Районная олимпиада 2005 год.

9 класс

1. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки K и L, а на стороне AC - точки M и N так, что отрезок KL параллелен AC, AK=KM, NL=LC. Докажите, что прямая AC перпендикулярна BP, где P- точка пересечения прямых KM и LN.
2. Витя, Толя и Сергей играли в снежки. Первый снежок бросил Толя. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Витя бросал 6 снежков, Сергей - 5, а Толя - 4 снежка. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, сколько в кого снежков попало, если мимо цели пролетело 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются).
3. Найдите целые решения $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=11$
4. Найти отношения длин диагоналей ромба, если известно, что одна из его диагоналей делится вписанной в ромб окружностью на три равные части.
5. Докажите, что если числа p и p^2+2 простые, то число p^3+4 также простое.

Указания к решению задач.
9 класс

1. *Решение:*

∠BKL=∠KAM=∠KMA=∠MKL. Аналогично ∠BLK=∠PLK.

ΔKBL=ΔKPL по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Тогда KP=KB и ΔBKP- равнобедренный. Его биссектриса совпадает с высотой, т.е. KL $\perp$ BP и, тогда AC $\perp$ BP. (Точка пересечения прямых KM и LN может располагаться внутри треугольника, но доказательство от этого не зависит)

2. *Ответ: в каждого –по одному*.

Пусть в Витю попало *а* снежков, в Сергея- *в*, в Толю- *с*.

Тогда все вместе они кинули 6*а*+5*в*+4*с*+1 снежков, что должно совпасть с *а*+*в*+*с*+13, откуда 5*а*+4*в*+3*с*=12. Это уравнение имеет в целых неотрицательных числах три решения (1;1;1), (0;0;4) и (0;3;0), из которых условию задачи удовлетворяет только *а* = *в* = *с* = 1.

3. Так как для любого целого x числа x^2 и x либо оба четны либо оба нечетны, то сумма x^2+x всегда является четной. Поэтому x^2+x+1 всегда представляет собой нечетное число. Следовательно, $\sqrt{x^2+x+1}$ -также нечетное число. Аналогично показывается, что $\sqrt{y^2-y+1}$ - нечетное число. Но сумма двух нечетных чисел не может быть равна 11. Поэтому не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих исходному уравнению.

4. *Ответ:* $2\sqrt{2}$.

Решение: Пусть $r = OT$- радиус вписанной в ромб окружности: из условия легко находим, что $AO=3r$. Из прямоугольного треугольника ATO по теореме Пифагора находим $AT=\sqrt{(3r)^2-r^2}=2\sqrt{2}r$. Далее, так как во всяком прямоугольном треугольнике произведение гипотенузы на проекцию катета равно квадрату этого катета, то из прямоугольного треугольника AOB получаем $AB\ AT=AO^2$, откуда $AB=\dfrac{AO^2}{AT}=\dfrac{9r^2}{2\sqrt{2}r}=\dfrac{9r}{2\sqrt{2}}.$ Теперь из, ΔAOB имеем $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{\dfrac{81}{8}r^2-9r^2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}r.$ Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AO}{BO}=\frac{3r2\sqrt{2}}{3r}=2\sqrt{2}$$.

5. Пусть число p при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. $p = 3к+1$, $к \in N$, тогда $p^2+2=(3к+1)^2+2=3(3к^2+2к+1)$ не является простым числом. Если же $p=3к+2$, $к \in N$, то $p^2+2=3(3к^2+4к+2)$ также не является простым числом. Следовательно, $p=3$, $p^2+2=11$ и тогда $p^3+4=31$ простое число.