

Számelmélet 2.

Végeredmények

- 1) Egyik sem lehet, mert 2, 3, 7, 8-ra nem végződhet négyzetszám.
- 2) 8
- 3) A szám utolsó számjegye 3, ezért nem lehet.
- 4) Nem. Az A utolsó 2 jegye 02, a B-é 13, így A+B utolsó 2 jegye 15, azaz 5-tel osztható, de 25-tel nem. Ha egy négyzetszám osztható egy prímmel, akkor annak négyzetével is oszthatónak kell lennie. (A négyzetszámok prímtenyezős felbontásában minden prím kitevőjének párosnak lennie!)
- 5) Az A elemszáma: $|A|=10$, így részhalmazainak száma $2^{10}=1024$.
- 6) Az összeg osztható 7-tel, mert mindhárom tagja osztható 7-tel, de 49-cel nem osztható, mert az első két tagja osztható, de a harmadik nem, ezért nem lehet négyzetszám.
- 7) 119
- 8) 1
- 9) 266
- 10) 3 db. (A négy legkisebb prím: 2, 3, 5, 7; a négy legkisebb összetett: 4, 6, 8, 9, legkisebb közös többszörösük 2520.)
- 11) 40 db.
- 12) 31 db (a négyzetszámok)
- 13) 135 vagy 315 vagy 225
- 14) A szorzat $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ alakja mutatja, hogy 5 db egymást követő pozitív egész szorzata, így közülük legalább kettő páros, amiből az egyik négygyel is osztható, legalább egy 3-mal osztható és pontosan egy ötten osztható, azaz szorzatuk osztható $3 \cdot 5 \cdot 8 = cal$, azaz 120-szal.
- 15) $\frac{n+5}{n-3} = \frac{n-3+8}{n-3} = 1 + \frac{8}{n-3}$ átalakítás mutatja, hogy pontosan akkor lesz természetes szám, ha $n-3$ a 8 osztója. Így a megoldások: 1, 2, 4, 5, 7, 11.
- 16) $\frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^2-1+3}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)+3}{n+1} = n-1 + \frac{3}{n+1}$ átalakítás mutatja, hogy pontosan akkor lesz egész szám, ha $n+1$ a 3 osztója. Így a megoldások az egész számokon: $-4, -2, 0, 2$.
- 17) 8-as számrendszer
- 18) (a) 5, (b) 11, (c) 2.
- 19) Az (a;b) számpárok lehetnek: (0; 6); (6; 0); (-2; -8); (-8; -2).

20) Mivel $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$, ezért

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}, \text{ hisz}$$

a kapott szorzat könnyen egyszerűsíthető. (II. módszer: Az állítás teljes indukcióval is könnyen belátható.)