Számelmélet 2.

Végeredmények

1) Egyik sem lehet, mert 2, 3, 7, 8-ra nem végződhet négyzetszám.
2) 8
3) A szám utolsó számjegye 3, ezért nem lehet.
4) Nem. Az A utolsó 2 jegye 02, a B-é 13, így A+B utolsó 2 jegye 15, azaz 5-tel osztható, de 25-tel nem. Ha egy négyzetszám osztható egy prímmel, akkor annak négyzetével is oszthatónak kell lennie. (A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prím kitevőjének párosnak lennie!)
5) Az A elemszáma: |A|=10, így részhalmazainak száma 2^{10}=1024.
6) Az összeg osztható 7-tel, mert mindhárom tagja osztható 7-tel, de 49-cel nem osztható, mert az első két tagja osztható, de a harmadik nem, ezért nem lehet négyzetszám.
7) 119
8) 1
9) 266
10) 3 db. (A négy legkisebb prím: 2, 3, 5, 7; a négy legkisebb összetett: 4, 6, 8, 9, legkisebb közös többszörösük 2520.)
11) 40 db.
12) 31 db (a négyzetszámok)
13) 135 vagy 315 vagy 225
14) A szorzat $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ alakja mutatja, hogy 5 db egymást követő pozitív egész szorzata, így közülük legalább kettő páros, amiből az egyik néggyel is osztható, legalább egy 3-mal osztható és pontosan egy öttel osztható, azaz szorzatuk osztható $3{\cdot}5{\cdot}8-cal$, azaz 120-szal.
15) $\frac{n+5}{n-3}=\frac{n-3+8}{n-3}=1+\frac{8}{n-3}$ átalakítás mutatja, hogy pontosan akkor lesz természetes szám, ha $n-3$ a 8 osztója. Így a megoldások: 1, 2, 4, 5, 7, 11.
16) $\frac{n^2+2}{n+1}=\frac{n^2-1+3}{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)+3}{n+1}=n-1+\frac{3}{n+1}$ átalakítás mutatja, hogy pontosan akkor lesz egész szám, ha $n+1$ a 3 osztója. Így a megoldások az egész számokon: $-4,\ -2,\ 0,\ 2.$
17) 8-as számrendszer
18) (a) 5, (b) 11, (c) 2.
19) Az (a;b) számpárok lehetnek: (0; 6); (6; 0); (-2; -8); (-8; -2).
20) Mivel $1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$, ezért

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right).....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot.....\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

, hisz a kapott szorzat könnyen egyszerűsíthető. (II. módszer: Az állítás teljes indukcióval is könnyen belátható.)