

Μέγιστη ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας και μεταφορά ορμής

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 .



A. Για ποια τιμή του λόγου $\frac{m_1}{m_2}$ επιτυγχάνεται η μέγιστη ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 ;

i. $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$

ii. $\frac{m_1}{m_2} = 1$

iii. $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

B. Η μέγιστη ποσοστιαία μεταφορά ορμής από το σώμα Σ_1 στο αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 επιτυγχάνεται για λόγο μαζών:

i. $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$

ii. $\frac{m_1}{m_2} = 1$

iii. $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

A. Σωστή επιλογή είναι το ii.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική. Από τη διατήρηση της ενέργειας στην αρχή και στο τέλος της κρούσης έχουμε:

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2 = \text{σταθερή} \rightarrow K_1 = K'_1 + K'_2 \rightarrow K'_1 = K_1 - K'_2 \quad (1)$$

$$K'_1 \geq 0 \rightarrow K_1 - K'_2 \geq 0 \rightarrow K'_2 \leq K_1 \quad (2)$$

Η μέγιστη μεταφορά ενέργειας συμβαίνει όταν το Σ_1 μεταφέρει όλη την ενέργειά του στο Σ_2 δηλαδή να μεταφέρει το 100% της ενέργειάς του. Στην περίπτωση αυτή από τη σχέση (2) προκύπτει $K_{2,\max} = K_1$ και $K'_1 = 0$.

Έτσι η ελάχιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει το Σ_1 μετά την κρούση είναι η μηδενική.

$$K'_{1,\min} = 0 \rightarrow v'_1 = 0 \rightarrow \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = 0 \xrightarrow{v_1 \neq 0} m_1 - m_2 = 0 \rightarrow m_1 = m_2$$

Η ποσοστιαία μεταφορά της ενέργειας είναι:

$$\Pi\% = \frac{\Delta K_2}{K_1} 100\% = \frac{K'_2 - K_2}{K_1} 100\% \rightarrow \Pi\% = \frac{K_1}{K_1} 100\% \rightarrow \Pi\% = 100\%$$

B. Σωστή επιλογή είναι το *i*.

Από τη διατήρηση της ορμής:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \text{σταθ.} \rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{p}'_2$$

Η παραπάνω σχέση είναι διανυσματική και όταν αντιστρέφει την κατεύθυνσή του το σώμα Σ_1 τότε ισχύει:

$$|\vec{p}_1| + |\vec{p}'_1| = |\vec{p}'_2| \quad (2)$$

και το μέτρο της ορμής του σώματος 2 αυξάνεται.

Από τη διατήρηση της ενέργειας:

$$K_1 = K'_1 + K'_2 \rightarrow K'_2 = K_1 - K'_1 \geq 0 \rightarrow K_1 \geq K'_1 \rightarrow K'_{1,\max} = K_1 \rightarrow |\vec{p}'_{1,\max}| = |\vec{p}_1|$$

Και προφανώς ανακλάται καθώς αν ήταν ομόρροπα τότε από την ΑΔΟ είναι σαν να μην έχει γίνει κρούση.

Από τη σχέση (2)

$$|\vec{p}'_{2,\max}| = |\vec{p}'_{1,\max}| + |\vec{p}_1| \rightarrow |\vec{p}'_{2,\max}| = 2|\vec{p}_1|$$

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ορμής $|\vec{p}'_1|$ είναι όταν $|\vec{p}'_{1,\max}| = |\vec{p}_1|$ και συμβαίνει όταν το ακίνητο σώμα Σ_2 έχει πολύ μεγάλη μάζα και το Σ_1 ανακλάται με το ίδιο μέτρο ορμής.

$$\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$$

Συνεπώς

Αναλυτικά από τις σχέσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης

$$-v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{(m_1 + m_2)} \rightarrow -1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \rightarrow -1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} \rightarrow -\frac{m_1}{m_2} - 1 = \frac{m_1}{m_2} - 1 \rightarrow -2\frac{m_1}{m_2} = 0 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 0$$

Η ποσοστιαία μεταφορά της ορμής είναι:

$$\Pi\% = \frac{|\Delta \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|} 100\% = \frac{2|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_1|} 100\% \rightarrow \Pi\% = 200\%$$

Σχόλια

1) Συνήθως λέμε ότι σε κρούση σώματος με σώμα πολύ μεγάλης μάζας π.χ. τοίχος δεν διατηρείται η ορμή του συστήματος. Αν όμως διευρύνουμε το σύστημα τόσο ώστε να συμπεριληφθεί και ο τοίχος και να προκύπτει μονωμένο σύστημα, τότε πρέπει να διατηρείται η ορμή σταθερή.

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \text{σταθ.} \rightarrow P_1 = -P_1 + M \cdot u \rightarrow 2P_1 = M \cdot v$$

Στην περίπτωση αυτή $M \rightarrow \infty$ και $v \rightarrow 0$. Δηλαδή $M \cdot v = \infty \cdot 0$. Στα μαθηματικά αυτό αποτελεί απροσδιόριστη μορφή. Απροσδιοριστία σημαίνει ότι δεν ξέρουμε πόσο κάνει όχι ότι δεν υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση η απροσδιοριστία ισούται με $2P_1$.

2) Προσοχή αναφερόμαστε σε μέγιστη ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας και ορμής σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα και όχι σε απόκτηση μέγιστης τιμής ορμής και ενέργειας στο αρχικά ακίνητο σώμα.

Π.χ. Αν ένα σώμα **πολύ μεγάλης μάζας** $M \gg m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου v και συγκρουστεί με **ακίνητο σώμα πολύ μικρής μάζας** $m \ll M$, τότε το σώμα μικρής μάζας θα αποκτήσει ταχύτητα με μέτρο $v_2' = 2v$ και η ορμή του θα είναι $p_2' = 2m \cdot v$. Η ποσοστιαία μεταφορά ορμής από το σώμα M στο σώμα m είναι όμως σχεδόν μηδενική.

$$\Pi\% = \frac{|\Delta \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|} 100\% = \frac{2m \cdot v}{M \cdot v} 100\% \rightarrow \Pi\% = \frac{2m}{M} 100\% \rightarrow \Pi\% \approx 0$$

Π.χ.

- Αν $M=1000\text{Kg}$, $v_M=10\text{m/s}$ και $m=0,1\text{kg}$ και $v_m=0$ τότε:

Για το σώμα μάζας M τόσο πριν όσο και μετά την κρούση θα ισχύει $P_M=10.000\text{Kg}\cdot\text{m/s}$, $K_M=50.000\text{J}$.

Για το σώμα μάζας m , $v_m\approx 20\text{m/s}$, $P_m=2\text{Kg}\cdot\text{m/s}$, $K_m=20\text{J}$

Η ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας είναι:

$$\Pi\% = \frac{\Delta K_2}{K_1} 100\% \rightarrow \Pi\% = \frac{20}{50.000} 100\% \rightarrow \Pi\% = 0,04\%$$

Και η ποσοστιαία μεταφορά ορμής είναι:

$$\Pi\% = \frac{\Delta P_2}{P_1} 100\% \rightarrow \Pi\% = \frac{2}{10.000} 100\% \rightarrow \Pi\% = 0,02\%$$

3) Γιατί η μέγιστη ποσοστιαία μεταφορά ενέργειας είναι 100% ενώ της ορμής μπορεί να είναι και μεγαλύτερη από 100% ;

Η ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος. Η μεταβολή της είναι η αφαίρεση της τελικής της τιμής μείον την αρχική της τιμή. Δεν έχει κατεύθυνση.

Για ακίνητο το δεύτερο σώμα ισχύει $K_{1,αρχ} \geq |\Delta K_1|$

Στην ελαστική κρούση ισχύει:

$$|\Delta K_2| = |\Delta K_1| = |K_{1,τελ} - K_{1,αρχ}| \rightarrow$$

$$\text{Όταν } K_{1,τελ}=0 \text{ τότε } |\Delta K_2| = |\Delta K_1| = K_{1,αρχ} = \max$$

Ένα σώμα δεν μπορεί να μεταφέρει μεγαλύτερο ποσό ενέργειας από όσο έχει για αυτό προκύπτει $\Pi_{\max}\% = 100\%$.

Αντίθετα, η ορμή ως διανυσματικό μέγεθος έχει σαν αποτέλεσμα ένα σώμα να μπορεί να μεταφέρει ορμή περισσότερη από όση έχει και να ισχύει $|\vec{\Delta p}_1| > |\vec{p}_1|$ όταν το σώμα αλλάζει κατεύθυνση.

Στην ελαστική κρούση με ακίνητο εμπόδιο πολύ μεγάλης μάζας έχουμε: $|\vec{\Delta p}_2| = |\vec{\Delta p}_1| = 2|\vec{p}_1|$.