = 0 \text{ avec } \alpha = \frac{R}{L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



2- L'énergie totale $E_{\text{tot}} = E_L(t) + E_C(t)$ avec $E_C = \frac{1}{2C} \cdot q^2(t)$ et $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2C} \cdot q^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2C} \cdot 2q(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} = \frac{1}{C} q(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} + L \cdot \frac{dq(t)}{dt} \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} =$$

$$L \cdot \frac{dq(t)}{dt} \left(\frac{q(t)}{LC} + \frac{d^2q(t)}{dt^2} \right) \text{ D'après l'équation différentielle } \left(\frac{q(t)}{LC} + \frac{d^2q(t)}{dt^2} \right) = -\frac{R}{L} \cdot \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = L \cdot \frac{dq(t)}{dt} \left(-\frac{R}{L} \cdot \frac{dq(t)}{dt} \right) = -R \cdot \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 = -R \cdot i^2(t) < 0 \text{ donc } E_{\text{tot}} \text{ décroît au cours du temps}$$

3-a- D'après la courbe de $q(t)$, on a $T = 2\pi \text{ ms}$

$$\text{b- } q(0) = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C} = C \cdot u_C(0) = C \cdot E \Rightarrow C = \frac{q(0)}{E} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{4} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 2 \mu\text{F}$$

$$\text{On admet que } T = T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \text{ H}$$

c- L'énergie perdue est $E_{\text{perdue}} = E_{\text{tot}}(t_0=0) - E_{\text{tot}}(t_1=4\pi \text{ ms})$

$$E_{\text{tot}}(0) = E_C(0) + E_L(0) \text{ or } q(0) \text{ est un maximum donc } E_L(0)=0 \Rightarrow E_{\text{tot}}(0) = E_C(0) = \frac{1}{2} \frac{q^2(0)}{C}$$

$$E_{\text{tot}}(t_1) = E_C(t_1) + E_L(t_1) \text{ or } q(t_1) \text{ est un maximum donc } E_L(t_1)=0 \Rightarrow E_{\text{tot}}(t_1) = E_C(t_2) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t_1)}{C}$$

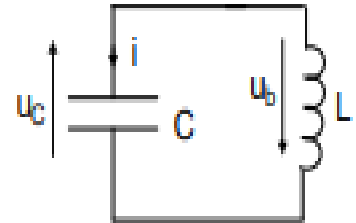
$$E_{\text{perdue}} = \frac{1}{2} \frac{q^2(0)}{C} - \frac{1}{2} \frac{q^2(t_1)}{C} = \frac{1}{2C} (q^2(0) - q^2(t_1)) = \frac{1}{2 \times 2 \cdot 10^{-8}} (8^2 - 4^2) \cdot 10^{-12} = 12 \cdot 10^{-6} \text{J}$$

II-1-a- Loi des mailles : $u_b(t) + u_c(t) = 0$

$$\text{Or } u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ (bobine idéale)}$$

$$\text{On a } i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ et } \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \Rightarrow u_b(t) = LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2}$$

$$\text{donc : } u_b(t) + u_c(t) = 0 \Rightarrow LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = 0$$



$$\text{b- } u_C(t) = E \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) \Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = E \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_{uc}) \Rightarrow \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = -E \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) = -\omega_0^2 u_C(t)$$

$$L C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0 \Rightarrow -LC \omega_0^2 u_C + u_C = 0 \Rightarrow u_C(-LC \omega_0^2 + 1) = 0 \Rightarrow LC \omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{c- L'énergie totale } E_{\text{tot}} = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t) \text{ et } \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot 2C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} u_C(t)$$

$$= L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} + C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} u_C(t) \text{ or } i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \text{ et } \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = i(t) \cdot (L \cdot C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t)) \text{ or } L \cdot C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0 \text{ d'après l'eq.diff} \Rightarrow \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

$$\text{donc } E_{\text{tot}} = \text{constante} \Rightarrow \text{l'énergie totale du circuit (L,C) se conserve. On a } E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{tot}}(0) = \frac{1}{2} C \cdot E^2$$

$$\text{2-a- On a } u_b(t) + u_C(t) = 0 \Rightarrow u_C(t) = -u_b(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \text{ donc la courbe de } u_C = f\left(\frac{di(t)}{dt}\right) \text{ est une droite linéaire}$$

de pente $-L$ ce qui confirme l'allure de la courbe-1-

$$\text{On a } L C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = -\frac{1}{LC} u_C(t) \text{ or } u_C(t) = -u_b(t) \Rightarrow \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = \frac{1}{LC} u_b(t) = \omega_0^2 u_b(t) \text{ donc}$$

$$\text{la courbe de } \frac{d^2 u_C}{dt^2} = f(u_b) \text{ est une droite linéaire de pente } \omega_0^2 \text{ ce qui confirme l'allure de la courbe-2-}$$

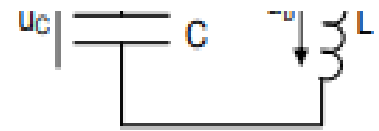
$$\text{b- Pour la courbe-1- la pente } a = -L = \frac{u_C}{di/dt} = \frac{2 \cdot V}{-4 \cdot A \cdot s^{-1}} = -0,5 \text{ H} \Rightarrow L = 0,5 \text{ H}$$

$$\text{Pour la courbe-1- la pente } a = \omega_0^2 = \frac{d^2 u_C / dt^2}{u_b} = \frac{2 \cdot 10^3 V \cdot s^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} V} = 10^6 \text{ rad} \cdot s^{-2} = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{L \cdot \omega_0^2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 2 \mu\text{F}$$

Exercice 3 :

1- Loi des mailles : $u_b(t) + u_c(t) = 0$

Or $u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ (bobine idéale)



On a $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ et $\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \Rightarrow u_b(t) = L C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2}$, on a $u_b(t) + u_c(t) = 0 \Rightarrow$

$$L C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0 = \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_c(t) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2- L'énergie totale $E_{\text{tot}} = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) + \frac{1}{2} C u_c^2(t)$ et $\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2} L \cdot 2 i(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot 2 C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} u_c(t)$

$$= L i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} + C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} u_c(t) \text{ or } i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ et } \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = i(t) \cdot (L \cdot C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t)) \text{ or } L \cdot C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = 0 \text{ d'après l'eq.diff} \Rightarrow \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

donc $E_{\text{tot}} = \text{constante} \Rightarrow$ l'énergie totale du circuit (L,C) se conserve.

3-a- $I_{\text{max}} = 8 \text{ mA}$

La période énergétique est $T_E = \pi \text{ ms} = \frac{T_0}{2} \Rightarrow T_0 = 2 \cdot T_E = 2\pi \text{ ms}$

$$\text{b- } E_{\text{tot}} = E_{C_{\text{max}}} = E_{L_{\text{max}}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ J or } E_{L_{\text{max}}} = \frac{1}{2} L I_{\text{max}}^2 \Rightarrow L = 2 \cdot \frac{E_{L_{\text{max}}}}{I_{\text{max}}^2} = 2 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}}{(8 \cdot 10^{-3})^2} = \mathbf{0,5 \text{ H}}$$

$$\text{c- On a } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 0,5} = \mathbf{2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}$$

$$\text{On a } E_{\text{tot}} = \text{cte} \Rightarrow E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{tot}}(0) = \frac{1}{2} C E^2 \Rightarrow E^2 = 2 \cdot \frac{E_{\text{tot}}}{C} \Rightarrow E = \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\text{tot}}}{C}} = \sqrt{2 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}}} = \mathbf{4 \text{ V}}$$

4- On a $I_2 = 5\sqrt{2} \text{ mA} \Rightarrow I_{2_{\text{max}}} = I_2 \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10 \text{ mA}$

L'énergie totale du circuit ne change pas puisqu'elle est apportée par le condensateur donc

$$E_{\text{tot}} = E_{L_{\text{max}}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ J} = \frac{1}{2} L_2 I_{2_{\text{max}}}^2 \Rightarrow L_2 = 2 \cdot \frac{E_{L_{\text{max}}}}{I_{2_{\text{max}}}^2} = 2 \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}}{(10^{-2})^2} = \mathbf{0,32 \text{ H}}$$

I- On ferme les interrupteurs K_2 et K_3 et on laisse

La charge $Q_0 = C.E$ et l'énergie $E_{C0} = \frac{1}{2} C.E^2$

II- On ouvre K_2 et on ferme K_1 à l'instant choisi comme origine des temps

1- Loi des mailles $u_b + u_R + u_C = 0$

$$\text{Avec } u_b = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\text{Donc } u_b = L \frac{d^2q}{dt^2}, u_R = R_0.i = R_0 \frac{dq}{dt} \text{ et } u_C = \frac{q}{C}$$

$$\text{On trouve } u_b + u_R + u_C = L \frac{d^2q}{dt^2} + R_0 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$L.C \frac{d^2q}{dt^2} + R_0.C \frac{dq}{dt} + q = 0$$

2-a- On ouvre K_2 et on ferme K_1 à $t=0 \Rightarrow u_C(0) = E$

$$q(0) = 8.10^{-6} C = C.u_C(0) = C.E \Rightarrow E = \frac{q(0)}{C} = \frac{40 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = 10V$$

b- D'après la courbe de $q(t)$, on a $T = 4 \text{ ms}$

$$\text{c- On admet que } T = T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(4.10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 4.10^{-6}} = 0,1H$$

$$\text{d- On a la charge } q \text{ est maximale à } t=12 \text{ ms donc } \frac{dq}{dt}(12 \text{ ms}) = i(12 \text{ ms}) = 0 \Rightarrow u_R(12 \text{ ms}) = 0$$

$$\text{d'autre part } u_b + u_R + u_C = 0 \Rightarrow u_b = -u_R - u_C \Rightarrow u_b(12 \text{ ms}) = -u_C(12 \text{ ms}) = -\frac{q(12 \text{ ms})}{C} = -\frac{30 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-6}} = -7,5V$$

e- L'énergie perdue est $E_{\text{perdue}} = E_{\text{tot}}(t_1=0) - E_{\text{tot}}(t_2=12 \text{ ms})$

$$E_{\text{tot}}(0) = E_C(0) + E_L(0) \text{ or } q(0) \text{ est un maximum donc } E_L(0)=0 \Rightarrow E_{\text{tot}}(0) = E_C(0) = \frac{1}{2} \frac{q^2(0)}{C}$$

$$E_{\text{tot}}(t_2) = E_C(t_2) + E_L(t_2) \text{ or } q(t_2) \text{ est un maximum donc } E_L(t_2)=0 \Rightarrow E_{\text{tot}}(t_2) = E_C(t_2) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t_2)}{C}$$

$$E_{\text{perdue}} = \frac{1}{2} \frac{q^2(0)}{C} - \frac{1}{2} \frac{q^2(t_2)}{C} = \frac{1}{2C} (q^2(0) - q^2(t_2)) = \frac{1}{2 \times 4.10^{-6}} (40^2 - 30^2) \cdot 10^{-12} = 87,5.10^{-6} J$$

3-a- Loi des mailles : $u_b + u_C = 0$

$$\text{Or } u_b = r.i + L \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} = u_L \text{ car } r = 0 \text{ (bobine idéale)}$$

$$\text{On a } i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2u_C}{dt^2} \Rightarrow u_b = L C \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$\text{donc : } u_b + u_C = 0 \Rightarrow L C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\text{b- } u_C(t) = E \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = E \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{uc}) \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} = -E \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{uc}) = -\omega_0^2 u_C(t)$$

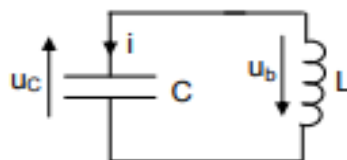
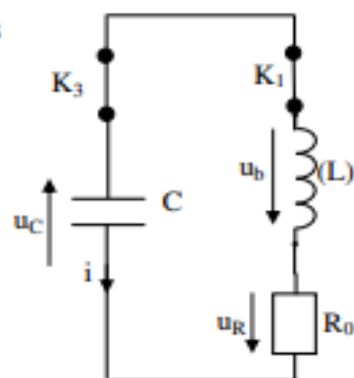
$$L C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \Rightarrow -LC \omega_0^2 u_C + u_C = 0 \Rightarrow u_C(-LC \omega_0^2 + 1) = 0 \Rightarrow LC \omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{c- L'énergie totale } E_{\text{tot}} = E_L + E_C = \frac{1}{2} L.i^2 + \frac{1}{2} C.u_C^2$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2} L.2.i \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} C.2.u_C \frac{du_C}{dt} = L.i \frac{di}{dt} + C.u_C \frac{du_C}{dt} \text{ or } i = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = L(L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C) \text{ or } L.C \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \Rightarrow \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0 \text{ donc } E_{\text{tot}} = \text{constante} \Rightarrow \text{l'énergie totale}$$

$$\text{du circuit}(L,C) \text{ se conserve. On a } E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{tot}}(0) = \frac{1}{2} C.E^2$$



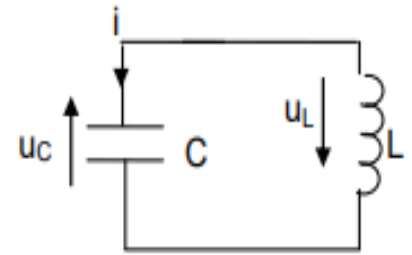
Exercice 4 :

1-a- Loi des mailles :

$$u_b + u_c = 0$$

$$\text{Loi d'ohm } u_b = r.i + L \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} \text{ car } r = 0 \text{ (bobine idéale)}$$

$$\text{On a } u_c = \frac{q}{C} \text{ et } i = \frac{dq}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow u_b = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$



$$\text{Donc } u_b + u_c = L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{b- On a } q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_q) \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q) = -\omega_0^2 q(t)$$

$q(t)$ est une solution de l'équation différentielle donc elle vérifie cette équation $\Rightarrow$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -L \omega_0^2 q + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q (-L \omega_0^2 + \frac{1}{C}) = 0 \Rightarrow -L \omega_0^2 + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow L \omega_0^2 = \frac{1}{C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L.C}$$

$$\text{La période propre } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$q(t) = Q_M \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = Q_M \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_q) = Q_M \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}) = I_M \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$\Rightarrow I_m = \omega_0 Q_0$$

$$\text{2-a- La période de l'énergie magnétique } E_L \text{ est } T_E = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\text{b- * On a } \Delta t = 3\pi \text{ ms} = \frac{3T_E}{2} \Rightarrow \text{La période énergétique } T_E = \frac{2\Delta t}{3} = 2\pi \text{ ms.}$$

$$T_E = \frac{\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{T_E} = \frac{\pi}{2\pi \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\text{* L'énergie magnétique maximale } E_{L\max} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \omega_0^2 \cdot Q_0^2 \Rightarrow L = \frac{2E_{L\max}}{Q_0^2 \cdot \omega_0^2}$$

$$\text{AN: } L = \frac{2 \cdot 36 \cdot 10^{-5}}{(12 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (5 \cdot 10^2)^2} = 0,2 \text{ H}$$

$$\text{* On a } \omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \Rightarrow C = \frac{1}{L \cdot \omega_0^2} = \frac{1}{0,2 \cdot (5 \cdot 10^2)^2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

$$\text{c- 1}^{\text{ère}} \text{ méthode } Q_0 = C.E \Rightarrow E = \frac{Q_0}{C} = \frac{12 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}} = 6 \text{ V}$$

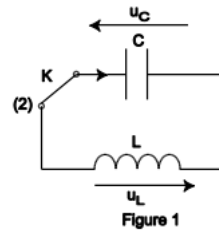
$$\text{2}^{\text{ème}} \text{ méthode : On a } E_{\text{tot}} = \text{cte} = E_{L\max} = E_{C\max} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot E^2 \Rightarrow E = \sqrt{\frac{2E_{C\max}}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}}} = 6 \text{ V}$$

Exercice 5 :

1°/ a) Loi des mailles :

$$u_C(t) + u_L(t) = 0 \quad \textcircled{1}$$

avec $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$ avec $q(t) = C \cdot u_C(t)$.



$$u_L(t) = L \cdot \frac{d^2(C \cdot u_C(t))}{dt^2} = LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} \quad \textcircled{2}$$

Conclusion : $\textcircled{2}$ en $\textcircled{1}$:

$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C(t) = 0$. Equation différentielle du second ordre d'un oscillateur électrique libre non amorti.

b) $u_C(t)$ varie donc sinusoïdalement au cours du temps :

$$u_C(t) = E \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) \text{ t en s et } u_C \text{ en V.}$$

c) $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$.

$$i(t) = CE\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}) \text{ avec t en s et } i(t) \text{ en A.}$$

$$2^\circ/ E = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2.$$

3°/ a) Comme la résistance de la bobine est négligeable, l'énergie totale E est constante à chaque instant.

$$E(t) = E(t=0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CE^2 \Leftrightarrow i^2 = -\frac{C}{L} \cdot u_C^2 + \frac{C}{L} \cdot E^2.$$

b) Figure 2 : $E_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$ avec $u_C(t) = E \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) \text{ avec } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$E_C = \frac{1}{4}CE^2 \cdot [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_{u_C})] \Leftrightarrow$ L'énergie électrique E_C est donc la somme d'une fonction constante $\frac{1}{4}CE^2$ et d'une fonction sinusoïdale du temps $\frac{1}{4}CE^2 \cdot \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_{u_C})$ périodique de période $T = \frac{T_0}{2}$.

Figure 2 : $T_0 = 2 \cdot T = 2 \cdot 2\pi = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ s.} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ AN : $\omega_0 = \frac{2\pi}{4\pi \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Calcul de la charge maximale Q_m :

On a $I_m = \omega_0 \cdot Q_m \Rightarrow Q_m = \frac{I_m}{\omega_0}$. AN : $Q_m = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$

- Calcul de la capacité C du condensateur :

On a $Q_m = C \cdot U_{Cm} \Leftrightarrow C = \frac{Q_m}{U_{Cm}}$. AN : $C = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{10} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ F.} = 0,4 \text{ } \mu\text{F.}$

- Calcul de l'énergie électrique maximale :

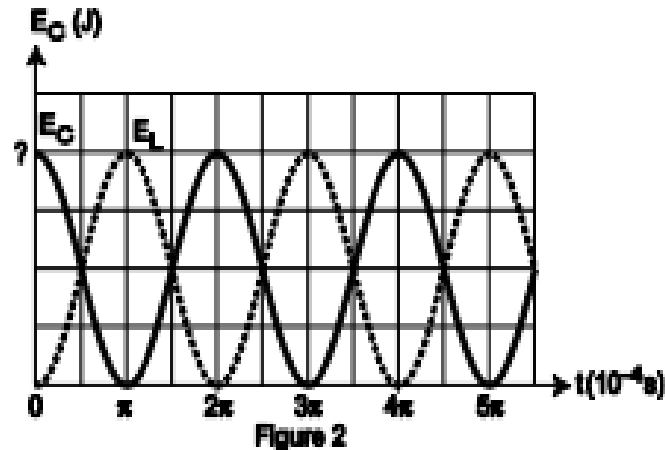
$$E_{Cm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C}. \text{ AN : } E_{Cm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-6})^2}{0,4 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

- Calcul de l'inductance L de la bobine :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow L = \frac{1}{C \cdot \omega_0^2}. \text{ AN : } L = \frac{1}{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot (5 \cdot 10^3)^2} = 0,1 \text{ H.}$$

4°/ a) $E_L = \frac{1}{2}Li^2 = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \cos^2(5 \cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2})$ avec t en s et E_L en J.

b) Représentation des variations de l'énergie magnétique E_L en fonction du temps.



5°/ Condition du problème : $E_C = E_L$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}CE^2.\sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) = \frac{1}{2}LI_m^2.\cos^2(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$$

$$\text{Comme } \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 \Rightarrow \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) = \cos^2(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_C}) = \pm \cos(\omega_0 t + \varphi_{u_C})$$

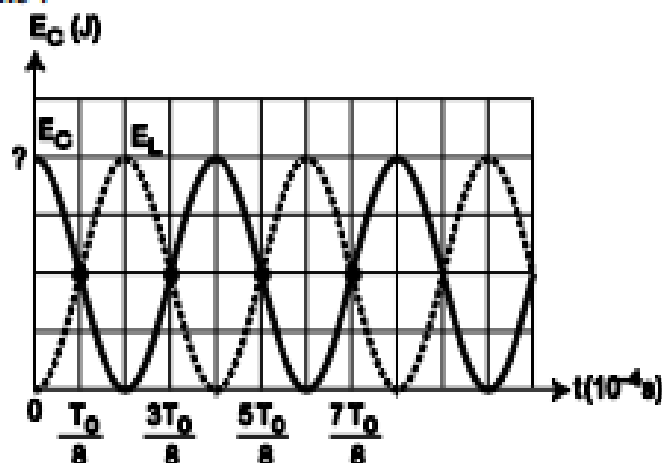
$$\Rightarrow \omega_0 t + \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2} \text{ avec } \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0}t = -\frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{T_0}{2\pi} \left[-\frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2} \right] \text{ avec } k \in \infty.$$

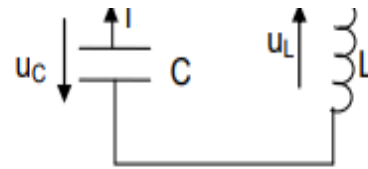
$$\Rightarrow t = -\frac{T_0}{8} + k\frac{T_0}{4} \text{ avec } k \in \infty \text{ et } t \leq T_0.$$

$$\text{Conclusion : } t \in \left\{ \frac{T_0}{8} ; \frac{3.T_0}{8} ; \frac{5.T_0}{8} ; \frac{7.T_0}{8} \right\}.$$

Vérification sur le graphe :



Exercice 6 ::



1-a- Loi des mailles :

$$u_b + u_c = 0 \Rightarrow u_c = -u_b$$

$$\text{Loi d'ohm } u_b = r.i + L \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} = u_L \text{ car } r = 0 \text{ (bobine idéale)}$$

$$u_c = -u_L \Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} = - \frac{d^2 u_L}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } i &= C \frac{du_c}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_c}{dt^2} \Rightarrow u_L = L \frac{di}{dt} = L C \frac{d^2 u_c}{dt^2} = -LC \frac{d^2 u_L}{dt^2} \Rightarrow u_L + LC \frac{d^2 u_L}{dt^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_L = 0 \end{aligned}$$

b- La solution de l'équation différentielle précédente est : $u_L(t) = U_{Lm} \sin(\omega_0 t + \phi_{u_L}) \Rightarrow \frac{d^2 u_L}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot u_L$

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_L = 0 \Rightarrow -\omega_0^2 \cdot u_L + \frac{1}{LC} u_L = (-\omega_0^2 + \frac{1}{LC}) u_L = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$u_L(0) = U_{Lm} \sin(\phi_{u_L}) = -U_{Lm} = -U_{Cm} = -U_0 \Rightarrow \sin(\phi_{u_L}) = -1 \Rightarrow \phi_{u_L} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad donc } u_L(t) = U_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{c- } U_0 = 6\text{V et la période propre } T_0 = 0,4\pi \text{ ms} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0,4\pi \cdot 10^{-3}} = 5000 \text{ rad.s}^{-1}$$

2-a- On a $u_L = -u_C = -\frac{q}{C}$

b- La pente de la droite (La courbe de $u_L = f(q)$) est $a = -\frac{1}{C}$ et $a = -\frac{6}{0,6 \cdot 10^{-6}} = -10^7 \text{ V.C}^{-1} \Rightarrow C = -\frac{1}{a} = 0,1 \mu\text{F}$

$$\text{c- } \omega_0^2 = \frac{1}{L_1 \cdot C} \Rightarrow L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{25 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,4 \text{ H}$$

$$\text{3-a- } Q_{\max} = C \cdot U_{C\max} = C \cdot U_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ C et } \varphi_q = \varphi_{uC} = \varphi_{uL} + \pi \text{ car } u_L = -u_C \Rightarrow \varphi_q = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{b- } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_q) = Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}) = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(5000 \cdot t + \pi) \text{ (i en A et t en s)}$$

$$\text{4-a- } E_{\text{tot}} = E_C + E_L = E_C \text{ lorsque } i = 0 \Rightarrow E_{\text{tot}} = 18 \cdot 10^{-7} \text{ J et } E_C = E_{\text{tot}} - E_L = E_{\text{tot}} - \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i^2 = -\frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i^2 + 18 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{b- La pente de la droite est } a = -\frac{1}{2} \cdot L_2 = \frac{18 \cdot 10^{-7} - 0}{0 - 12 \cdot 10^{-6}} = -0,15 \Rightarrow L_2 = -2 \cdot a = 0,3 \text{ H}$$

5-a- C'est la courbe (b) qui traduit l'évolution de l'énergie magnétique E_L en fonction du temps car l'énergie totale E_{tot} qui est $E_{L\max}$ ne dépend que de l'énergie initiale du condensateur

$$\text{b- On a la période propre } T_{03} = 2 \cdot T_E = 0,2 \pi \text{ ms et } \omega_{03} = \frac{2 \cdot \pi}{T_{03}} = \frac{2 \cdot \pi}{0,2 \pi \cdot 10^{-3}} = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_{03}^2 = \frac{1}{L_3 \cdot C} \Rightarrow L_3 = \frac{1}{\omega_{03}^2 \cdot C} = \frac{1}{10^8 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,1 \text{ H}$$

Exercice7 :

I-1-Loi des mailles

$$u_b(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0 \text{ avec } u_b(t) = L \frac{di(t)}{dt} + r.i(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + r \frac{dq(t)}{dt}$$

$$u_R(t) = R.i(t) = R. \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + r \frac{dq(t)}{dt} + R. \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R+r) \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2q(t)}{dt^2} + (r+R).C \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$$

2-a- La charge $q(0)=2.10^{-5}C$

$$q(0) = C.u_C(0) = C.E \Rightarrow C = \frac{q(0)}{E} = \frac{2.10^{-5}}{10} = 2.10^{-6}F = 2\mu F$$

b- la pseudo période $T = 4ms = T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{16.10^{-6}}{4.\pi^2.2.10^{-6}} = 0,2H$

3-a- $i(t_1) = \frac{dq}{dt}(t_1)$ qui est la pente "a" de la droite tangente à la courbe de $q(t)$ au point d'abscisse t_1 .

$$i(t_1) = a = \frac{1,5.10^{-5} - (-1.10^{-5})}{8.10^{-3} - 10.10^{-3}} = -1,25.10^{-2}A$$

$$u_R(t_1) = R.i(t_1) \Rightarrow R = \frac{u_R(t_1)}{i(t_1)} = \frac{-2,9}{-1,25.10^{-2}} = 232\Omega$$

b-A l'instant t_1 , on a $u_b(t_1) + u_R(t_1) + u_C(t_1) = 0 \Rightarrow u_b(t_1) = -u_R(t_1) - u_C(t_1) = -u_R(t_1) - \frac{q(t_1)}{C} = 2,9 - \frac{6.10^{-6}}{2.10^{-6}} = -0,1V$

Où $u_b(t_1) = L \frac{di}{dt}(t_1) + r.i(t_1)$ or à $t = t_1$, u_R est minimale $\Rightarrow \frac{du_R}{dt}(t_1) = \frac{di}{dt}(t_1) = 0 \Rightarrow u_b(t_1) = r.i(t_1) \Rightarrow$

$$r = \frac{u_b(t_1)}{i(t_1)} = \frac{-0,1}{-1,25.10^{-2}} = 8\Omega$$

4- L'énergie totale $E_{tot} = E_L + E_C$ avec $E_C = \frac{1}{2.C} \cdot q^2$ et $E_L = \frac{1}{2} \cdot L.i^2$

$$E_{tot} = \frac{1}{2.C} \cdot q^2 + \frac{1}{2} \cdot L.i^2$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot L.2.i(t). \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2.C} \cdot 2. \frac{dq(t)}{dt} q(t) = L.i(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt} \text{ or } i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2} \text{ donc } \frac{dE_{tot}}{dt} = L. \frac{dq(t)}{dt} \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \left(L. \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} \right) \cdot \frac{dq(t)}{dt}$$

D'après l'équation différentielle $L. \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = -(R+r) \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow$

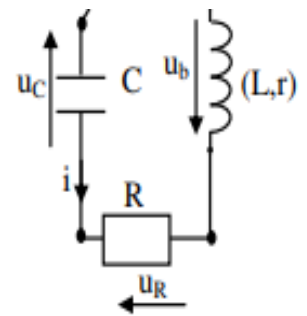
$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -(R+r) \cdot \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 = -(R+r) \cdot i^2(t) < 0 \text{ donc } E_{tot} \text{ décroît au cours du temps}$$

5- $E_{tot}(0) = E_C(0) + E_L(0)$ avec $E_L(0)=0$ car $u_C(0)$ est un maximum donc $E_{tot}(0) = E_C(0)$

$$E_C(0) = \frac{1}{2.C} \cdot q^2(0) = \frac{1}{2.2.10^{-6}} \cdot (2.10^{-5})^2 = 10^{-4}J$$

$$E_{tot}(t_1) = E_C(t_1) + E_L(t_1) = \frac{1}{2.C} \cdot q^2(t_1) + \frac{1}{2} \cdot L.i^2(t_1) = \frac{1}{2.2.10^{-6}} \cdot (6.10^{-6})^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot (1,25.10^{-2})^2 = 24,6.10^{-6}J$$

L'énergie perdue $E_{perdue} = |\Delta E_{tot}| = E_{tot(0)} - E_{tot}(t_1) = 10^{-4}J - 24,6.10^{-6}J = 75,4.10^{-6}J$



II-1- Si on élimine toute résistance du circuit l'équation différentielle de I-1 devient

$$L_2 C \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + q(t) = 0$$

2- En absence de toute résistance, l'énergie totale se conserve $\Rightarrow E_{tot}(0) = E_{tot}(t) \Rightarrow$

$$\frac{q^2(0)}{2C} = \frac{1}{2} L_2 i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2(0)}{2C} - \frac{1}{2} L_2 i^2 \Rightarrow q^2 = q^2(0) - L_2 C i^2$$

$$\text{Or } q^2(0) = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}^2 \text{ et } L_2 C = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow q^2 = 4 \cdot 10^{-10} - \frac{1}{\omega_0^2} i^2 = a i^2 + b \text{ avec } a = -\frac{1}{\omega_0^2} \text{ et } b = 4 \cdot 10^{-10} \text{ C}^2$$

3- a- La courbe de $q^2 = f(i^2)$ est une droite affine de pente $a = -\frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}}$

$$a = \frac{q_2^2 - q_1^2}{i_2^2 - i_1^2} = \frac{4 \cdot 10^{-10} - 0}{0 - 4 \cdot 10^{-4}} = -10^{-6} \text{ C}^2 \cdot \text{A}^{-2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{On a } \omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C} \Rightarrow L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \text{ H}$$

b- $q(t) = Q_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$. On a $Q_m = q(0) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$

$$q(0) = Q_m = Q_m \cdot \sin(\varphi_q) \Rightarrow \sin(\varphi_q) = 1 \Rightarrow \varphi_q = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow q(t) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

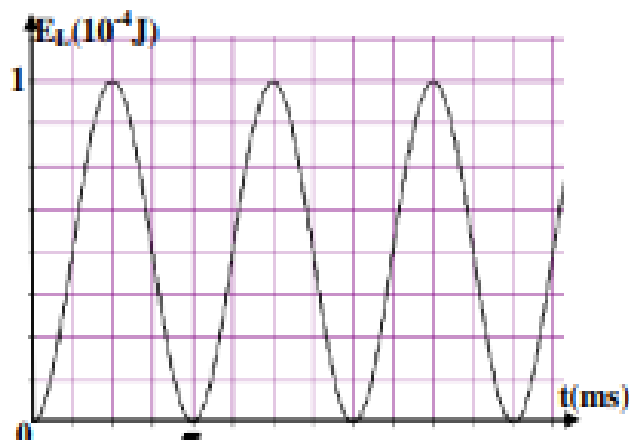
4-a- $q(t) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \sin(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2}) \cdot (1)$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} L_2 i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = 0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot \cos^2(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2}) + 0,5 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-6}} \sin^2(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2}) =$$

$$10^{-4} \cdot \cos^2(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2}) + 10^{-4} \cdot \sin^2(1000 \cdot t + \frac{\pi}{2}) = 10^{-4} \text{ J} = \text{constante}$$

b- La courbe d'évolution de l'énergie magnétique E_L en fonction du temps: $E_L = f(t)$



Exercice 8 :

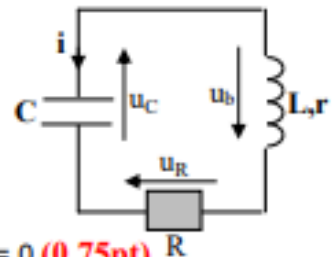
1- $q_0 = C.E$ (0,25pt)

2- Loi des mailles $u_b + u_R + u_C = 0$

Avec $u_b = L \frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Donc $u_b = L \frac{d^2q}{dt^2}$, $u_R = R.i = R \frac{dq}{dt}$ et $u_C = \frac{q}{C}$

On trouve $u_b + u_R + u_C = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L.C \frac{d^2q}{dt^2} + R.C \frac{dq}{dt} + q = 0$ (0,75pt)



3-a- Elles sont sites amorties car l'amplitude d'oscillation diminue au cours du temps (0,25pt)

b- $q(0) = 8.10^{-6} C = C.E \Rightarrow C = \frac{q(0)}{E} = \frac{8 \times 10^{-6}}{4} = 2.10^{-6} F = 2\mu F$ (0,5pt)

c- on a $\Delta t = 2,8 \pi ms = T + \frac{3T}{4} = \frac{7}{4} T \Rightarrow T = \frac{4}{7} \Delta t = \frac{4}{7} 2,8 \pi ms = 1,6 \pi ms$ (0,5pt)

d- On admet que $T = T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 LC \Rightarrow$

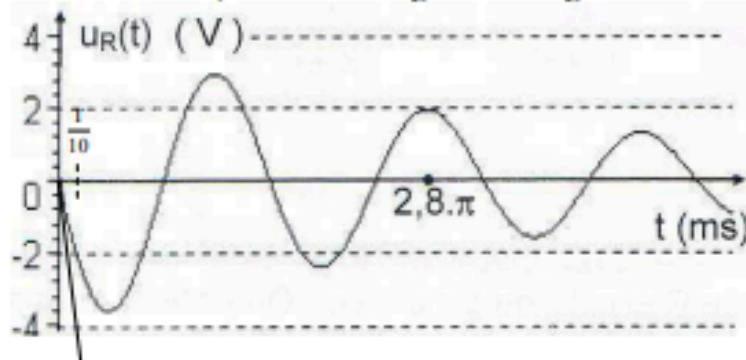
$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(1,6 \cdot \pi 10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,32 H$ (0,75pt)

e- L'énergie perdue est $E_{perdue} = E_{tot}(0) - E_{tot}(2,8\pi ms)$ (0, 75pt)

$E_{tot}(0) = E_C(0) = \frac{1}{2} C.E^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2 = 16 \cdot 10^{-6} J$

$E_{tot}(2,8\pi ms) = E_L(2,8\pi ms) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\frac{u_R}{R}\right)^2$

Pour chercher R, on trace la tangente à l'origine à la courbe de u_R .



$\frac{T}{10} = 0,16 \pi ms$

La pente de cette tangente est $a = -\frac{4}{0,16\pi \cdot 10^{-3}}$

$a = -7962 V.s^{-1}$

d'autre part $a = \frac{du_R}{dt}(0) = R \frac{di}{dt}(0)$

Donc $R = \frac{a}{\frac{di}{dt}(0)}$ et $\frac{di}{dt}(0) = \frac{u_b(0)}{L} = \frac{-E}{L} = \frac{-4}{0,32} = -12,5 A.s^{-1}$ donc $R = \frac{-7962}{-12,5} = 637 \Omega$

$E_L(2,8\pi ms) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,32 \cdot \left(\frac{2}{637}\right)^2 = 24,6 \cdot 10^{-6} J = 1,57 \cdot 10^{-6} J$

$E_{perdue} = E_{tot}(0) - E_{tot}(2,8\pi ms) = 16 \cdot 10^{-6} - 1,57 \cdot 10^{-6} = 14,43 \cdot 10^{-6} J$

4-a- On élimine le resistor doc la résistance du circuit devient nulle et par suite l'équation devient

$L.C \frac{d^2q}{dt^2} + q = 0$ (0,25pt)

b- L'énergie totale $E_{tot} = E_L + E_C$ avec $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$ (l'énergie magnétique de la bobine) et

$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$ (l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur)

Donc $E_{tot} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$

$$c- \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot 2 \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} \quad \text{or } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\text{donc } \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = L \cdot \frac{dq}{dt} \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \left(L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \right) \cdot \frac{dq}{dt}$$

D'après l'équation différentielle $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow E_{\text{tot}} = \text{constante}$ donc l'énergie totale se conserve **(0,75pt)**

d- Les courbes d'évolution des différentes formes d'énergie (0,5pt)

