

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для усвоения учащимися понятий векторов в пространстве, угла между векторами и скалярного произведения, через активное участие в различных видах деятельности.

Содержательная:

- актуализировать знания о векторах на плоскости: сложении векторов, умножении вектора на число, скалярное произведение векторов;
- обобщить скалярное произведение векторов на плоскости до пространственного случая;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: вектор в пространстве, компланарные векторы;
- познакомиться с задачами на сложение векторов, скалярное произведение векторов.

План занятия:

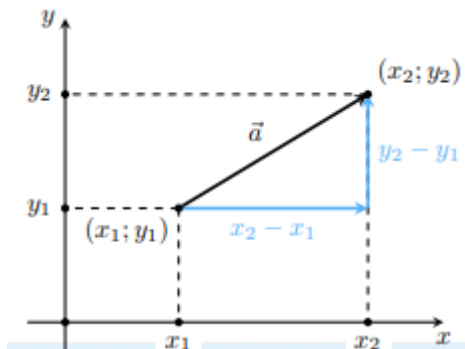
1. Скалярное произведение векторов в координатах.
2. Уравнение плоскости. Геометрический смысл определителя 2×2
3. Угол между векторами, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.
4. Площадь параллелограмма. Площадь треугольника.

Ход занятия

1. Скалярное произведение векторов в координатах.

Координаты вектора

Пусть есть вектор $\vec{a}$ с началом в точке $(x_1; y_1)$ и концом в точке $(x_2; y_2)$.



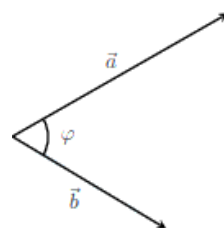
Вектор — последовательное перемещение по горизонтали и по вертикали. Тогда для перемещения из начала вектора, точки $(x_1; y_1)$, в его конец, точку $(x_2; y_2)$, надо сначала сместиться по горизонтали на $x_2 - x_1$, а затем по вертикали на $y_2 - y_1$. Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то есть для получения координат вектора нужно вычесть из координат его конца координаты его начала.

Скалярное произведение векторов в координатах

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с углом φ между ними называют следующее выражение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Здесь $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины соответствующих векторов. Иногда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают как $(\vec{a}, \vec{b})$.



Координатный метод

Если есть векторы $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

Свойства скалярного произведения

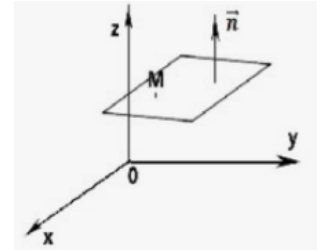
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причем равенство достигается, только если $\vec{a} = \vec{0}$;
5. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
6. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Уравнение плоскости. Геометрический смысл определителя 2x2

Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c и d – набор коэффициентов, полностью определяющий плоскость в пространстве, а вектор нормали – $\vec{n}(a; b; c)$.



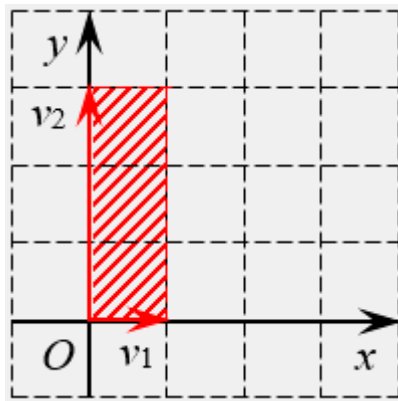
Определитель матрицы размера 2×2 – это просто площадь параллелограмма, а для матрицы 3×3 это уже объём 3-мерного параллелепипеда.

На первый взгляд это определение может показаться совершенно неадекватным. Но давайте не будем спешить с выводами – глянем на примеры.

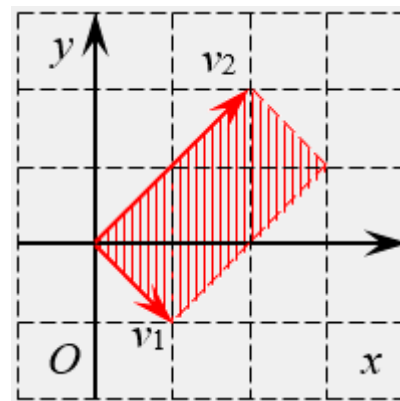
Задача. Найдите определители матриц:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Два определителя имеют размер 2×2 . Значит, это просто площади параллелограммов. Начертим их и посчитаем площадь. Первый параллелограмм построен на векторах $\vec{v}_1 = (1; 0)$ и $\vec{v}_2 = (0; 3)$, второй параллелограмм построен на векторах $\vec{v}_1 = (1; -1)$ и $\vec{v}_2 = (2; 2)$.



$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3$$



$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4$$

3. Угол между векторами, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.

Угол между векторами

Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Если векторы перпендикулярны, то угол между ними равен 90° и косинус угла между этими векторами равен 0. Поэтому скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Верно и обратное утверждение: если скалярное произведение ненулевых векторов равно 0, то эти векторы перпендикулярны:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Так как в координатах $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$, то с помощью координат можно определить угол между векторами через его косинус:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью

Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c и d – набор коэффициентов, полностью определяющий плоскость в пространстве, а вектор нормали – $\vec{n}(a; b; c)$.

По определению, угол между прямой и плоскостью — это угол α между прямой и её проекцией на эту плоскость. Часто бывает удобно вместо угла α искать угол φ между прямой и нормалью к плоскости (ясно, что это решает задачу, поскольку $\alpha + \varphi = 90^\circ$). Тем самым задача сводится к нахождению угла между направляющим вектором $\vec{l}$ данной прямой и нормальным вектором $\vec{n}$ данной плоскости. В результате имеем

$$\sin \alpha = \cos \varphi = \frac{|\vec{l} \cdot \vec{n}|}{|\vec{l}| |\vec{n}|}$$

Модуль в числителе поставлен на случай, если вдруг окажется $\vec{l} \cdot \vec{n} < 0$; тогда острый угол φ будет смежным с тупым углом между векторами $\vec{l}$ и $\vec{n}$.

Угол между плоскостями

Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c и d – набор коэффициентов, полностью определяющий плоскость в пространстве, а вектор нормали – $\vec{n}(a; b; c)$.

При использовании векторно-координатного метода в качестве угла между плоскостями используют угол между векторами, перпендикулярными данным плоскостям. Их называют нормальными векторами или векторами нормали.

Алгоритм нахождения угла между плоскостями:

- 1 Ввести систему координат и вписать в нее данную фигуру.
- 2 Найти векторы $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$, перпендикулярные к данным плоскостям (векторы нормали).
3. Вычислить искомый угол φ по формуле:

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

4. Площадь параллелограмма. Площадь треугольника

Площадь параллелограмма

Определитель матрицы размера 2×2 – это просто площадь параллелограмма, столбцы которого – координаты векторов.

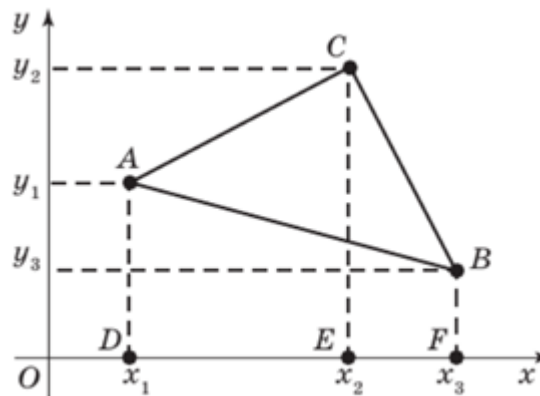
Чтобы вычислить определитель второго порядка, нужно перемножить элементы, стоящие на главной диагонали, и вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

$$\Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Площадь треугольника

Для любых точек А (x₁;y₁), С (x₂;y₂) и В (x₃;y₃), не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$



Разобранные задания

Задание1. Угол между векторами простые примеры

1.1. Векторы: $\vec{a} = (1; \sqrt{3})$ и $\vec{b} = (2; 0)$

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot 0 = 2$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2; \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

Найдем значение косинуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{тогда} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

1.2. Векторы: $\vec{a} = (1; 1)$ и $\vec{b} = (1; -1)$

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Найдем значение косинуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{0}{2} = 0$$

тогда $\varphi = \arccos(0) = 90^\circ$

1.3. Векторы: $\vec{a} = (1;1)$ и $\vec{b} = (1;0)$

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = 1$$

Найдем значение косинуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{тогда} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

Задание 2. Угол между прямой и плоскостью простые примеры

2.1. Вектор, направляющий к прямой $\vec{a} = (1;1;1)$ и плоскость $x + y + z = 3$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n} = (1;1;1)$).

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3};$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Найдем значение синуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\sin \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{тогда} \quad \varphi = \arcsin(1) = 90^\circ$$

2.2. Вектор, направляющий к прямой $\vec{a} = (1;0;1)$ и плоскость $y = 0$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n} = (0;1;0)$).

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2};$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{0+1+0} = 1$$

Найдем значение синуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\sin \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot 1} = 0$$

$$\text{тогда } \varphi = \arcsin(0) = 0^\circ$$

2.3. Вектор, направляющий к прямой $\vec{a} = (1; 1; 0)$ и плоскость $x + y = 0$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n} = (1; 1; 0)$).

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

Найдем значение синуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\sin \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 1$$

$$\text{тогда } \varphi = \arcsin(1) = 90^\circ$$

Задание 3. Угол между плоскостями простые примеры

3.1. Плоскость $y = 0$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$), и плоскость $z = 0$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$).

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$2) |\vec{n}_1| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{0+1+0} = 1; \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{0+0+1} = 1$$

Найдем значение косинуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{тогда } \varphi = \arccos(0) = 90^\circ$$

3.2. Плоскость $x + 2y + 3z = 1$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$), и плоскость $3x - y + 2z = 4$ (вектор нормали к плоскости $\vec{n}_2 = (3; -1; 2)$).

Найдем скалярное произведение векторов и их длины:

$$1) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 7$$

$$2) |\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$$

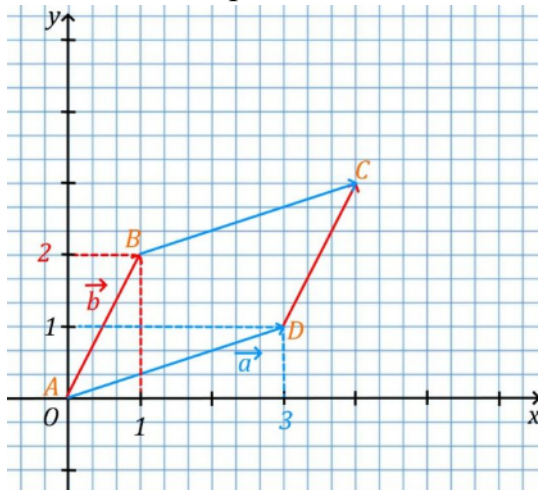
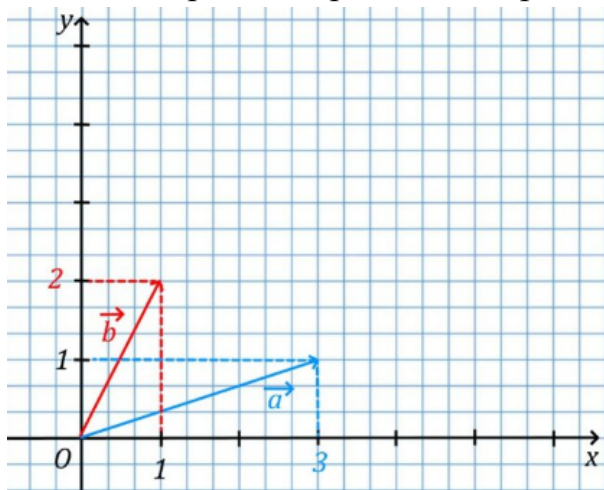
$$|\vec{n}_2| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

Найдем значение косинуса угла между векторами и сделаем вывод о величине угла:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

тогда $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

Задание 4. У вектора $\vec{a}$ координаты (3; 1), а у вектора $\vec{b}$ координаты (2; 1). Найдите площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.



Площадь данного параллелограмма и будет являться определителем матрицы. Площадь данного параллелограмма $S_{ABCD}=5$. И определитель матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$$

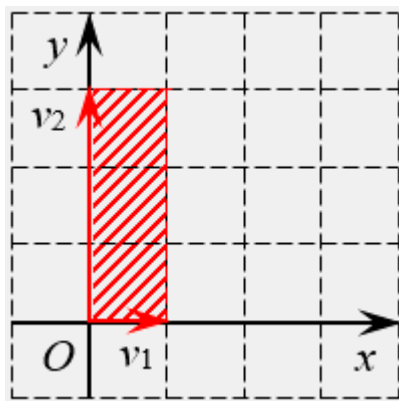
Задание 5. Вычислить площадь параллелограмма, если его образующие отрезки задаются векторами $\vec{m}$ с координатами {2;3} и $\vec{d}$ с координатами {-5;6}.

$$S = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = \sqrt{12 + 15} = 3\sqrt{3}.$$

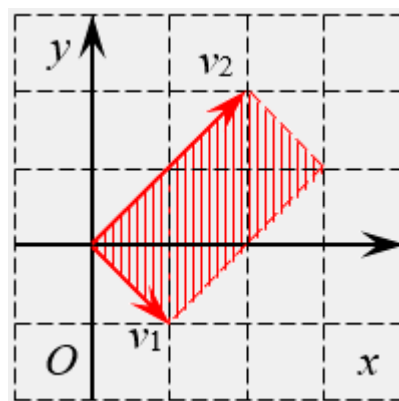
Задание 6. Найдите определители матриц:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Два определителя имеют размер 2x2. Значит, это просто площади параллелограммов. Начертим их и посчитаем площадь. Первый параллелограмм построен на векторах $v_1 = (1; 0)$ и $v_2 = (0; 3)$, второй параллелограмм построен на векторах $v_1 = (1; -1)$ и $v_2 = (2; 2)$.



$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3$$



$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4$$

Задание 7. Даны точки A(1;1), B(6;4), C(8;2). Найдите площадь треугольника ABC.
Решение: воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

$$S = \frac{1}{2} |((6 - 1)(2 - 1) - (8 - 1)(4 - 1))| = \frac{1}{2} |-15| = 7,5.$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 7,5$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Как вычисляется скалярное произведение векторов в координатах?

1.2. Приведите запись уравнения плоскости.

1.2. В чем заключается геометрический смысл определителя 2×2 .

1.4. Как вычисляются:

- угол между векторами;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между плоскостями.

1.5. Запишите формулу для вычисления площади параллелограмма через векторное задание смежных сторон.

1.6. Запишите формулу для вычисления площади треугольника через координаты вершин.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Найдите угол между векторами

$$\vec{a} = (1, 0) \text{ и } \vec{b} = (1, 0); \quad \vec{a} = (1, 1) \text{ и } \vec{b} = (1, -1); \quad \vec{a} = (1, 3) \text{ и } \vec{b} = (2, 0).$$

2.2. Найдите угол между прямой, заданной вектором $\vec{a} = (1, \sqrt{3}, 2)$ и плоскостью $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$.

2.3. Найдите угол между плоскостями $z = 0$ и $x + z = 1$.

Отчетность

Работы принимаются до 3 декабря 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 26.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 26.11.25 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна



Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.