

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ
ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої
освіти
за спеціальністю
124 – Системний аналіз
113 – Прикладна математика

Одеса – 2025

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ
ІНСТИТУТ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої
освіти
за спеціальністю
124 – Системний аналіз
113 – Прикладна математика**

Затверджено
на засіданні кафедри ПМІТ
Протокол № 1 від 30.08.2024 р.

Одеса – 2025

Конспект лекцій з дисципліни «Математичне моделювання» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 124 – Системний аналіз (освітньо-професійна програма: «Системний аналіз та наука про дані» – 2025) та за спеціальністю 113 – Прикладна математика (освітньо-професійна програма: «Математичне забезпечення комп’ютерних систем» – 2025)/ Укл.: *М. В. Полякова*. – Одеса: Одеська політехніка, 2025. – 46 с.

Укладач: **Полякова М. В.**, докт. техн. наук, доц.

ЗМІСТ

Вступ	5
Лекція 1. Математична модель. Поняття математичної моделі. Процес математичного моделювання.....	6
Лекція 2. Математичне моделювання випадкових процесів. Поняття сигналу. Поняття випадкового процесу. Методи опису випадкового процесу.	7
Лекція 3. Математичні моделі реалізацій випадкових процесів. Стаціонарні та нестаціонарні випадкові процеси. Ергодичність. Класи випадкових процесів.	9
Лекція 4. Математичні моделі ансамблю реалізацій випадкових процесів. Біла завада. Сигнал як коливання з випадковою згинаючою та фазою.	12
Лекція 5. Математичне моделювання сигналів. Частотно-часове представлення сигналів. Дискретне представлення сигналів. Теорема відліків.	15
Лекція 6. Властивості перетворення фур(є. Зсув сигналів у часі. Диференціювання та інтегрування сигналів. Перетворення фур(є добутку 2-х сигналів.	18
Лекція 7. Детермінована складова часового ряду. Визначення тренду часового ряду. Моделі тренду. Сезонна і циклічна компоненти. Випадкова складова часового ряду.	21
Лекція 8. Випадкова складова часового ряду. Моделі випадкової компоненти. Числові характеристики часових рядів. Оцінки числових характеристик часових рядів.	24
Лекція 9. Методи зведення до стаціонарності шляхом виділення тренду. Лінійний тренд. Виділення поліноміального тренду. Виділення логарифмічного тренду.	27
Лекція 10. Виділення тренду методами згладжування. Метод ковзних середніх. Метод експоненційного згладжування.	30
Лекція 11. Математичне моделювання півтонових зображень. Опис півтонового зображення. Просторова фільтрація зображення: лінійна, медіанна фільтрація.	33
Лекція 12. Поняття дискретної згортки. Застосування лінійної фільтрації для виділення контурів півтонового зображення.	36
Лекція 13. Фільтрація зображень в частотній області. Етапи фільтрації в частотній області. Відповідність між характеристиками фільтру в просторовій і частотній області.	38
Лекція 14. Згладжувальні фільтри. Ідеальний фільтр нижніх частот і його передатна функція. Пояснення явища гіббса. Фільтр нижніх частот баттерворта і його передатна функція. Гаусівський фільтр нижніх частот і його передатна функція.	40
Лекція 15. Фільтри підвищення різкості. Ідеальний фільтр верхніх частот і його передатна функція. Фільтр верхніх частот баттерворта і його передатна функція. Гаусівський фільтр верхніх частот і його передатна функція. Згладжувальні фільтри.	43
Рекомендована література	44

Вступ

Математичне моделювання є одним із ключових інструментів сучасної науки та техніки, що дозволяє досліджувати складні процеси й явища реального світу за допомогою математичних методів. Суть математичного моделювання полягає у побудові формалізованої моделі об'єкта, процесу або системи, яка відображає найважливіші властивості досліджуваного явища та дає змогу аналізувати його поведінку без безпосереднього експериментування з реальним об'єктом.

Використання математичних моделей сприяє глибшому розумінню закономірностей функціонування систем, прогнозуванню їх розвитку, оптимізації процесів і прийняттю обґрунтованих рішень. Математичне моделювання широко застосовується у фізиці, економіці, біології, екології, інженерії, соціальних науках та багатьох інших галузях.

Метою даного курсу є формування у здобувачів теоретичних знань і практичних навичок побудови, аналізу та інтерпретації математичних моделей. У конспекті лекцій розглядаються основні етапи моделювання, класифікація моделей, методи їх дослідження, а також приклади застосування математичного моделювання для розв'язання прикладних задач.

ЛЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. ПРОЦЕС МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.

1. Поняття математичної моделі.
2. Процес математичного моделювання.

1. Поняття математичної моделі.

Математична модель – це абстракція реального світу, в якій співвідношення, що цікавлять дослідника, замінені відповідними стосунками між математичними об'єктами.

Якщо в описі математичної моделі беруть участь випадкові величини, то вона називається імовірнісною або стохастичною. Інакше модель детермінована. Детерміновані математичні моделі вивчаються в теорії апроксимації, а стохастичні моделі використовуються в теорії вірогідності і в теорії випадкових процесів. Загальне призначення цих теорій полягає в обґрунтованому виборі з множини можливих моделей тієї моделі, яка найкращому образом відповідає даним, що є у дослідника.

2. Процес математичного моделювання.

Математичне моделювання – це знання відповідних моделей і уміння застосувати ці моделі до реальної дієвості. Математичне моделювання включає також конструювання також нових математичних моделей, що відображають специфіку конкретного завдання.

Математичне моделювання використовує інформацію двох типів.

Тип А. Це апіорна інформація про природу і характер досліджуваних співвідношень.

Тип Б. Це статистичні дані, що характеризують процес і результат функціонування системи.

Можуть виникнути такі ситуації.

1. Дослідник має інформацію обох типів, тоді з апіорної інформації про співвідношення виводиться загальний вид аналітичних рівнянь. Ці рівняння описують досліджувані співвідношення. Далі по статистичним даним оцінюються параметри, що входять в ці рівняння.

2. Дослідник має інформацію типу А.

3. Дослідник при наявності інформації обох типів бажає зімітувати, тобто програти поведінку реальної системи при зміні чисельних значень параметрів.

4. Дослідник бажає штучно, спираючись на модельні співвідношення, згенерувати статистичні дані типу Б з метою їх поповнення.

У ситуаціях 2-4 використовується статистичне моделювання за методом Монте-Карло.

Приклад. Нехай проводиться діагностування технічних об'єктів двох типів. Є дані про 35 об'єктів 1-го типу та 41 об'єктів 2-го типу. За цими даними підбирається математична модель об'єкта, і проводиться діагностування. Як характеристик методу діагностики використовують:

1) ймовірність помилки першого роду – це ймовірність того, що об'єкт 1-го класу помилково віднесено до 2-го класу;

2) ймовірність помилки другого роду – ймовірність того, що об'єкт 2-го класу помилково віднесено до 1-го класу.

Для обчислення цих помилок у відсотках, необхідні дані по 100 об'єктах одного класу і 100 іншого. Тоді генеруються модельні дані за допомогою побудованої моделі. Проводиться діагностика цих даних і обчислюються помилки першого та другого роду.

1.3. Процес математичного моделювання включає 4 етапи.

1-й етап. Формування законів, які зв'язують основні об'єкти моделі.

На даному етапі необхідні факти про об'єкти та їх взаємозв'язки.

А. Визначення мети моделювання і показників, що характеризують об'єкти. Деякі з показників вважаємо вхідними – це ті, які можна регулювати або реєструвати. Вихідні показники – це ті, які важко піддаються реєстрації або прогнозом, вони є об'єктом дослідження. Проводиться збір статичних даних.

Б. Формалізація вихідних припущень та їх експериментальна перевірка. Якщо немає можливості експериментально перевірити припущення, їх підтверджують теоретичними міркуваннями про механізм досліджуваного явища.

В. Виведення модельних співвідношень, що пов'язують вхідні і вихідні показники. Отримуємо аналітичну запис, в якій поряд з відомими числовими значеннями, представленими статичними даними, присутні невідомі параметри моделі.

Г. Оцінювання невідомих параметрів, що входять в аналітичний запис моделі. Дослідження властивостей отриманих оцінок і їх точності.

2-й етап. Дослідження завдань, до яких призводить математична модель. Вирішується пряме завдання – в результаті аналізу моделі знаходять вихідні дані. Часто математичні завдання, що виникають на основі різних явищ, бувають схожими. Наприклад, завдання лінійного програмування відображає ситуації різної природи.

3-й етап. Верифікація моделі. Тут вирішується зворотна задача – відшукування невідомих причин відомих наслідків. Перевіряється, чи узгоджуються результати спостережень з наслідками моделі в межах точності спостережень. Якщо ухилення виходить за межі точності спостереження, намагаються змінити значення параметрів моделі. Якщо ні при яких значеннях параметрів не досягається задана точність спостережень, то модель обрана не коректно і вона не придатна для розглянутих явищ.

4-й етап. Подальший аналіз моделі у зв'язку з накопиченням даних про явища, що досліджуються, а також модернізація моделі. В процесі розвитку науки і техніки, дані про явища, що досліджуються, уточнюються. Настає момент, коли висновки, отримані на основі обраної математичної моделі, не відповідають даним про явище. Виникає необхідність побудови нової, більш сучасної математичної моделі.

Контрольні питання

1. Які етапи процесу математичного моделювання?
2. Що таке математичне моделювання?
3. Що таке математична модель?

ЛЕКЦІЯ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ. ПОНЯТТЯ СИГНАЛУ. ПОНЯТТЯ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ. МЕТОДИ ОПИСУ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ.

1. Поняття сигналу.
2. Поняття випадкового процесу.
3. Методи опису випадкового процесу.

1. Поняття сигналу.

Для того, щоб два об'єкти містили інформацію один про одного потрібно, щоб між їх станами було встановлено відповідність, тоді за станом одного об'єкта можна судити про стан іншого.

Інформація – це властивість матерії, що складається в тому, що в результаті взаємодії між об'єктами встановлюється відповідність. Сигнал – це матеріальний носій інформації, це засіб для перенесення інформації в просторі і у часі. Об'єкт взаємодіє не тільки з важливими для нас об'єктами, тому сторонні впливи на сигнал називаються завадою. У якості сигналів використовують стан об'єктів.

2. Поняття випадкового процесу.

При побудові математичної моделі фізичного об'єкту його часто описують функцією часу $x(t)$. Проте в деяких випадках, до експериментів, точно невідомо, яка функція буде отримана.

Приклад. Звукове коливання в аудіозаписі описується функцією, залежною від часу.

Випадковий процес – це сукупність (ансамбль) функцій часу, що підкоряються загальній статистичній закономірності. Одна з цих функцій, повністю відома після спостереження, називається реалізацією випадкового процесу.

Випадкові процеси бувають безперервні і дискретні за часом. Випадковий процес безперервний за часом, якщо його значення визначені для всіх значень часу з деякого кінцевого або безконечного інтервалу. Дискретні за часом випадкові процеси задаються на множині точок часової осі. Безперервні і дискретні за інформативним параметром випадкові процеси розрізняються залежно від того, з якої множини (безперервної або дискретної) набуває значень реалізація випадкового процесу.

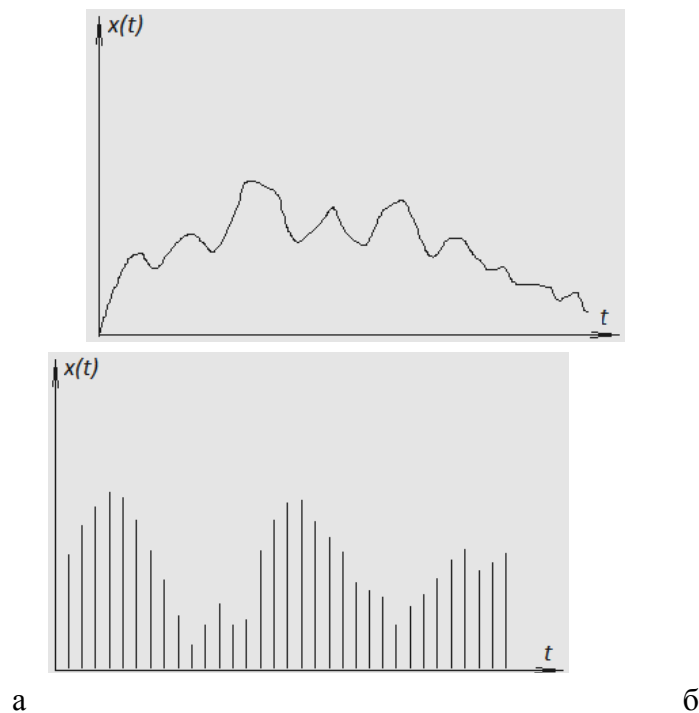


Рис. 2.1. Випадковий процес: а – безперервний за часом і за інформативним параметром; б – дискретний за часом і безперервний за інформативним параметром.

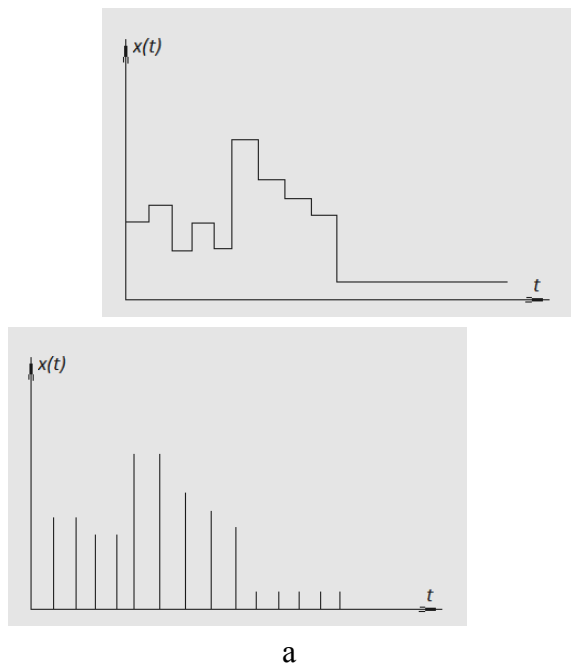


Рис. 2.2. Випадковий процес: а – дискретний за інформативним параметром і безперервний за часом; б – дискретний за часом і за інформативним параметром.

3. Методи опису випадкового процесу.

Методи опису випадкових процесів наступні.

1. За допомогою сукупності реалізацій $x_1(t)$, $x_2(t)$..., $x_n(t)$.
2. Щоб охарактеризувати випадковий процес можна описати, як зв'язані значення реалізацій, розділені деякими проміжками часу. Для цього використовують щільність розподілу n -го порядку $p_n(x_1, \dots, x_n | t_1, \dots, t_n)$. Наприклад, зв'язок двох значень випадкового процесу описується щільністю вірогідності 2-го порядку $p_2(x_1, x_2 | t_1, t_2)$.

Контрольні питання

1. Які існують методи опису випадкових процесів?
2. Що таке випадковий процес?
3. Які існують класи випадкових процесів?

ЛЕКЦІЯ 3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛІЗАЦІЙ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ. СТАЦІОНАРНІ ТА НЕСТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. ЕРГОДІЧНІСТЬ. КЛАСИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

1. Стаціонарні та нестаціонарні випадкові процеси.
2. Ергодичність.
3. Класи випадкових процесів.

1. Стаціонарні та нестаціонарні випадкові процеси.

Стаціонарність — це характеристика випадкового процесу залежно від постійності або мінливості його статистичних характеристик. Випадковий процес $x(t)$ називається стаціонарним у вузькому сенсі, якщо для любого n n -мірна щільність вірогідності не змінюється при умові зсуву часу на T :

$$P_n(x_1, \dots, x_n | t_1, \dots, t_n) = P_n(x_1, \dots, x_n | t_1 + T, \dots, t_n + T),$$

де T – це інтервал часу.

Якщо умова незалежності від зсуву часу виконується лише для перших 2-х моментів розподілу, то випадковий процес називається стаціонарним в широкому сенсі. Перші два моменти розподілу – це математичне очікування і автокореляційна функція.

2. Ергодичність.

Замість того щоб розглядати розподіл випадкового процесу, часто обмежуються його числовими характеристиками (моментами). Якщо розподіл невідомий, то моменти оцінюють статистично. Ергодичним називається випадковий процес, для якого величина, отримана усереднюванням за часом (по одній реалізації) збігається з величиною, отриманою усереднюванням по ансамблю при фіксованому часі. Ергодичність має на увазі збіг усереднювань по будь-якій реалізації.

3. Класи випадкових процесів.

При розгляді властивостей систем потрібно враховувати властивості сигналів в цих системах. Розглянемо математичні моделі реалізацій випадкового процесу у вигляді безперервних сигналів.

1. Гармонійні сигнали — це сигнали вигляду $x(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$, $-\infty < t < +\infty$, $S, \omega > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, S – амплітуда сигналу, ω – циклічна частота, φ – фаза гармонійного коливання. Циклічна частота пов'язана із звичайною частотою за формулою $\omega = 2\pi f$, де f – частота.

2. Модульовані сигнали. В таких сигналах корисна інформація переноситься одним з параметрів гармонійного коливання. При цьому само коливання перестає бути гармонійним. Процес зміни параметра синусоїди називається модуляцією. Виділяють наступні види модуляції.

Амплітудна модуляція. Інформативний параметр такого сигналу – амплітуда. Амплітудно-модульований сигнал має вигляд (рис. 3.1, а):

$$x(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

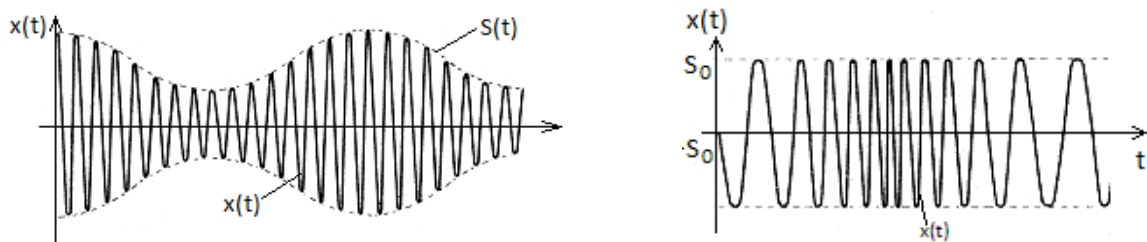


Рис. 3.1. Амплітудно-модульований сигнал (а) та частотно-модульований сигнал (б).

Частотна модуляція. Інформативний параметр – частота. Частотно-модульований сигнал має вигляд (рис. 3.1, б):

$$x(t) = s_0 \cos(\omega(t)t + \varphi_0).$$

Фазова модуляція. Інформативний параметр – фаза. Фазомодульований сигнал має вигляд (рис. 3.2, а):

$$x(t) = S_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

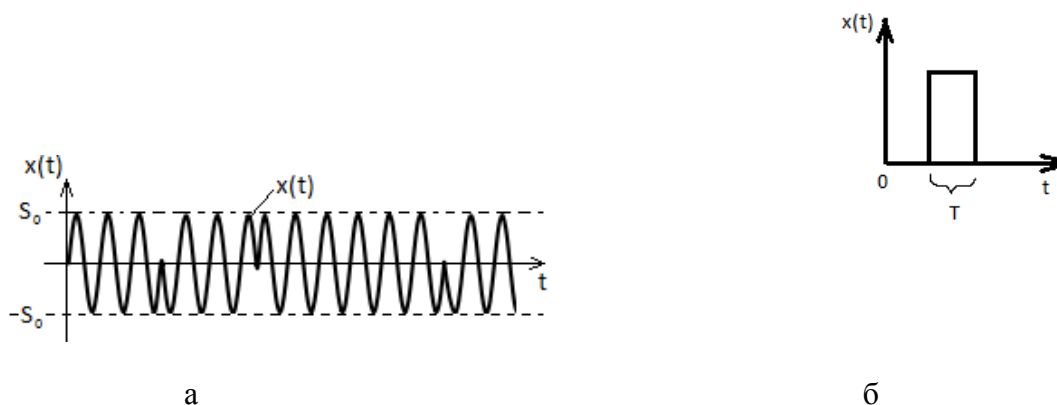


Рис. 3.2. Фазо-модульований сигнал (а) та імпульсний сигнал (б).

Використовувати модель модульованого сигналу доцільно, якщо та, що огинає змінюється набагато повільніше, ніж коливання, що несе.

3. Періодичні сигнали. Періодичним називається сигнал $x(t)$, що задовольняє співвідношенню $x(t) = x(t + \tau)$, τ де — період $-\infty < t < +\infty$. Прикладами таких сигналів є прямокутне коливання, пилкоподібне коливання.

4. Сигнали обмеженої тривалості. Прикладом є імпульсний сигнал (рис. 3.2, б).

Інтервал T називається тривалістю сигналу $x(t)$ якщо $x(t) = 0$, при $t \notin T$. Передбачається що усередині цього інтервалу $x(t)$ не скрізь рівне 0.

5. Сигнали з обмеженою енергією. Якщо для сигналу виконується

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \leq k < \infty,$$

то говорять, що енергія сигналу обмежена величиною k , такі сигнали називаються сигналами з обмеженою енергією.

6. Сигнали з обмеженою смугою частот. Перетворення Фур'є сигналу $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

обчислюється за формулою: . Фізичний сенс перетворення

Фур'є полягає в тому, що сигнал $x(t)$ представляється у вигляді суми складових його гармонійних коливань з амплітудою $|x(f)|$.

Між $x(t)$ і $X(f)$ існує взаємно однозначна відповідність яке виражається

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

формулою зворотного перетворення Фур'є:

Умовою існування перетворення Фур'є є інтегрованість в квадраті функцій $x(t)$ і $X(f)$. Умовою взаємно однозначної відповідності цих функцій є безперервність. Якщо $X(f)$ має обмежену тривалість в частотній області, то сигнал $x(t)$ називається сигналом з обмеженою смугою частот.

Контрольні питання

1. Що таке стаціонарність випадкового процесу?
2. Дати визначення ергодичності випадкового процесу.
3. Навести математичні моделі реалізацій випадкового процесу у вигляді безперервних сигналів.

ЛЕКЦІЯ 4. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ АНСАМБЛЮ РЕАЛІЗАЦІЙ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ. БІЛА ЗАВАДА. СИГНАЛ ЯК КОЛИВАННЯ З ВИПАДКОВОЮ ЗГИНАЮЧОЮ ТА ФАЗОЮ.

1. Біла завада.
2. Сигнал як коливання з випадковою згинаючою та фазою.

1. Біла завада.

Білий шум - стаціонарний шум, спектральні складові якого рівномірно розподілені по всьому діапазону задіяних частот. Прикладами білого шуму є шум близького водоспаду (віддалений шум водоспаду - рожевий, так як високочастотні складові звуку загасають в повітрі сильніше низькочастотних), або дробовий шум на клеммах великого опору, або шум стабилитрона, через який протікає дуже малий струм. Назву отримав від білого світла, що містить електромагнітні хвилі частот всього видимого діапазону електромагнітного випромінювання. Крім білого, існують шуми багатьох квітів.

У природі і техніці «чисто» білий шум (тобто білий шум, який має однакову спектральну потужність на всіх частотах) не зустрічається (з огляду на те, що такий сигнал мав би нескінченну потужність), проте під категорію білих шумів потрапляють будь-які шуми, спектральна щільність яких однакова (або слабо відрізняється) в розглянутому діапазоні частот.

Термін «білий шум» зазвичай застосовується до тону, що має автокорреляційну функцію, математично описується дельта-функцією Дірака по всіх вимірах багатовимірного простору, в якому цей сигнал розглядається. Сигнали, що володіють цією властивістю, можуть розглядатися як білий шум. Дане статистичне властивість є основним для сигналів такого типу.

Те, що білий шум некоррелірований за часом (або по іншому аргументу), не визначає його значень у тимчасовій (або будь-який інший розглянутої аргументної) області. Набори, що приймаються сигналом, можуть бути довільними з точністю до головного статистичного властивості (проте постійна складова такого сигналу повинна бути дорівнює нулю). Наприклад, послідовність символів 1 і -1, помножена на послідовність дельта-функцій, що слідує з частотою слідування символів, буде білим шумом тільки якщо послідовність символів буде некоррелірована. Сигнали, які мають безперервний розподіл (наприклад, нормальний розподіл), також можуть бути білим шумом.

Дискретний білий шум - це просто послідовність незалежних (тобто статистично не пов'язаних один з одним) чисел.

Іноді помилково передбачається, що гауссовий шум (тобто шум з гаусовим розподілом його значень) еквівалентний білого шуму. Однак ці поняття не еквівалентні. Гауссовий шум передбачає розподіл значень сигналу у вигляді нормального розподілу, тоді як термін «білий» має відношення до кореляції сигналу в два різних моменту часу (ця кореляція не залежить від розподілу значень шуму). Білий шум може мати будь-який розподіл - як Гаусса, так і розподіл Пуассона, Коші і т. Д. Гауссова білий шум в якості моделі добре підходить для математичного опису багатьох природних процесів.

Білий шум знаходить безліч застосувань у фізиці і техніці. Одне з них - в архітектурній акустиці. Для того щоб приховати небажані шуми у внутрішніх просторах будівель, генерується стаціонарний білий шум малої потужності.

В електронній музиці білий шум використовується як в якості одного з інструментів музичного аранжування, так і в якості вхідного сигналу для спеціальних фільтрів, які формують шумові сигнали інших типів. Широко застосовується також при синтезі аудіосигналів, зазвичай для відтворення звучання ударних інструментів, таких як тарілки.

Останнім часом багато педіатри рекомендують використовувати звуки білого шуму для заспокоєння і хорошого сну немовлят; передбачається, що в матці маля постійно чув білий шум: стук серця матері, роботу шлунка, шум крові в судинах.

Вектор випадкових чисел $\mathbf{w}$ є послідовністю відліків білого шуму, коли його середнє значення μ_w автокорреляційна матриця R_{ww} задовольняють наступним рівностям $\mu_w = E\{\mathbf{w}\} = 0$, $R_{ww} = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Тобто, це вектор випадкових чисел з нульовим середнім значенням, автокорреляційна матриця якого є діагональну матрицю з дисперсіями по головній діагоналі.

Безперервний у часі випадковий процес $w(t)$, де $t \in R$, є білим шумом тоді і тільки тоді, коли його математичне очікування і автокорреляційна функція задовольняють наступним рівностям відповідно:

$$\begin{aligned}\mu_w(t) &= E\{w(t)\} = 0, \\ R_{ww}(t_1, t_2) &= E\{w(t_1)w(t_2)\} = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

Якщо величина σ^2 не залежить від часу, то випадковий процес є стаціонарним білим шумом, якщо залежить від часу - нестаціонарним білим шумом.

2. Сигнал як коливання з випадковою згинаючою та фазою.

Випадкове коливання можна представити у вигляді $s(t) = a(t) \cos \phi(t)$, де $a(t)$ і $\phi(t)$ - деякі випадкові функції часу. Це уявлення неоднозначно по відношенню до $a(t)$ і $\phi(t)$

Однозначність співвідношення з'являється, якщо на $a(t)$ і $\phi(t)$ накласти додаткові умови. Зручно, і це зазвичай використовується, щоб вираз було наслідком комплексного уявлення випадкового процесу по Гільберту. Для цього потрібно, щоб виконувалися співвідношення $a(t) = \sqrt{s^2(t) + v^2(t)}$, $\phi(t) = \arctg \frac{v(t)}{s(t)}$, де $v(t)$ - випадковий процес, пов'язаний з вихідним перетворенням Гільберта. Випадкове коливання $s(t)$ представляється як проекція на речову вісь вектора довільної довжини (обвідної) $a(t)$, що має випадкову фазу $\phi(t)$. Коливання $v(t)$ - проекція того ж вектора на ортогональну вісь. Зазначене подання випадкового коливання можна використовувати при вирішенні завдань статистичної радіотехніки, якщо відомо, що спектр вихідного коливання вузькосмуговий і концентрується поблизу досить високої частоти. Подібні коливання досить часто зустрічаються на практиці, наприклад шум на виході узкополосної виборчої системи підсилювача проміжної частоти локаційного приймача. На рис. 4.1 зображено таке коливання. Коливання є нормальний процес, зовні близький до модульованому гармонійному. Закон амплітудної модуляції є повільно змінюється випадковою функцією часу. Фаза коливання також повільно і випадково змінюється в часі.

Енергетичний спектр розглянутого вузькосмугового процесу зображений на рис. 4.2. Його ширина визначається спектром флуктуації амплітуди і фази. Практично

найбільш важливим є встановлення законів розподілу амплітуди і фази цього коливання.

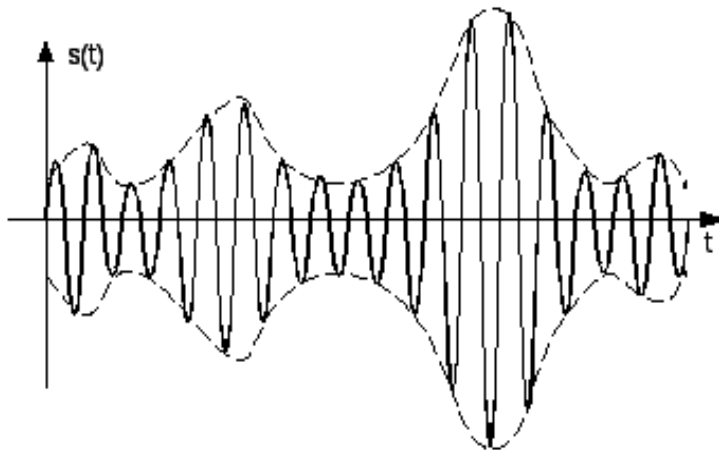


Рис. 4.1. Вузькосмуговий випадковий процес як квазігармоніческого коливання з випадковими амплітудою і зрушенням фази.

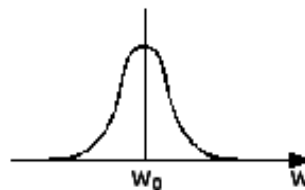


Рис. 4.2. Енергетичний спектр вузькосмугового процесу.

Оскільки запис стаціонарного процесу інваріантна щодо вибору початку відліку часу, моментів можна приписувати довільне, в тому числі і поточне, значення часу t , і добуток $s(t)\cos\phi(t)$ має нормальний закон розподілу. Аналогічно можна довести, що і добуток $s(t)\sin\phi(t)$ також розподілено нормально. Отже, вихідний вузькосмуговий нормальний випадковий процес представлений сумою двох ортогональних коливань з частотою ω_0 і випадковими амплітудами, що мають нормальний закон $s(t)=S_1(t) \cos \omega_0 t + S_2(t) \sin \omega_0 t$, де $S_1(t) = a(t) \cos \phi(t)$, $S_2(t) = a(t) \sin \phi(t)$.

У загальному випадку несиметричною форми спектра взаємна кореляційна функція $K_{S_1 S_2}(\tau)$ при $\tau=0$ звертається в нуль. Це означає, що в збігаються моменти часу випадкові процеси $S_1(t)$ і $S_2(t)$ некорреліровані і, оскільки мають нормальний закон розподілу, статистично незалежні. В окремому випадку симетричного енергетичного спектра амплітуди ортогональних складових $S_1(t)$ і $S_2(t)$ статистично незалежні при будь-якому значенні τ . Взяті в один і той же момент часу значення $a(t)$ і $\phi(t)$ статистично незалежні.

Цікавим є розподіл ймовірностей амплітуди (обвідної) і фази вузькосмугового випадкового процесу. Так щільність розподілу обвідної має закон розподілу Релея і рівномірний закон розподілу фази. Графіки щільності розподілу наведені на рис. 4.3.

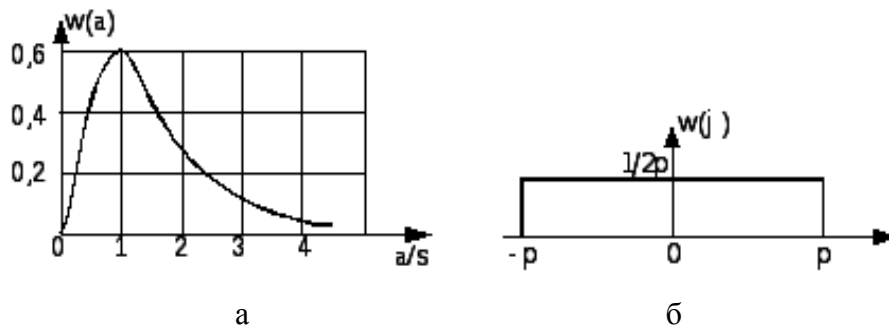


Рис. 4.3. Щільність розподілу ймовірностей обвідної нормально розподіленого вузькосмугового випадкового процесу (розподіл Релея) (а) і щільність ймовірності зсуву фази нормального процесу (б)

Контрольні питання

1. Дати визначення білої завади.
2. Які властивості притаманні білій заваді?
3. Властивості вузькосмугового процесу.

ЛЕКЦІЯ 5. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИГНАЛІВ. ЧАСТОТНО-ЧАСОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ. ДИСКРЕТНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ. ТЕОРЕМА ВІДЛІКІВ.

1. Частотно-часове представлення сигналів.
2. Дискретне представлення сигналів.
3. Теорема відліків.

1. Частотно-часове представлення сигналів.

Сигнал $x(t)$ і його спектр $X(f)$ однозначно виражаються один через одного. Отже, сигнал можна розглядати в будь-якому з цих еквівалентних уявлень - часове або частотному. При цьому масштабні параметри цих уявлень пов'язані обернено пропорційною залежністю. Припустимо, що змінили масштаб по осі часу в k раз (наприклад, відтворимо запис $x(t)$ з іншою швидкістю) і знайдемо спектр функції $x(kt)$:

$$X_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt) \exp(-i2\pi ft) dt = (1/k) \cdot X(f/k).$$

Як бачимо, масштаб по частотній осі змінився в $1/k$ разів. Більш того, з властивостей перетворення Фур'є слід, що сигнали з обмеженою тривалістю мають спектри необмеженої ширини, а сигнали з обмеженою смугою частот тривають нескінченно довго. Цей математичний результат знаходиться в протиріччі з практикою: в реальності все сигнали кінцеві по тривалості і обмежені по спектру. Той факт, що аналітична функція часу не може бути одночасно обмеженою і по тривалості і по ширині спектра є, як бачимо, не властивістю реальних сигналів, а властивістю даної моделі сигналів. Говорити про одночасну обмеженість сигналів за часом і по спектру виявляється можливим при використанні енергетичного критерію точності: сигнал вважається у яких кінцеву тривалість ΔT , якщо в цьому інтервалі часу зосереджена основна частина всієї енергії функції $x(t)$. У той же час і ширина спектра ΔF сигналу визначається як область частот, що містить цю ж частину всієї енергії

спектра $X(f)$:

$$\int_{\Delta T} x^2(t) dt = \int_{\Delta F} X^2(f) df = \mu \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \mu \int_{-\infty}^{\infty} X^2(f) df.$$

Тут величина μ менше одиниці, хоча досить близька до неї, а величина $1-\mu$ характеризує непрямим чином точність, про яку йшла мова.

Тепер можна говорити про те, яку «площу» на площині «частота-час» займає той чи інший сигнал. Якщо строго слідувати теорії Фур'є-перетворення, то отримаємо, що ця площа для всіх сигналів нескінченна. Але для більшості з них енергетичний критерій дозволить обмежити її природним чином.

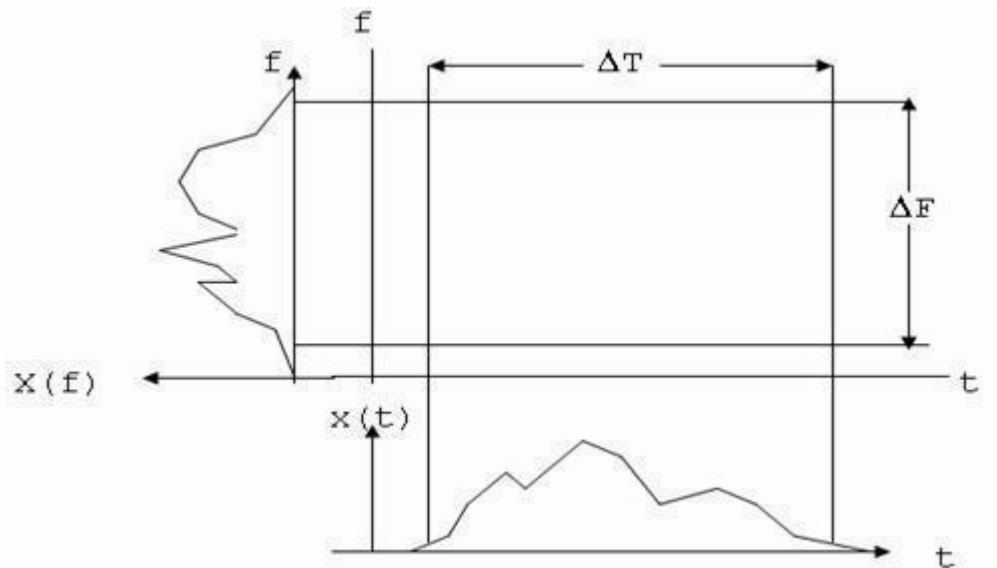


Рис. 5.1. Ілюстрація частотно-часової невизначеності сигналу

Змінюючи форму сигналу, можна змінити і площу на площині «час-частота», яку він займає. Виявляється, що зменшувати цю площу можна лише до певної межі. Ця межа досягається на кривій, що є гармонійним коливанням, яке модулювати по амплітуді гаусовим імпульсом. Існування межі, нижче якої не можна стиснути площу сигналу, займану ним на площині «частота-час», і називається принципом частотно-часової невизначеності сигналів: $\Delta F \times \Delta T = \text{const} \geq 0$.

2. Дискретне представлення сигналів.

Під дискретним розуміється уявлення безперервного (аналогового) сигналу $x(t)$, заданого на інтервалі $[0, T]$ сукупністю координат $c_1, c_2, \dots, c_n$. У найзагальнішому випадку процеси уявлення і відновлення описуються виразами

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = A(x(t)), \quad \tilde{x}(t) = A'((c_1, c_2, \dots, c_n)),$$

де A - оператор дискретного представлення; A' - оператор відновлення.

Оператори A і A' можуть бути як лінійними, так і нелінійними. На практиці зазвичай використовують лінійні оператори, більш прості в реалізації. При цьому операції уявлення і відновлення описуються виразами

$$c_i = \int_0^T x(t) \psi_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t),$$

де $\psi_i(t)$ і $\varphi_i(t)$ - вагові і базисні (координатні) функції.

Залежно від системи використовуваних вагових функцій $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, розрізняють дискретне часове уявлення, дискретне узагальнене уявлення і дискретне різностне уявлення.

При дискретному часовому поданні використовується система вагових функцій

$$\psi_i(t) = \delta(t - t_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

де $\delta(t - t_i)$ - дельта-функція, тоді $c_i = x(t_i)$. Координати c_i збігаються з миттєвими значеннями (відліками) неперервної функції $x(t)$ в дискретні моменти часу t_i . Подання називається регулярним, якщо крок дискретизації $\Delta t_i = \Delta = t_i - t_{i-1}$ є постійним. В іншому випадку воно називається адаптивним. Основними питаннями при поданні повідомлень регулярними отсчетами є: вибір частоти дискретизації $f_d = 1/\Delta$ і базисних функцій. При цьому важливо знайти таку мінімально можливу f_d , при якій ще є принципова можливість відновлення з дискретного сигналу аналогового. Для моделі сигналів з обмеженим спектром рішення зазначених завдань міститься в теоремі відліків (Котельникова).

3. Теорема відліків.

Теорема Котельникова свідчить, що будь-яку безперервну функцію зі спектром, обмеженим смугою частот від 0 до $f_{\max}$, можна визначити послідовністю його миттєвих значень, узятих через інтервали $\Delta = 1/(2 f_{\max})$, тут позначено $f_{\max}$ - максимальна або верхня частота в спектрі сигналу. Відновлення здійснюється за формулою

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i\Delta) \frac{\sin(2\pi f_{\max}(t-i\Delta))}{2\pi f_{\max}(t-i\Delta)}.$$

Цей вислів називається рядом Котельникова $x(i\Delta) = x(t_i) = x_i$. При цьому частота дискретизації f_d буде визначатися виразом $f_d = 2 f_{\max}$.

Згідно з теоремою Котельникова, верхня частота $f_{\max}$ аналогового сигналу не повинна перевищувати половини частоти дискретизації f_d цього сигналу. Отже, дискретні сигнали доцільно розглядати в області $[0, f_d/2]$, яка називається основною смугою частот або основним діапазоном частот.

У вираженні для ряду Котельникова базисними є функції $\varphi_i(t) = \frac{\sin(2\pi f_{\max}(t-i\Delta))}{2\pi f_{\max}(t-i\Delta)}$.

Причому $\varphi_i(t)$ утворюють ортогональну на нескінченному інтервалі систему функцій. Слід зазначити, що будь-яку функцію $\varphi_i(t)$ можна отримати на виході ідеального фільтра нижніх частот, якщо подати на його вхід сигнал $\delta(t - i\Delta)$. Т. е. Відновлення безперервного сигналу здійснюється подачею на вхід ідеального фільтра нижніх частот з частотою зрізу $f_{\max}$ послідовності $\delta(t - i\Delta)$, $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ з наступним множенням на коефіцієнти $x(i\Delta)$. Однак ні сигнал у вигляді дельта-функції, ні ідеальний низькочастотний фільтр фізично не реалізуються. Тому на практиці замість дельта-функцій використовують короткі імпульси, а замість ідеального фільтра нижніх частот - звичайний фільтр нижніх частот, що призводить до похибки відновлення.

Теорема Котельникова дає граничні співвідношення для ідеалізованих умов, серед яких можна відзначити обмеженість спектра по частоті і нескінченне час

спостереження. Всі реальні сигнали кінцеві за часом і мають необмежений по частоті спектр, що теж призводить до похибки відновлення. Проте, теорема Котельникова має велике практичне значення. Спектр сигналу так чи інакше обмежується. Наприклад, при передачі безперервного сигналу його спектр $S(f)$ доцільно обмежити частотою $f_{\max}$, при якій $S(f) \ll N(f)$, де $N(f)$ - спектр потужності шуму на вході системи.

Обмеження спектру сигналу частотою $f_{\max}$ за допомогою фільтра призводить до помилки дискретизації, наведений середній квадрат якої визначається зі співвідношення

$$\delta_f^2 = \frac{\int_0^{f_{\max}} S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df},$$

т. е. дорівнює відношенню потужності відкинutoї частини спектра до середньої потужності вихідного сигналу. При відсутності попередньої фільтрації помилка дискретизації зростає.

Контрольні питання

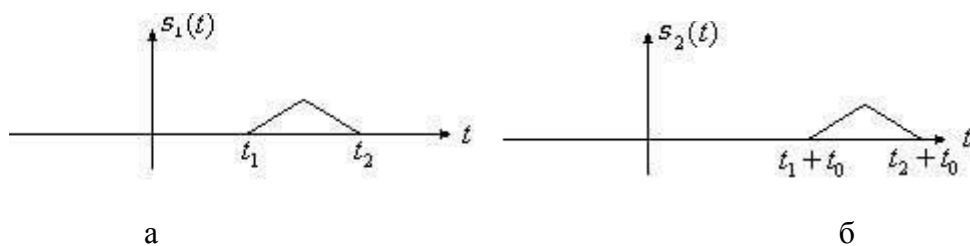
1. Навести теорему відліків.
2. Що розуміється під дискретним уявленням безперервного (аналогового) сигналу?
3. Що розуміється під частотно-часовим представленням сигналів?

ЛЕКЦІЯ 6. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є. ЗСУВ СИГНАЛІВ У ЧАСІ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ СИГНАЛІВ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДОБУТКУ 2-Х СИГНАЛІВ.

1. Зсув сигналів у часі.
2. Диференціювання та інтегрування сигналів.
3. Перетворення Фур'є добутку 2-х сигналів.

1. Зсув сигналів у часі.

Нехай сигнал $s_1(t)$ існує на кінцевому інтервалі часу (t_1, t_2) (рис 6.1, а). Його спектральна щільність дорівнює $S_1(f)$. Аналогічний за формою сигнал $s_2(t)$ відрізняється лише положенням на осі часу, тобто $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ причому при $t_0 > 0$. Другий сигнал відстає від першого (рис 6.1, б) (t_0 - час затримки або запізнення), при $t_0 < 0$ другої сигнал випереджає перший (рис. 6.1, в).



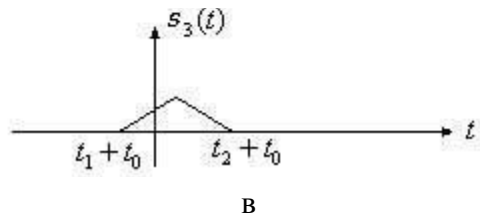


Рис. 6.1. Зрушення сигналу $s_1(t)$ (а) в часі: сигнал $s_2(t)$ відстає від першого (б) (t_0 - час затримки або запізнення), сигнал $s_3(t)$ випереджає перший (в).

Спектральна щільність сигналу $s_2(t)$ дорівнює

$$S_2(f) = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_2(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_{t_1+t_0}^{t_2+t_0} s_1(t - t_0) e^{-i2\pi f t} dt.$$

Введемо змінну $x = t - t_0$, тоді $t = x + t_0$, $dt = dx$,

$$S_2(f) = \int_{t_1}^{t_2} s_1(x) e^{-i2\pi f x} e^{-i2\pi f t_0} dx = e^{-i2\pi f t_0} \int_{t_1}^{t_2} s_1(x) e^{-i2\pi f x} dx = S_1(f) e^{-i2\pi f t_0}.$$

Тоді зсув у часі сигналу на величину t_0 призводить лише до зміни фазочастотної характеристики сигналу на величину $(-2\pi f t_0)$. На рис. 6.2 показані амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ при $t_0 > 0$.

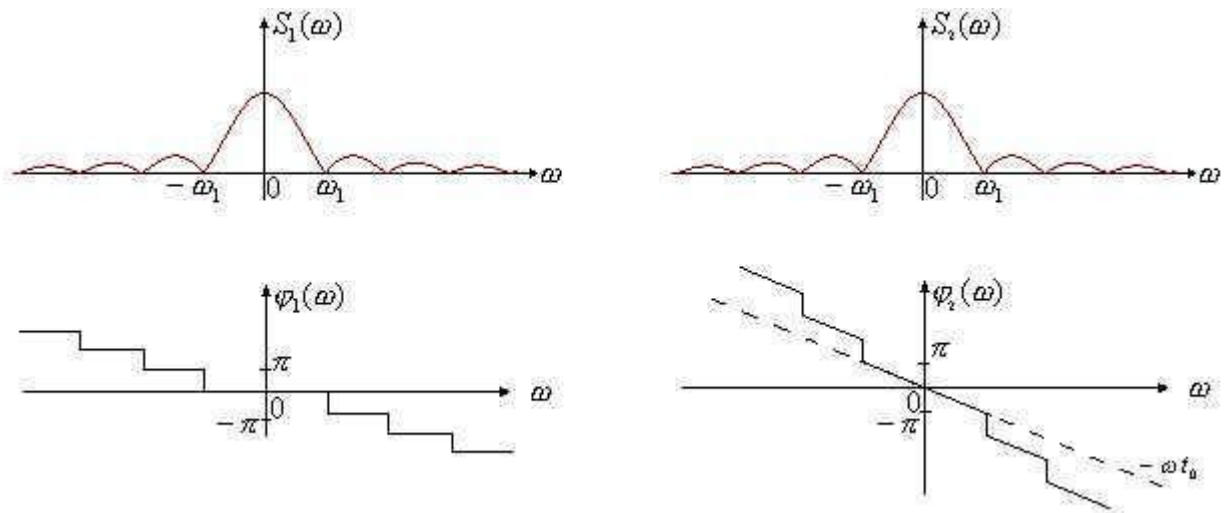


Рис. 2. Амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ при $t_0 > 0$.

2. Диференціювання та інтегрування сигналів.

Зворотне перетворення Фур'є для сигналу $s(t)$ являє собою суму гармонійних складових кінцевої амплітуди C_n , якщо $s(t)$ - періодична функція, або складових нескінченно малої амплітуди для неперіодического сигналу:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n t f_1}$$

або

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Диференціювання за часом сигналу еквівалентно диференціювання за часом правих частин наведених співвідношень:

$$\frac{d}{dt} s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n i2\pi n f_1 e^{i2\pi n t f_1}, \quad \frac{d}{dt} s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi f S(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Таким чином, періодичному сигналу $\frac{d}{dt} s_T(t)$ відповідає спектр з амплітудами $C_n i2\pi n f_1$, а спектральної щільності сигналу $\frac{d}{dt} s(t)$ відповідає спектральна щільність $i2\pi f S(f)$. Аналогічно можна показати, що якщо

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau,$$

в разі періодичного сигналу коефіцієнти ряду Фур'є $C_n (i2\pi n f_1)^{-1}$, і в разі неперіодического сигналу $(i2\pi f)^{-1} S(f)$. Використовувати дане властивість перетворення Фур'є доцільно тільки для сигналів, у яких $S(0)=0$, тобто для сигналів з нульовою площею:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0,$$

тому інакше отримаємо нескінченність енергії проінтегрувати сигналу, що неможливо.

3. Перетворення Фур'є добутку 2-х сигналів.

Нехай сигнал $s(t)=f(t)g(t)$, причому функції-співмножники мають спектральними плотностями $F(f)$ и $G(f)$. Визначимо спектральну щільність твори. За визначенням

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Підставимо в цей інтеграл одну з функцій, наприклад, $g(t)$, виражену через її спектральну щільність, тобто

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df,$$

тогда получим

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \right] e^{-i2\pi ft} dt.$$

Тут, щоб не плутати змінні інтегрування у внутрішньому інтегралі, використовується величина u для позначення в ньому поточної частоти. Цей вислів можна привести до виду, здійснивши перестановку відповідних членів:

$$S(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi(f-u)t} dt \right] du.$$

Внутрішній інтеграл являє собою спектральну щільність сигналу $f(t)$ на частоті $f-u$, тобто $F(f-u)$. Таким чином,

$$S(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) F(f-u) du.$$

Такого типу інтеграл називається сверткою (з коефіцієнтом $\frac{1}{2\pi}$) спектрів сигналів - співмножників. Отже, твору сигналів у часовій області відповідає згортка сигналів в частотній області (згортка спектрів з коефіцієнтом $\frac{1}{2\pi}$).

Використовуємо цю властивість для визначення інтеграла від твору двох тимчасових функцій. Для цього досить визначити згортку спектрів при $f=0$, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u)F(-u)du.$$

Замінімо u на f , $F(-f)$ на $F^*(f)$, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(f)F^*(f)df.$$

Якщо $g(t)=f(t)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)F^*(f)df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(f)df.$$

Величина $F^2(f)$ визначає спектральну щільність енергії сигналу. Права і ліва частини визначають повну енергію сигналу.

Контрольні питання

1. Який вигляд має результат перетворення Фур'є після зсуву сигналу у часі?
2. Який вигляд має результат перетворення Фур'є після диференціювання або інтегрування сигналу?
3. Який вигляд має результат перетворення Фур'є для добутку 2-х сигналів?

ЛЕКЦІЯ 7. ДЕТЕРМІНОВАНА СКЛАДОВА ЧАСОВОГО РЯДУ. ВИЗНАЧЕННЯ ТРЕНДУ ЧАСОВОГО РЯДУ. МОДЕЛІ ТРЕНДУ. СЕЗОННА І ЦИКЛІЧНА КОМПОНЕНТИ. ВИПАДКОВА СКЛАДОВА ЧАСОВОГО РЯДУ.

1. Визначення тренду часового ряду.
2. Моделі тренду.
3. Сезонна і циклічна компоненти.

1. Визначення тренду часового ряду.

Зазвичай виділяють чотири базові компоненти часового ряду: трендову, циклічну, сезонну і нерегулярну (або випадкову). Аналіз часових рядів шляхом розкладання їх на перераховані компоненти називається декомпозицією. Одна з найпростіших моделей прогнозування, що використовуються на практиці, - це модель тренда - регресійна модель, в якій залежною змінною виступає досліджуваний нами показник, а незалежною - час або номер спостереження даного показника. Інакше

кажучи, тренд - це математичний опис тимчасової тенденції. Прогнозування з використанням трендів зводиться до того, щоб замість значення номера спостереження (або часу) підставити необхідні номери в майбутньому:

$$\hat{y}_{T+h} = f(T + h),$$

де $\hat{y}_t$ - розрахункове значення показника на спостереженні t ; f - обрана аналітиком функція тренда; T - номер останнього спостереження в ряді даних; h - горизонт прогнозування.

Трендова компонента відображає довгострокову тенденцію. Для її побудови використовують метод аналітичного вирівнювання, який полягає в підборі функції, найкращим чином описує залежність рівнів часового ряду від часу. Параметри функції визначаються на основі методу найменших квадратів. Найбільш часто використовують лінійну, експонентну, логарифмічну і поліноміальних функції.

При прогнозуванні тих чи інших тенденцій в ряді даних зазвичай рекомендується побудувати кілька моделей, після чого вибрати ту з них, яка, як вважає дослідник, дасть більш точний прогноз по ряду даних. Вибір цей зазвичай здійснюється на основі попереднього фундаментального аналізу об'єкта дослідження, що дозволяє виявити фактори, що впливають на досліджуваний показник, і зробити висновки про те, яка з прогнозних тенденцій може найбільш точно описати досліджуваний показник.

До явних переваг моделей трендів можна віднести те, що у випадку з коректним виявленням тенденцій в ряді даних і збереження їх на прогнозованому проміжку можна отримати точні прогнози. Коефіцієнти моделей трендів легко знаходяться методом найменших квадратів.

Як недолік можна відзначити те, що стандартний підхід до побудови трендів можна застосовувати лише в окремих випадках - випадках оборотних процесів. А через те, що економіка рясніє виключно незворотними процесами, застосування такого підходу призводить до дуже неточним прогнозами. Звичайно, моделі трендів вимагають попереднього вивчення і згладжування ряду даних - без цього неможливо визначити тенденцію, з якою має справу дослідник.

Крім того, оскільки моделі трендів фактично представляють собою регресивні моделі від часу, з ростом числа спостережень (тобто зі збільшенням t) зростає і кореляція між y_t і t . Це призводить до того, що навіть дуже погана модель тренда, не здатна дати точний прогноз, за формальними статистичними міркувань виявляється значущою.

Крім того, при надходженні нової інформації (появі нових спостережень) моделі трендів доводиться будувати заново - вони не враховують цю нову інформацію.

2. Моделі тренду.

Оскільки тенденції зміни часових рядів різноманітні, то і тренди можуть мати найрізноманітніші форми. Найчастіше в практиці прогнозування в якості моделей трендів використовують елементарні функції.

Степеневий тренд визначається формулою $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t^{a_2}$ і дозволяє моделювати кілька типів процесів в залежності від значення коефіцієнтів. У випадку з позитивними значеннями a_1 можна виділити три ситуації (рис. 7.1):

1. $0 < a_2 < 1$ - зростання з уповільненням. Такий тип процесів частіше зустрічається в практичному прогнозуванні. Зростання в такому випадку не має меж, але з кожним наступним спостереженням зміни показника стають все менше і менше.

2. $a_2 > 1$ - зростання з прискоренням. По суті, в такому випадку дослідник стикається з правого висхідній гілкою параболи, яка (як було показано раніше) використовується на практиці рідко.

3. $a_2 < 0$ - зниження з уповільненням. В такому випадку дослідник фактично отримує гіперболу з асимптотой в a_0 .

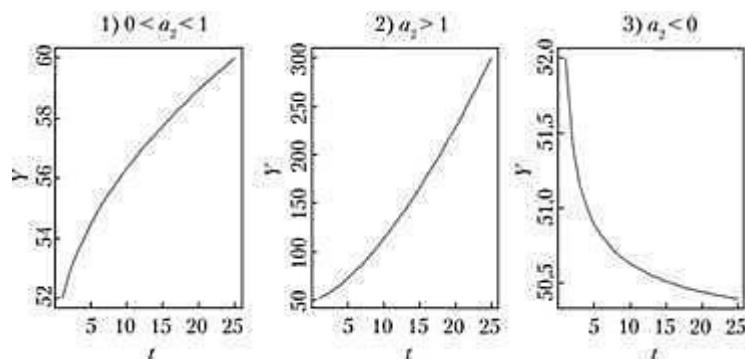


Рис. 7.1. Види степеневих трендів при позитивному значенні a_1 .

У перших двох ситуаціях коефіцієнт a_0 виступає показником початкового значення рівня ряду. У третій ситуації a_0 стає асимптотой.

У випадку з негативним значенням a_1 тренди дзеркально відображаються щодо осі абсцис. В такому випадку виникає ще три ситуації (рис. 7.2):

1. $0 < a_2 < 1$ - зниження з уповільненням.

2. $a_2 > 1$ - зниження з прискоренням (дослідник стикається з правого низхідній гілкою параболи).

3. $a_2 < 0$ - зростання з уповільненням (дослідник фактично отримує гіперболу з асимптотой в a_0).

Коефіцієнт a_2 так само піддається простій економічній інтерпретації, оскільки являє собою коефіцієнт еластичності, який показує, на скільки відсотків зміниться u зі зміною t на 1%.

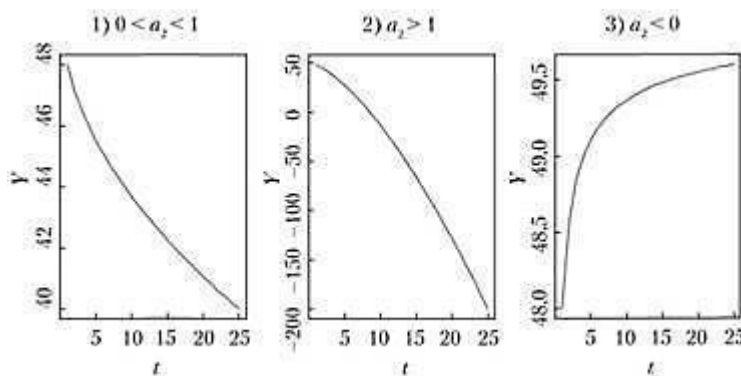


Рис. 7.2. Види степеневих трендів при негативному значенні a_1 .

3. Сезонна і циклічна компоненти.

Циклічна компонента відображає циклічні зміни рівнів часового ряду для періодів понад 1 року. Циклічна компонента пов'язана з циклами ділової активності; її періодичність становить від 2 до 10 років. Циклічну компоненту складно ідентифікувати, якщо аналізувати дані за нетривалий, щодо циклу, період часу. В цьому випадку циклічну компоненту неможливо відокремити від трендової. Сезонна

компонента відображає періодичні зміни рівнів часового ряду всередині року і може відображати квартальні, місячні або тижневі цикли. Сезонна компонента може бути виміряна за допомогою індексів сезонності; найбільш часто використовують місячні індекси. Нерегулярна компонента відображає нерегулярні флуктуації (від латинського fluctuate - коливання) рівнів часового ряду, які неможливо передбачити, є наслідком одноразових, а не систематичних подій, що впливають на рівні ряду.

Виділяють два основних способи (моделі), за допомогою яких компоненти часового ряду можуть взаємодіяти:

1) адитивна модель: $y_t = T_t + C_t + S_t + I_t$;

2) мультиплікативна модель: $y_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t$,

де y_t - рівень ряду динаміки; T_t - трендова компонента; C_t - циклічна компонента; S_t - сезонна компонента; I_t - нерегулярна компонента.

Вибір між адитивною і мультиплікативною моделлю залежить від характеру вихідних даних. Наприклад, якщо кожен рік амплітуда циклічних і сезонних змін постійна, використовують адитивну модель; якщо амплітуда цих змін збільшується разом зі зростанням показника, використовують мультиплікативну модель. У практиці прогнозування мультиплікативна модель застосовується частіше.

Оцінимо сезонні ефекти на тлі тренда. Припустимо, що даний часовий ряд $y_1, y_2, \dots, y_T$ може бути описаний адитивною моделлю. Нехай p - період послідовності S_t , так що $S_t = S_{t+p}$ для всякого t . Необхідно оцінити значення S_t за спостереженнями y_t при тому, що величина p відома. Для цього спочатку ми повинні оцінити тренд T_t . Це можна зробити за допомогою методу найменших квадратів. Позначимо через $\hat{y}_t$ отриману оцінку тренда. Потім для кожного сезону i , $1 \leq i \leq p$, розглянемо всі пов'язані з нього різниці $y_i - \hat{y}_i, y_{i+p} - \hat{y}_{i+p}, \dots, y_{i+mp} - \hat{y}_{i+mp}$.

Кожне з цих відхилень $y_i - \hat{y}_i$ можна розглядати як результат впливу сезонних змін. Усереднення цих різниць дає нам оцінку сезонної компоненти S_t . В якості найпростішої оцінки можна взяти середнє арифметичне, тобто покласти

$$\hat{S}_t = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m (y_{t+lp} - \hat{y}_{t+lp}), 1 \leq t \leq p,$$

в якості інших оцінок $\hat{S}_t$ можна взяти зважене середнє, медіану і т.д.

Перераховані характеристики зменшують вплив різко виділяються спостережень.

Контрольні питання

1. Дати визначення трендової компоненти часового ряду.
2. Навести формулу для степеневого тренду.
3. Дати визначення циклічної компоненти часового ряду.

ЛЕКЦІЯ 8. ВИПАДКОВА СКЛАДОВА ЧАСОВОГО РЯДУ. МОДЕЛІ ВИПАДКОВОЇ КОМПОНЕНТИ. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧАСОВИХ РЯДІВ. ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧАСОВИХ РЯДІВ.

1. Моделі випадкової компоненти.
2. Числові характеристики часових рядів.
3. Оцінки числових характеристик часових рядів.

1. Моделі випадкової компоненти.

Випадкова компонента часового ряду – це те, що залишилось від часового ряду після виключення тренду, циклічного та сезонного компонентів. Частина таких ефектів може бути віднесена до непередбачених природних катаклізмів (землетруси, пожежі, тощо), частина – до випадкових дій людей. За наявності випадкової компоненти неможливо прогнозувати значення часового ряду без помилки. Але будь-який реальний економічний процес включає випадкову компоненту.

Способи перевірки стаціонарності випадкової компоненти часового ряду можуть бути самими різними - від візуального контролю часового ряду досвідченим фахівцем до детального статистичного оцінювання властивостей компоненти. Очевидно, що з усіх можливих способів аналізу найбільшу цінність представляють формалізовані, які можуть бути використані нефхівцями в області аналізу часових рядів. Ці способи полягають у перевірці залежності (або незалежності) параметрів компоненти від початку відліку часу. Як параметри, як правило, вибирають середнє значення, дисперсію, рідше моментні функції більш високих порядків і функцію щільності ймовірності.

Залежно від обраної характеристики говорять про стаціонарність часового ряду щодо середнього значення або дисперсії і т. д. Відзначимо, що часовий ряд може бути стаціонарним щодо одного параметра, наприклад, середнього значення, але проявляти нестационарність щодо іншого, наприклад, дисперсії. Загальний алгоритм перевірки часового ряду на стаціонарність наступний.

1. Часовий ряд ділиться на рівні інтервали, причому спостереження в різних інтервалах покладаються незалежними.

2. Обчислюються оцінки параметрів ряду (середнього значення, дисперсії і т. П.) Для кожного інтервалу. Ці оцінки утворюють послідовність, або тимчасовий ряд оцінок параметрів тимчасового ряду, наприклад, ряд середніх значень на інтервалах.

3. Часовий ряд оцінок перевіряється на наявність тренда або інших змін в часі, які не можна пояснити тільки вибіркової мінливістю оцінок. Якщо тренд оцінки існує, то ряд розглядається як нестационарний за цією оцінкою.

В основі перевірки на наявність тренда лежить той факт, що для стаціонарної реалізації оцінки, обчислені за різними інтервалами ряду, є незалежними випадковими величинами. Іншими словами, необхідно провести тест на статистичну залежність між елементами часового ряду оцінок. Такий тест може бути здійснений різними способами (в тому числі візуальним), які включають як параметричні, так і непараметричні критерії. Параметричні критерії можна використовувати, якщо відома частотна структура процесу.

Як правило, така інформація відсутня, тому застосовуються непараметричні критерії, наприклад, критерій інверсій, який являє собою найбільш потужний засіб для виявлення монотонних трендів у часових рядах і перевірки гіпотези про статистичну незалежність спостережень.

У деяких випадках незалежність моментних функцій від початку відліку часу може бути недостатнім доказом стаціонарності, наприклад, якщо спектр часового ряду сильно нестационарний. В цьому випадку часовий ряд в частотній області розбивається на кілька суміжних частотних діапазонів за допомогою смугових фільтрів і окремо перевіряється стаціонарність щодо моментних функцій в кожному діапазоні.

Періодичні та майже періодичні складові в часовому ряді діагностуються за наявністю дельта-піків в спектральній щільності. Однак на практиці часто виникають труднощі, пов'язані з кінцевим частотним дозволом спектра потужності і ефектами кінцевої довжини вибірки. Якщо спектральна щільність містить гострі піки, то вони можуть належати як періодичної складової часового ряду, так і вузькосмугової випадкової складової.

Якщо розрахувати спектр потужності кілька разів з все більш високою роздільною

здатністю за частотою, то можна відрізнити гармонійний сигнал від вузькосмугового шуму: для гармонійного сигналу ширина спектрального піка зменшується, а висота зростає пропорційно зменшенню ширини піку; для вузькосмугового шуму ширина піку спочатку може зменшуватися, але, починаючи з деяких значень спектрального дозволу, не змінюється. Для того щоб реалізувати дану процедуру перевірки періодичності, необхідно змінювати спектральний дозвіл в широкій області; це здійснюється шляхом зміни частоти дискретизації, але не завжди є можливим. Тому додатково проводиться візуальний аналіз щільності ймовірності та кореляційної функції, які якісно відрізняються для гармонійного сигналу і шуму. Так, щільність ймовірності гармонійного сигналу має два характерних максимумів, а розподіл шуму є гаусовим; кореляційна функція шумового процесу прагне до нуля при збільшенні часового зсуву, а для гармонійного сигналу ця функція демонструє осциляції.

Перевірка на нормальність обумовлена особливим місцем нормальної (гаусової) щільності ймовірності серед різних функцій розподілу: для знаходження параметрів математичної моделі часового ряду з гаусою щільністю ймовірності досить оцінити лише середнє значення і дисперсію ряду.

Перевірка випадкової компоненти часового ряду на нормальність здійснюється після того, як з'ясовано, що процес стаціонарний, а також ідентифіковані і виключені періодичні складові.

Найбільш простим способом перевірки на нормальність є вимірювання щільності ймовірності значень часового ряду і порівняння її з теоретичним нормальним розподілом, використовуючи критерії згоди, наприклад, критерій χ^2 -квадрат.

2. Числові характеристики часових рядів.

При аналізі часових рядів використовуються числові характеристики, аналогічні характеристикам випадкових величин:

- математичне очікування (середнє значення процесу);
- автоковаріаційна функція;
- дисперсія;
- стандартне відхилення;
- автокореляційна функція;
- часткова автокореляційна функція.

У стаціонарного процесу математичне очікування і дисперсія однакові при будь-якому значенні часу, а автоковаріаційна і автокореляційна функції залежать не від моменту часу s або t , а лише від їх різниці (лага).

3. Оцінки числових характеристик часових рядів.

Оцінювання числових характеристик випадкового часового ряду в кожен момент часу вимагає набору реалізацій (траєкторій) відповідного випадкового процесу. Хоча час і не відтворено, проте умови протікання процесу іноді можна вважати повторюваними. Особливо це характерно для технічних додатків, наприклад, коливання напруги в електричній мережі протягом доби. Часові ряди, які спостерігаються в різні доби, можна вважати незалежними реалізаціями одного випадкового процесу.

Інша ситуація при дослідженні процесів соціально-економічної природи. Як правило, тут доступна єдина реалізація процесу, повторити яку не представляється можливим. Отже, отримати оцінки середнього, дисперсії, коваріації не можна. Однак для стаціонарних процесів подібні оцінки все-таки можливі. Нехай $y_1, y_2, \dots, y_N$ – значення часового ряду в моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_N$ відповідно. Традиційна оцінка

середнього як середнього арифметичного від $y_1, y_2, \dots, y_N$ може служити оцінкою математичного очікування стаціонарного (в широкому сенсі) випадкового процесу.

Ясно, що така оцінка для стаціонарного ряду буде незміщеною. Спроможність цієї оцінки встановлюється теоремою Слуцького. Точність оцінювання середнього залежить від довжини N ряду. Вважається, що довжина N завжди повинна бути не менше так званого часу кореляції, під яким розуміють величину T проміжку часу, на якому зберігається помітна кореляція між двома значеннями ряду.

Розглянемо тепер отримання оцінок значень автокореляційної функції. Утворимо $(N-1)$ пару сусідніх значень часового ряду: $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \dots, (y_{N-1}, y_N)$. Ці пари можна розглядати як вибірку двох випадкових величин, для яких можна визначити оцінку стандартного коефіцієнта кореляції r_1 . Потім складемо $(N-2)$ пар $(y_1, y_2), (y_2, y_3), \dots, (y_{N-1}, y_N)$ і визначимо оцінку r_2 і т.д. Оскільки при підрахунку чергового коефіцієнта кореляції обсяг вибірки змінюється, змінюється значення середнього і стандартного відхилення для відповідного набору значень. Для спрощення прийнято вимірювати всі змінні щодо середнього значення всього ряду і замінювати дисперсійні члени в знаменнику на дисперсію ряду в цілому. При великих N розбіжність в оцінках незначні. На практиці кількість коефіцієнтів кореляції беруть не вище $N/4$.

Точнісні характеристики оцінки коефіцієнтів кореляції отримані для гауссовських процесів. Оцінка коефіцієнту кореляції асимптотично нормальна на ∞ , що дає підставу для побудови приблизного довірчого інтервалу. Широко застосовується 95% -інтервал.

Границі довірчого інтервалу, нанесені на графік, називають довірчою трубкою. Якщо коррелограма деякого випадкового процесу не виходить за границі довірчої трубки, то цей процес близький до білого шуму. Правда, ця умова можна вважати лише достатньою. Нерідко вибіркова коррелограма гауссовського білого шуму містить один, а то й два викиди серед перших 20 оцінок, що природно ускладнює інтерпретацію подібної коррелограми.

Контрольні питання

1. Дати визначення випадкової компоненти часового ряду.
2. Як виконується перевірка на стаціонарність випадкової компоненти?
3. Як виконується перевірка на нормальність випадкової компоненти?

ЛЕКЦІЯ 9. МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ ДО СТАЦІОНАРНОСТІ ШЛЯХОМ ВИДІЛЕННЯ ТРЕНДУ. ЛІНІЙНИЙ ТРЕНД. ВИДІЛЕННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНОГО ТРЕНДУ. ВИДІЛЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОГО ТРЕНДУ.

1. Лінійний тренд.
2. Виділення поліноміального тренду.
3. Виділення логарифмічного тренду.

1. Лінійний тренд.

Лінійний тренд представляється формулою: $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$ і описує рівномірну зміну показника в часі. Коефіцієнт a_0 лінійного тренда характеризує початковий рівень ряду, щодо якого процес починає розвиватися, відрізок, який відсікає пряма лінія на осі Oy_t ; a_1 характеризує середню швидкість зміни рівня ряду і дорівнює тангенсу кута α нахилу тренда до осі Ot : $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$.

2. Виділення поліноміального тренду.

У параболіческом тренді $\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ крім уже згаданих коефіцієнтів з лінійного тренда з'являється коефіцієнт, який відповідає за прискорення процесу, - a_2 . Як відомо, прискоренню відповідає друга похідна за часом. Якщо ми візьмемо другу похідну функції від параболічного тренду за часом, то отримаємо $\frac{\partial^2 \hat{y}_t}{\partial t^2} = 2a_2$. Таким чином, знаючи значення коефіцієнтів параболічного тренду, можна дати їм деяку трактування. Помноживши коефіцієнт a_2 на 2, ми отримаємо оцінку середнього прискорення в моделюєму ряду даних.

Графіком цієї функції є парабола з віссю симетрії, паралельної осі ординат. Характер функції визначається її коефіцієнтами. Зазвичай для моделювання економічних процесів використовують одну з гілок параболічного тренду, що дозволяє моделювати різні процеси:

- 1) зростання з прискоренням - права висхідна гілка $a_2 > 0$;
- 2) зниження з уповільненням - ліва спадна гілка, $a_2 > 0$;
- 3) зростання з уповільненням - ліва висхідна гілка, $a_2 < 0$;
- 4) зниження з прискоренням - права спадна гілка, $a_2 < 0$.

Використовуючи параболу при моделюванні процесів 2) і 3), треба мати на увазі, що в майбутньому така модель прийде до свого екстремуму і почне рух в протилежну сторону.

Зазвичай в моделюванні не використовують параболи більш високих ступенів, ніж друга. Зокрема, це викликано тим, що параболи більш високих ступенів хоч і можуть добре апроксимувати ряд, але тенденції прогнозують погано.

3. Виділення логарифмічного тренду.

Логарифмічний тренд $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \ln t$ за властивостями схожий на гіперболічний: при позитивному значенні a_1 , він описує процес сповільнюється зростання, при негативному - процес зниження з уповільненням. Однак на відміну від гіперболічного логарифмічний тренд не має асимптоти і або зростає, або знижується без обмежень. Дані процеси графічно представлені на рис. 9.1.

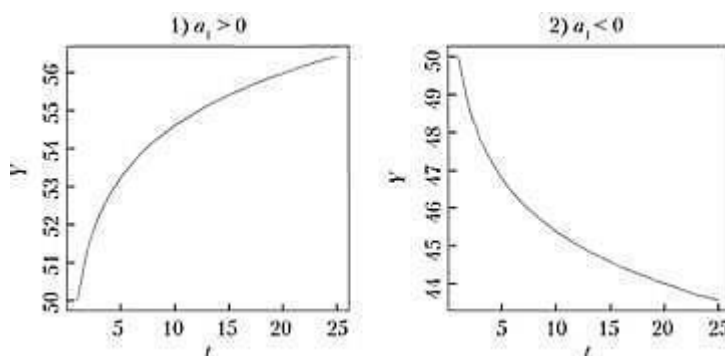


Рис. 9.1. Види логарифмічних трендів.

Коефіцієнт a_1 має наступну зручну інтерпретацію: при збільшенні t на 1% у зростає на величину $a_1/100$ одиниць.

Коефіцієнти всіх розглянутих трендів можуть бути легко знайдені або методом середніх, або методом найменших квадратів. При цьому у випадку з оборотними процесами досліджуваний ряд даних краще попередньо згладити, використовуючи

прості ковзаючі середні, після чого можна визначити вид тенденції і, підібравши відповідну модель тренда, приступити до знаходження коефіцієнтів обраного тренда.

Візьмемо для прикладу ряд № 344 з бази МЗ, приберемо останні шість значень і спробуємо спрогнозувати їх, використовуючи залишилися 25 спостережень (рис. 9.2). Незважаючи на те що перед нами явно незворотний процес, можна застосувати для прогнозування стандартну методику, яка використовується для прогнозування оборотних процесів.

Стандартна методика побудови трендів передбачає попереднє згладжування ряду. Для зменшення впливу випадкових відхилень обрана проста змінна середня 9-го порядку, яка в підсумку дала гладку нелінійну тенденцію, як можна припустити, що відповідає типу динаміки вихідного ряду даних. Для опису цієї тенденції можна вибрати логарифмічний тренд, так як в вихідному ряді даних тенденції спочатку змінювалися з більшою швидкістю, ніж в кінці ряду даних. Зниження в кінці ряду у відповідності зі стандартною методикою побудови трендів можна вважати випадковим.

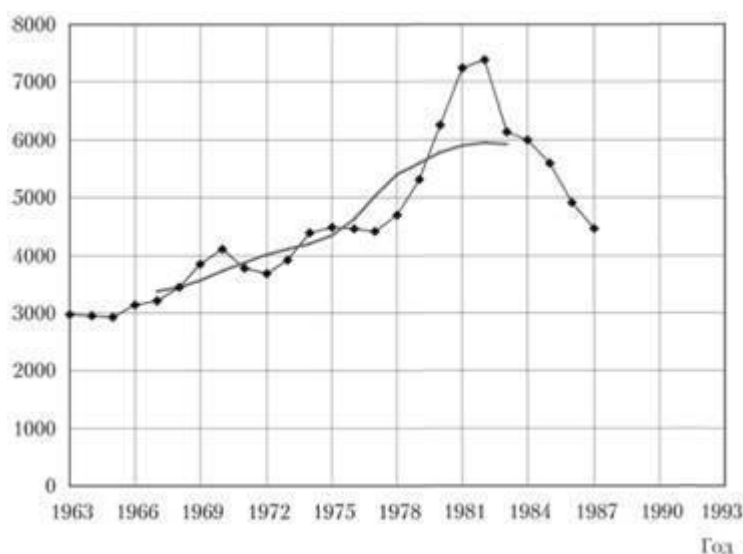


Рис. 9.2. Ряд даних № 344 (суцільна лінія з точками) і він же, згладжений SMA (9) (суцільна лінія).

Однак знаходити коефіцієнти цього тренда потрібно щодо згладженого, а не вихідного ряду для того, щоб він не забрав у себе відсіяні нами випадкові відхилення. Після знаходження коефіцієнтів логарифмічного тренду методом найменших квадратів отримаємо наступну модель: $\hat{y}_t = 479,6 + 2061,9 \ln t$.

Сама модель і точковий прогноз по ній показані на рис. 9.3.

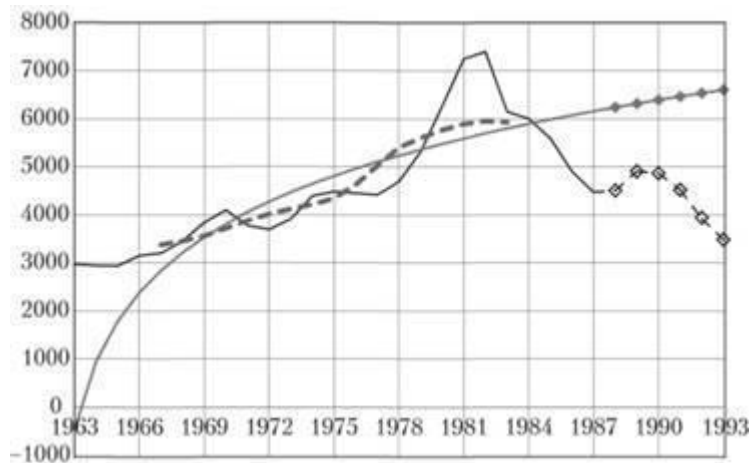


Рис. 9.3. Ряд даних № 344 (суцільна лінія з точками), згладжений ряд (пунктирна лінія), модель тренда і прогноз по ній на шість спостережень вперед (суцільна лінія)

Як бачимо, використання підходу, в якому все спостереження вважаються однаково важливими для випадку з незворотним процесом, призвело до того, що прогноз по моделі виявився неточним (останні шість точок на графіку): не тільки з систематичним завищенням на ділянці прогнозування, а й з ростом розрахункових значень, що не відповідає реальності.

Щоб отримати більш точні прогнози, потрібно було прибрати з розгляду ту частину ряду, в якій спостерігалася тенденція до зростання, і залишити тільки ту, в якій стався перелом і почалося зниження значення показника. Проблема тут полягає в тому, що спад з 1982 р міг бути випадковим, а значить, і тенденція до зростання в майбутньому може відновитися. Щоб визначити, з чим саме ми маємо справу (зі зміною тенденції або з випадковим відхиленням), потрібно звернутися до самої досліджуваної області і провести фундаментальний аналіз, виявити передумови до того чи іншого розвитку дій.

Візьмемо для однаковості логарифмічну модель і так само, як ми це зробили раніше, знайдемо її коефіцієнти для згладженого ряду. Отримаємо наступну модель:

$$\hat{y}_t = 7102,2 + 1185,2 \ln t.$$

Отримана модель тренда і прогноз по ній показані на рис. 9.4.

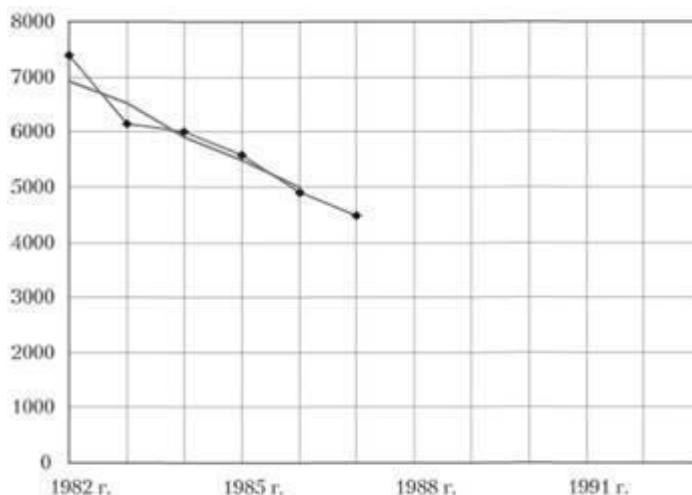


Рис. 9.4. Усічений ряд даних № 344 (суцільна лінія з точками) і прогноз по ньому на шість спостережень вперед (суцільна лінія)

Як бачимо, використання іншого підходу дозволило нам дати більш точний прогноз на шість спостережень вперед по обраному ряду даних. Але, на жаль, стандартні статистичні характеристики в такому випадку не застосовуються не тільки через малу кількість спостережень, а й з-за неоднорідності самого розглянутого нами процесу - ми явно маємо справу з необоротним процесом, вибіркового методу в якому практично не працює.

Отже, у випадку з незворотними процесами використовувати стандартний підхід в знаходженні коефіцієнтів моделей трендів можна. Потрібно використовувати інший підхід - або що має на увазі явне виключення спостережень, свідомо спотворюють прогноз, або нерівномірний облік спостережень при розрахунку коефіцієнтів моделей (такий, щоб більш старі спостереження в меншій мірі враховувалися в розрахунках).

Контрольні питання

1. Які властивості притаманні лінійному тренду?
2. Які властивості притаманні поліноміальному тренду?
3. Які властивості притаманні логарифмічному тренду?

ЛЕКЦІЯ 10. ВИДІЛЕННЯ ТРЕНДУ МЕТОДАМИ ЗГЛАДЖУВАННЯ. МЕТОД КОВЗНИХ СЕРЕДНІХ. МЕТОД ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ.

1. Метод ковзних середніх.
2. Метод експоненційного згладжування.

1. Метод ковзних середніх.

Завдання згладжування річних часових рядів розглянемо на прикладі компанії Cabot Corporation, яка спеціалізується на виробництві і продажу хімікатів, будівельних матеріалів, продуктів тонкої хімії, напівпровідників і скрапленого природного газу. Доходи компанії за в 1982-2001гг. наведені на рис. 10.1.

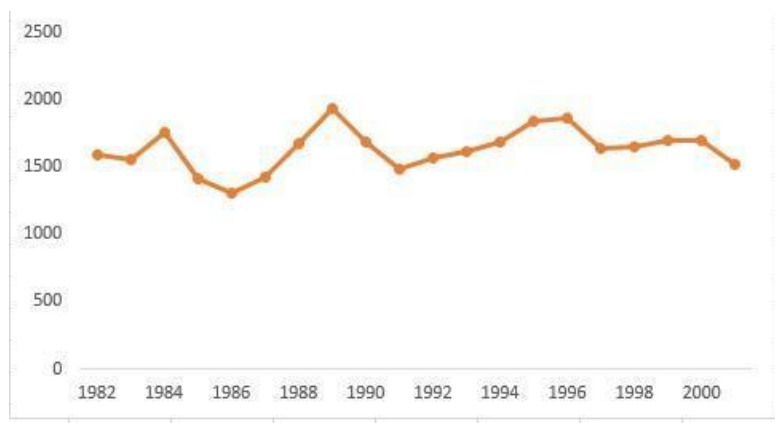


Рис. 10.1. Доходи компанії Cabot Corporation в 1982-2001 роках (млрд. дол.)

Довготривала тенденція підвищення доходів затемнена великою кількістю коливань. Таким чином, візуальний аналіз графіка не дозволяє стверджувати, що дані мають тренд. У таких ситуаціях можна застосувати методи ковзних середніх або експоненціального згладжування.

Метод ковзних середніх дуже суб'єктивний і залежить від довжини періоду L , обраного для обчислення середніх значень. Для того щоб виключити циклічні коливання, довжина періоду повина бути цілим числом, кратним середній довжині

циклу. Ковзаючі середні для обраного періоду, що має довжину L , утворюють послідовність середніх значень, обчислених для послідовностей довжини L . Ковзні середні позначаються символами $MA(L)$.

Припустимо, що ми хочемо обчислити п'ятирічні ковзні середні значення за даними, виміряним протягом $n = 11$ років. Оскільки $L = 5$, п'ятирічні ковзні середні утворюють послідовність середніх значень, обчислених по п'яти послідовним значенням часового ряду. Перше з п'ятирічних ковзних середніх значень обчислюється шляхом підсумовування даних про перших п'яти роках з подальшим розподілом на п'ять:

$$MA(5) = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) / 5.$$

Друге п'ятирічне ковзне середнє обчислюється шляхом підсумовування даних про роках з 2-го по 6-й з подальшим розподілом на п'ять:

$$MA(5) = (Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6) / 5.$$

Цей процес триває, поки не буде обчислено ковзне середнє для останніх п'яти років. Працюючи з річними даними, слід вважати число L (довжину періоду, обраного для обчислення ковзних середніх) непарним. У цьому випадку неможливо обчислити ковзні середні для перших $(L - 1) / 2$ і останніх $(L - 1) / 2$ років. Отже, при роботі з п'ятирічними ковзними середніми неможливо виконати обчислення для перших двох і останніх двох років. Рік, для якого обчислюється ковзне середнє, повинен знаходитися в середині періоду, що має довжину L . Якщо $n = 11$, а $L = 5$, перше ковзне середнє повинно відповідати третьому році, друге - четвертому, а останнє - дев'ятому році.

При обчисленні трирічних ковзних середніх проігноровані спостережувані значення, що відповідають першому і останньому року. Аналогічно при обчисленні семирічних ковзних середніх немає результатів для перших і останніх трьох років. Крім того, семирічні ковзні середні набагато більше згладжують часовий ряд, ніж трирічні. Це відбувається тому, що семирічним ковзним середнім відповідає довший період. На жаль, чим більше довжина періоду, тим меншу кількість ковзних середніх можна обчислити і представити на графіку. Отже, більше семи років для обчислення ковзних середніх вибирати небажано, оскільки з початку і кінця графіка випаде дуже багато точок, що спотворить форму часового ряду.

2. Метод експоненційного згладжування.

Для виявлення довгострокових тенденцій, що характеризують зміни даних, крім ковзних середніх, застосовується метод експоненціального згладжування. Цей метод дозволяє також робити короткострокові прогнози (в рамках одного періоду), коли наявність довгострокових тенденцій залишається під питанням. Завдяки цьому метод експоненціального згладжування має значну перевагу над методом ковзних середніх.

Метод експоненціального згладжування отримав свою назву від послідовності експоненціально зважених ковзних середніх. Кожне значення в цій послідовності залежить від усіх попередніх спостережуваних значень. Ще одна перевага методу експоненціального згладжування над методом змінного середнього полягає в тому, що при використанні останнього деякі значення відкидаються. При експоненційному згладжуванні ваги, присвоєні спостережуваними значеннями, зменшуються з часом, тому після виконання обчислень найбільш часто зустрічаються значення отримують найбільшу вагу, а рідкісні величини - найменший.

Рівняння, що дозволяє згладити часовий ряд в межах довільного періоду часу i , містить три члена: поточне спостережуване значення Y_i , що належить тимчасовому ряду, попереднє експоненціально згладжене значення E_{i-1} і присвоєний вага W :

$$E_i = Y_i; E_i = WY_i + (1 - W)E_{i-1}, i = 2, 3, 4, \dots,$$

де E_i - значення експоненціально згладженого ряду, обчислене для i -го періоду, E_{i-1} - значення експоненціально згладженого ряду, обчислене для $(i - 1)$ -го періоду, Y_i - спостережуване значення часового ряду в i -му періоді, W – суб'єктивна вага, або згладжує коефіцієнт ($0 < W < 1$).

Коли ця формула застосовується рекурсивно, то кожне нове згладжені значення (яке є також прогнозом) обчислюється як зважене середнє поточного спостереження і згладженого ряду. Очевидно, результат згладжування залежить від параметра W . Якщо W дорівнює 1, то попередні спостереження повністю ігноруються. Якщо W дорівнює 0, то ігноруються поточні спостереження. Значення W між 0, 1 дають проміжні результати.

Вибір згладжує коефіцієнта, або ваги, присвоєного членам ряду, є принципово важливим, оскільки він безпосередньо впливає на результат. На жаль, цей вибір до деякої міри суб'єктивний. Якщо дослідник хоче просто виключити з тимчасового ряду небажані циклічні або випадкові коливання, слід вибирати невеликі величини W (близькі до нуля). З іншого боку, якщо часовий ряд використовується для прогнозування, необхідно вибрати велику вагу W (близьку до одиниці). У першому випадку чітко проявляються довгострокові тенденції часового ряду. У другому випадку підвищується точність короткострокового прогнозування.

Оцінювання кращого значення W за допомогою даних. На практиці параметр згладжування часто шукається з пошуком на сітці. Можливі значення параметра розбиваються сіткою з певним кроком. Наприклад, розглядається сітка значень від $W = 0,1$ до $W = 0,9$, з кроком 0,1. Потім вибирається W , для якого сума квадратів (або середніх квадратів) залишків (спостережувані значення мінус прогнози на крок вперед) є мінімальною.

Експоненціально згладжені значення, отримане для i -го часового інтервалу, можна використовувати в якості оцінки передбаченого значення в $(i + 1)$ -му інтервалі:

$$\hat{Y}_{i+1} = E_i.$$

Для передбачення доходів компанії Cabot Corporation в 2002 році на основі експоненціально згладженого тимчасового ряду, відповідного вазі $W = 0,25$, можна використовувати згладжені значення, обчислене для 2001 року. Ця величина дорівнює 1651,0 млн. Дол. Коли стануть доступними дані про доходи компанії в 2002 році, можна застосувати експоненціальне згладжування і передбачити рівень доходів в 2003 році, використовуючи згладжені значення доходів у 2002 році:

$$E_{2002} = WY_{2002} + (1 - W)E_{2001}, \hat{Y}_{2003} = WY_{2002} + (1 - W)\hat{Y}_{2002}.$$

Контрольні питання

1. Коли застосовується метод ковзних середніх?
2. Навести властивості параметру експоненціального згладжування.
3. Навести формулу, за якою обчислюються результати експоненціального згладжування.

ЛЕКЦІЯ 11. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПІВТОНОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ. ОПИС ПІВТОНОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ. ПРОСТОРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ: ЛІНІЙНА, МЕДІАННА ФІЛЬТРАЦІЯ.

1. Опис півтонового зображення.
2. Просторова фільтрація зображення: лінійна, медіанна фільтрація.
3. Застосування лінійної фільтрації для виділення контурів півтонового зображення.

1. Опис півтонового зображення.

Маючи уявлення про природу кольору, можна зрозуміти, що білий колір відповідає рівномірної суміші частот електромагнітних коливань оптичного діапазону, а чорний - відсутності світла. Для опису зображень, що містять пікселі тільки цих двох кольорів, а також проміжних відтінків сірого кольору, використовують дві ахроматические (що не включають кольору) моделі. Ахроматичними називаються монохромні і напівтонові зображення.

Монохромне (або штрихове) зображення являє собою зображення, кожен піксель якого може бути тільки одного з двох кольорів: основного (частіше чорного) або фонового (частіше білого). Монохромні зображення можуть використовуватися для зберігання штрихової графіки, наприклад малюнків тушшю або гравюр.

При записи пікселів монохромного зображення, якщо піксель забарвлений в білий колір, це означає, що точка люмінофора екрану, що відповідає за відображення кольору даного пікселя, повинна буде світитися (стан - 1); якщо ж піксель забарвлений в чорний колір, значить відповідна точка екрану світитися не повинна (стан - 0).

Таким чином, щоб «запам'ятати» колір одного пікселя монохромного зображення, в пам'яті комп'ютера буде зайнята 1 осередок (1 біт) пам'яті (стан 1 або 0).

Півтонування відрізняється від монохромного тим, що складові його пікселі можуть бути будь-якого з відтінків, складених змішанням двох базових квітів. Відтінком називається суміш базових квітів моделі у фіксованій пропорції. Таким чином, відтінки відрізняються один від одного відсотковим вмістом в них базового кольору.

Напівтонові зображення використовуються для зберігання чорно-білих фотографій, олівцевих ілюстрацій, а також у випадках, коли без кольору можна обійтися. Щоб однозначно визначити колір пікселя півтонування, умовно всі відтінки сірого кольору, отримані в результаті плавного переходу від чорного до білого, розбили на 256 частин. Така кількість градацій яскравості виявилася цілком достатнім, щоб коректно відобразити, наприклад, чорно-біле фото.

Шкалу, що містить 256 градацій яскравості, де нульове значення відповідає чорному кольору (яскравість - 0), а 255 - білому (максимальна яскравість), називають сірою шкалою.

Для запису кольору пікселя півтонування потрібно вказати номер кольору з відтінків сірої шкали (тобто один з 256 можливих варіантів). Щоб записати максимальне значення (255) в двійковому коді, буде потрібно восьмизначних двійковечисло, для зберігання якого потрібно 8 осередків пам'яті ($2^8 = 256$). Таким чином, глибина кольору півтонування - 8 біт.

Безліч можливих півтонів називають рівнями сірого (англ. Gray scale), незалежно від того, півтони якого кольору або його відтінку передаються. (Аналогічно тому, як бінарне зображення, часто зване «чорно-білим», може при відображенні виглядати «чорно-зеленим».) Таким чином, рівні сірого не відрізняються по спектрального складу (відтінку кольору), але відрізняються за яскравістю. Кількість можливих півтонів в даному випадку є глибина кольору, яку часто передають не в кількості самих півтонів, а в кількості біт на піксель (англ. Bit per pixel, bpp).

Яке із значень в допустимому діапазоні буде вважатися найяскравішим, а яке самим темним не має значення, т. К. Число, що є значенням кожного пікселя - всього лише умовний код яскравості. Досить вказати напрямок відліку.

Наприклад, можуть існувати напівтонові растри, де на кожен піксель відведено 8 біт, зображення має 256 напівтонів, а пікселі зі значенням 0 або 255 є чорними, і навпаки, пікселі зі значенням 255 або 0 - білими, інші півтони сірого будуть рівномірно розподілені між даними значеннями колірною індексу.

2. Просторова фільтрація зображення: лінійна, медіанна фільтрація.

Під фільтрацією зображень розуміють операцію, що має своїм результатом зображення того ж розміру, отримане з початкового за деякими правилами. Зазвичай інтенсивність (колір) кожного пікселя результуючого зображення обумовлена інтенсивностями (квітами) пікселів, розташованих в деякій його околиці в оригінальному документі.

Лінійні фільтри являють собою сімейство фільтрів, що мають дуже просте математичне опис. Разом з тим вони дозволяють домогтися найрізноманітніших ефектів. Будемо вважати, що задано вихідне півтонування A , і позначимо інтенсивності його пікселів $A(x, y)$. Лінійний фільтр визначається вещественнозначної функцією $F(i, j)$, заданої на растрі. Ця функція називається ядром фільтра, а сама фільтрація проводиться за допомогою операції дискретної згортки (зваженого підсумовування). Результатом служить зображення B . Зазвичай ядро фільтра відмінно від нуля тільки в деякій околиці N точки $(0, 0)$. За межами цієї околиці $F(i, j)$, або в точності дорівнює нулю, або дуже близько до нього, так що можна їм знехтувати. Значення кожного пікселя $B(x, y)$ визначається пікселями зображення A , які лежать в вікні N з центром в точці (x, y) (ми будемо позначати це безліч $N(x, y)$). Ядро фільтра, заданий на прямокутній околиці N , може розглядатися як матриця m на n , де довжини сторін є непарними числами.

Також потребує додаткового прояснення ситуація, коли піксель (x, y) знаходиться в околиці країв зображення. Дану проблему можна вирішити кількома способами:

- 1) не проводити фільтрацію для таких пікселів, обрізавши зображення B по краях або зафарбувавши їх, наприклад, чорним кольором;
- 2) не включати відповідний піксель в підсумовування, розподіливши його вага $F(i, j)$, рівномірно серед інших пікселів околиці $N(x, y)$;
- 3) визначити значення пікселів за границями зображення за допомогою екстраполяції. Наприклад, вважати постійним значення інтенсивності поблизу кордону або вважати постійним градієнт інтенсивності поблизу границі;
- 4) визначити значення пікселів за границями зображення, за допомогою дзеркального відображення.

Вибір конкретного способу потрібно проводити з урахуванням конкретного фільтра і особливостей конкретного додатка.

Більш складним фільтром, задіюється в обчисленнях околиця пікселя, є медіана. Результат медіанної фільтрації є медіанне значення пікселів околиці, форма якої вибирається довільно. Медіанна фільтрація застосовується, коли перешкоди незалежно впливають на окремі пікселі. Наприклад, такими перешкодами є "биті" і "гарячі" пікселі при цифровий зйомці, "снігової" шум, коли частина пікселів замінюється на пікселі з максимальною інтенсивністю, і т.п. Перевага медіанної фільтрації перед лінійною згладжує фільтрацією полягає в тому, що "гарячий" піксель на темному тлі буде замінений на темний, а не "розмазаний" по околиці.

3. Застосування лінійної фільтрації для виділення контурів півтонового зображення.

Для завдання пошуку границь на зображенні застосовуються лінійні фільтри, що задаються дискретними апроксимаціями диференціальних операторів (за методом кінцевих різниць). Найпростішим диференціальним оператором є взяття похідної по x -координату. Даний оператор визначений для безперервних функцій. Існує безліч способів визначити аналогічний оператор для дискретних зображень за допомогою

лінійного фільтра. Зокрема, поширеними варіантами є фільтри Превітт (Prewitt) і Собеля (Sobel).

Фільтри, що наближають оператор похідної по y -координаті, виходять шляхом транспонування матриць фільтрів по x -координаті.

На відміну від згладжуючих і контрастоповишаючих фільтрів, які не змінюють середню інтенсивність зображення (сума елементів ядра дорівнює одиниці), в результаті застосування різницевих операторів виходить, як правило, зображення із середнім значенням пікселя близьким до нуля (сума елементів ядра дорівнює нулю). Перепадам (границям) вихідного зображення відповідають пікселі з великими по модулю значеннями на результуючому зображенні. Тому різницеві фільтри називають також фільтрами, що знаходять границі.

Аналогічно вищенаведеним фільтрам, за методом кінцевих різниць можна скласти фільтри для інших диференціальних операторів, зокрема, важливий для багатьох додатків диференційний оператор Лапласа (лапласіан) Δ . В результаті застосування дискретного Лапласіан великі по модулю значення відповідають як вертикальним, так і горизонтальним перепадам яскравості. Знаходження меж на зображенні може проводитися шляхом застосування цього фільтра і взяття всіх пікселів, модуль значення яких перевершує деякий поріг. Однак виникає невизначеність у виборі величини порога. Для різних частин зображення прийнятний результат зазвичай виходить при істотно різних порогових значеннях. Крім того, різницеві фільтри дуже чутливі до шумів зображення.

Контрольні питання

- 1) Що таке монохромне зображення?
- 2) Дати визначення напівтоновому зображенню.
- 3) Які фільтри застосовують для пошуку границь на зображеннях?

ЛЕКЦІЯ 12. ПОНЯТТЯ ДИСКРЕТНОЇ ЗГОРТКИ. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ ВИДІЛЕННЯ КОНТУРІВ ПІВТОНОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ.

1. Одновимірне дискретне перетворення Фур'є: пряме і зворотне.
2. Двовимірне дискретне перетворення Фур'є: пряме і зворотне.
3. Частотна область, частотна компонента. Спектр перетворення Фур'є, фазовий і енергетичний спектр.

1. Одновимірне дискретне перетворення Фур'є: пряме і зворотне.

Пряме перетворення Фур'є $F(u)$ неперервної функції однієї змінної $f(x)$ визначається як:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx.$$

По заданому перетворення Фур'є $F(u)$ можна отримати вихідну функцію $f(x)$ за допомогою зворотного перетворення Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du.$$

2. Двовимірне дискретне перетворення Фур'є: пряме і зворотне.

Для функції двох змінних $f(x, y)$ пряме перетворення Фур'є $F(u, v)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy.$$

Зворотнє:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv.$$

3. Частотна область, частотна компонента. Спектр перетворення Фур'є, фазовий і енергетичний спектр.

Перетворення Фур'є дискретної функції однієї змінної $f(x)$, $x=0, 1, 2, \dots, M-1$, дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) визначається рівністю:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi \frac{ux}{M}}, u=0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Вихідна функція відновлюється за допомогою зворотного ДПФ:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi \frac{ux}{M}}, x=0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Поняття частотної області прямо впливає з формули Ейлера:
 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

тоді

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(\cos\left(2\pi \frac{ux}{M}\right) - i\sin\left(2\pi \frac{ux}{M}\right) \right), u=0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Таким чином, кожен елемент перетворення Фур'є $F(u)$ складається з суми за всіма значеннями функції $f(x)$. Значення функції $f(x)$, в свою чергу, множаться на синуси і косинуси різних частот. Область значень змінної u , для якій бере свої значення функція $F(u)$ називається частотною областю, оскільки значення змінної u визначають частоти доданків, складових перетворення. (Значення змінної x також впливають на частоти, але оскільки по цій змінній проводиться підсумовування, цей вплив однаково для всіх значень змінної u). Кожен з M елементів функції $F(u)$ називається частотною компонентою перетворення.

Модулем або спектром Фур'є-перетворення називається величина:

$$|F(u)| = \left((ReF(u))^2 + (ImF(u))^2 \right)^{1/2}.$$

Фазой або фазовим спектром:

$$\varphi(u) = \arctg\left(\frac{ImF(u)}{ReF(u)}\right).$$

Енергетичним спектром називається:

$$P(u) = |F(u)|^2 = (ReF(u))^2 + (ImF(u))^2.$$

Дискретне пряме і зворотнє перетворення Фур'є допускає узагальнення на двовимірний випадок. Пряме ДПФ функції $f(x, y)$ у цифровому форматі розмірами $M \times N$:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad u=0, 1, 2, \dots, M-1; v=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Зворотнє ДПФ:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad x=0, 1, 2, \dots, M-1; y=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Змінні u, v називаються частотними змінними, змінні x, y – просторовими змінними або змінними зображення.

Фур'є-спектр, фаза, енергетичний спектр визначаються аналогічно одновимірному випадку:

$$|F(u, v)| = \left((ReF(u, v))^2 + (ImF(u, v))^2 \right)^{1/2},$$
$$\varphi(u, v) = \arctg\left(\frac{ImF(u, v)}{ReF(u, v)}\right),$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = (ReF(u, v))^2 + (ImF(u, v))^2.$$

Значення

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y),$$

визначає середнє значення функції $f(x, y)$.

Контрольні питання

1. Навести формули прямого та зворотнього перетворення Фур'є.
2. Як виконується дискретне пряме і зворотнє перетворення Фур'є?
3. Дати визначення спектру та енергетичного спектру.

ЛЕКЦІЯ 13. ФІЛЬТРАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ. ЕТАПИ ФІЛЬТРАЦІЇ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ. ВІДПОВІДНІСТЬ МІЖ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ФІЛЬТРУ В ПРОСТОРОВІЙ І ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ.

1. Етапи фільтрації в частотній області.
2. Поняття дискретної згортки.
3. Відповідність між характеристиками фільтру в просторовій і частотній області. Теорема про згортку.

1. Етапи фільтрації в частотній області.

Процедура фільтрації в частотній області складається з наступних кроків.

1. Початкове зображення множиться на $(-1)^{x+y}$, щоб його перетворення Фур'є виявилось центрованим.

2. Обчислюється пряме ДПФ $F(u, v)$ зображення, отриманого після кроку 1.

3. Функція $F(u, v)$ множиться на функцію фільтру $H(u, v)$.

4. Обчислюється зворотне ДПФ від результату кроку 3.

5. Виділяється матеріальна частина результату кроку 4.

6. Результат кроку 5 множиться на $(-1)^{x+y}$.

Нехай $f(x, y)$ позначає вхідне зображення після кроку 1, $F(u, v)$ – його фур'є-образ. Тоді фур'є-образ вихідного зображення визначається виразом: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$.

Множення функцій двох змінних $H(u, v)$ і $F(u, v)$ здійснюється поелементно, тобто перший елемент функції $H(u, v)$ множиться на перший елемент функції $F(u, v)$, другий елемент функції $H(u, v)$ множиться на другий елемент функції $F(u, v)$ і т.д. У загальному випадку компоненти фільтра $H(u, v)$ є комплексними величинами. На практиці найчастіше використовуються $H(u, v)$ з дійсними компонентами. В цьому випадку і дійсна і уявна частини функції $F(u, v)$ множаться на одну і ту ж дійсну функцію фільтру $H(u, v)$. Такі фільтри називаються фільтрами нульового фазового зсуву, оскільки не змінюють фазу Фур'є-перетворення.

Фільтроване зображення виходить обчисленням зворотного перетворення Фур'є від фур'є-образу $G(u, v)$: фільтроване зображення $= F^{-1}[G(u, v)]$. Шукане зображення виходить виділенням дійсної частини з останнього результату і множення на $(-1)^{x+y}$, щоб компенсувати ефект від множення вхідного зображення на ту ж величину. Зворотне Фур'є-перетворення в загальному випадку є комплексним. Однак в разі речового вхідного зображення і речової функції фільтра уявні частини всіх значень зворотного Фур'є-перетворення повинні рівнятися 0. Але на практиці значення зворотного Фур'є-перетворення, як правило, містять паразитну уявну складову, що пов'язано з помилками заокруглень при обчисленнях. Цією складовою необхідно знехтувати.

2. Поняття дискретної згортки.

Згортка $s(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$ дозволяє розрахувати сигнал

$s(t)$ на виході лінійного фільтра з імпульсною характеристикою $h(t)$, при вхідному сигналі $x(t)$. У дискретному випадку розрізняють два види згорток: лінійну (або аперіодичну) і циклічну. Циклічну згортку ще часто називають круговою або періодичною.

Розглянемо лінійну згортку. Нехай є два дискретних сигналу $a(n)$, $n=0, \dots, N-1$, і $b(n)$, $n=0, \dots, M-1$. У загальному випадку довжини цих сигналів N і M можуть відрізнятися. Лінійної сверткою сигналів $a(n)$ і $b(n)$ називається дискретний сигнал виду:

$$s(n) = a * b = \sum_{m=0}^n a(m)b(n - m), n=0, \dots, N+M-2.$$

Для обчислення лінійної згортки сигнали $a(n)$ і $b(n)$ зрушують відносно один одного почленно перемножують і складають. При цьому передбачається, що $a(n)=0$ при $n<0$ і $n>N$, а також $b(n)=0$ при $n<0$ і $n>M$. Графічне представлення лінійної згортки представлено на рис. 13.1.

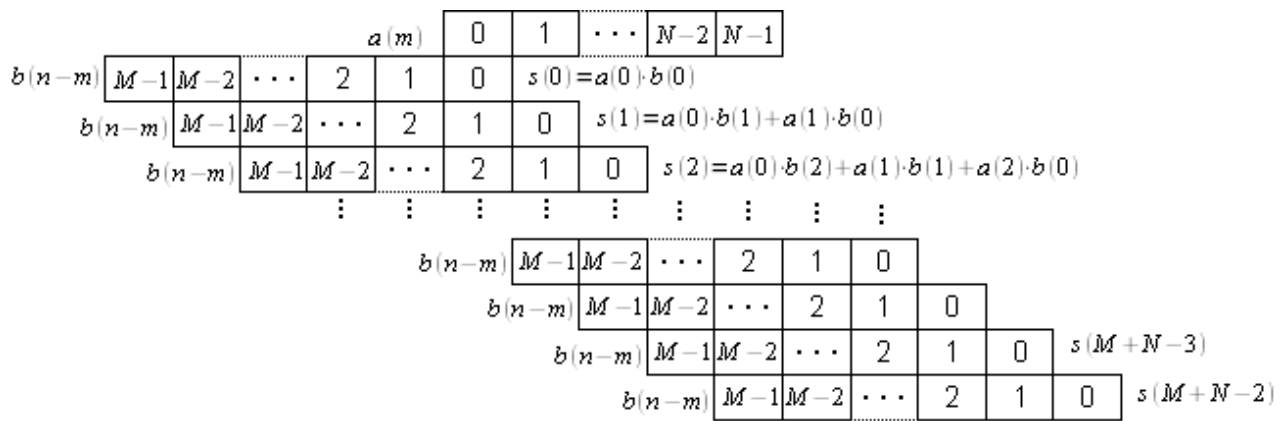


Рис. 13.1. Графічне представлення лінійної згортки

Відлік сигналу $b(n)$ зсуваються щодо відліків послідовності $a(n)$, всі можливі перекриваються відліки поелементно перемножуються і складаються.

Розглянемо тепер циклічну згортку. У разі циклічної згортки передбачається, що дискретні сигнали $a(n)$ і $b(n)$ - періодичні з однаковим періодом N відліків. Тоді кругової сверткою сигналів $a(n)$ і $b(n)$ називається сигнал виду:

$$s(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m)b(n - m), n=0, \dots, N-1.$$

Використовуючи циклічну згортку можна розрахувати лінійну згортку двох сигналів. Для цього необхідно кожен з сигналів $a(n)$ и $b(n)$ тривалістю M і N відліків відповідно доповнити нулями до довжини $M + N - 1$.

3. Відповідність між характеристиками фільтру в просторовій і частотній області. Теорема про згортку.

Відповідність між фільтрацією в просторовій області і фільтрацією в частотній області встановлює прямий зв'язок між фільтрами та їх аналогами в частотному просторі. Взаємозв'язок просторової і частотної областей фільтрації встановлюється відомим результатом, що носить назву теорема про згортку. В основі операції згортки лежить процедура, при якій ми рухаємо деяку маску по зображенню від елемента до елемента і для кожного елемента обчислюємо деяку задалегідь визначену величину.

Формально дискретна згортка двох функцій $f(x,y)$ і $h(x,y)$ означає ніщо інше, як виконання наступній послідовності дій: (1) дзеркальне відображення однієї з функцій щодо початку координат; (2) зрушення цієї функції по відношенню до іншої на величини (x,y) . і (3) обчислення суми творів за всіма значеннями тип для всіх значень зрушень (x,y) . Ці зрушення - цілі збільшення аргументів, які обнуляються, коли функції перестають перекриватися.

Якщо $F(u,v)$ и $H(u,v)$ позначають відповідно Фур'є-образи функцій $f(x,y)$ и $h(x,y)$, то теорема про згортку стверджує, що функції $f(x,y)*h(x,y)$ и $F(u,v)H(u,v)$ утворюють фур'є-пару. Це може бути формально записано у вигляді $f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$. Подвійна стрілка вказує на те, що вираз зліва (просторова згортка) може бути отримано застосуванням зворотного преобразовання Фур'є до вираження справа (твору $F(u,v)H(u,v)$) в частотній області і, назад, вираз справа може бути отримано застосуванням прямого перетворення Фур'є до вираження зліва. Подібний результат полягає в тому, що згортка в частотної облаає призводить до множення в просторової області (поелементне множення двох функцій) і навпаки. Використовуючи теорему про згортку, зауважимо, що фільтри в просторової і

частотної області утворюють Фур'є-пару. Таким чином, по заданому в частотній області фільтру ми можемо отримати відповідний фільтр в просторовій області, застосувавши до першого зворотне перетворення Фур'є. Вірно також і протилежне.

Контрольні питання

1. Дати визначення згортки двох сигналів.
2. Сформулювати теорему про згортку.
3. Описати процедуру фільтрації в частотній області.

ЛЕКЦІЯ 14. ЗГЛАДЖУВАЛЬНІ ФІЛЬТРИ. ІДЕАЛЬНИЙ ФІЛЬТР НИЖНІХ ЧАСТОТ І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ. ПОЯСНЕННЯ ЯВИЩА ГІББСА. ФІЛЬТР НИЖНІХ ЧАСТОТ БАТТЕРВОРТА І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ. ГАУСІВСЬКИЙ ФІЛЬТР НИЖНІХ ЧАСТОТ І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ.

1. Ідеальний фільтр нижніх частот і його передатна функція.
2. Пояснення явища Гіббса.
3. Фільтр нижніх частот Баттерворта і його передатна функція.
4. Гаусівський фільтр нижніх частот і його передатна функція.

1. Ідеальний фільтр нижніх частот і його передатна функція.

Залежно від особливостей амплітудно-частотних характеристик фільтри можна розподілити по категоріям. Якщо фільтр пропускає низькі частоти і блокує високі частоти, він називається фільтром нижніх частот. Якщо він блокує низькі частоти і пропускає високі частоти, це фільтр верхніх частот. Існують також смугові фільтри, які пропускають тільки відносно вузький діапазон частот, і режекторні фільтри, які блокують тільки відносно вузький діапазон частот.

Діапазон частот, для якого фільтр не викликає значного ослаблення, називається смугою пропускання, а діапазон частот, для яких фільтр викликає істотне ослаблення, називається смугою затримування.

Базова «модель» фільтрації в частотній області задається рівністю:

$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$, де $F(u,v)$ - фур'є-образ зображення, яке підлягає згладжуванню. Мета полягає у виборі передавальної функції $H(u,v)$, яка послабить високочастотні компоненти $F(u,v)$ і сформує функцію $G(u,v)$.

Розглянемо три види низькочастотних фільтрів: ідеальний фільтр, фільтр Баттерворта і гаусів фільтр. Ці три фільтра покривають діапазон від дуже різких фільтрів (ідеальний), до дуже гладких фільтрів (гаусів). Фільтр Баттерворта характеризується параметром, який називається порядком фільтра. При малих значеннях цього параметра він має гладку форму, схожу на форму гауссова фільтра. При великих значеннях фільтр Баттерворта наближається за формою до ідеального фільтру. Таким чином, фільтр Баттерворта може розглядатися як перехідний між двома «крайнощами».

Найпростіший фільтр низьких частот, який можна уявити, - це фільтр, який обрізає всі високочастотні складові Фур'є-образу, що знаходяться на більшій відстані від початку координат (центрована) перетворення, ніж деякий задану відстань D_0 . Такий фільтр називається двовимірним ідеальним низькочастотним фільтром (ідеальним фільтром низьких частот, ІФНЧ), і має передавальну функцію

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) \geq D_0 \end{cases}$$

де D_0 - задана ненегативна величина, а $D(u,v)$ позначає відстань від точки (u,v) до початку координат (центра частотного прямокутника). Якщо розглядається зображення має розмір $M \times N$, то, як ми знаємо, той же розмір має його Фур'є-образ. Отже, центр частотного прямокутника знаходиться в точці $(u,v) = (M/2, N/2)$, оскільки Фур'є-перетворення було центрировано. Назва ідеальний фільтр вказує на те, що всі частоти всередині кола радіуса D_0 проходять без зміни, в той час як всі частоти поза колом придушуються повністю. Та точка профілю радіального фільтра низьких частот, в якій відбувається перехід від значень $H(u,v) = 1$ до значень $H(u,v) = 0$ називається частотою зрізу. Різке обрізання частот, властиве ідеального низькочастотного фільтра, не може бути здійснено в електронних пристроях, хоча, звичайно, може бути реалізовано при комп'ютерних обчисленнях.

2. Пояснення явища Гіббса.

У міру збільшення радіусу ідеального фільтра низьких частот, все менша і менша частина енергії підлягає відсіканню, що виражається в зменшенні ступеня розмивання. Відзначимо, що для результуючих зображень характерний «дзвін» (що виражається в появі помилкових контурів навколо контурів реальних), структура якого стає тоншою в міру зменшення енергії відсікається високочастотної складової. Розглядається явище відповідає тому, що в математиці називається «явищем Гіббса». Виникаючі при використанні ІФНЧ ефекти розмивання і появи помилкових контурів можуть бути пояснені за допомогою теореми про згортку. Теорема про згортку говорить про те, що відповідна процедура в просторовій області може бути записана у вигляді $f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$, де $h(x,y)$ - зворотне перетворення Фур'є від функції $H(u,v)$. Ключ до розуміння розмивання в процесі згортки лежить в природі функції $h(x,y)$, яка володіє двома головними відмітними ознаками: розташованої в центрі домінуючою складовою і розташованими навколо неї круговими концентричними складовими. Розмивання головним чином обумовлено центральною складовою. Спостережуване при застосуванні ідеальних фільтрів поява помилкових контурів головним чином обумовлено круговими концентричними складовими. Як радіус центральної компоненти, так і число кіл на одиницю довжини у напрямку від центру обернено пропорційні значенням частоти зрізу ідеального фільтра.

Зворотна залежність між шириною функції $H(u,v)$ і шириною функції $h(x,y)$ (з урахуванням щойно розглянутого механізму згортки) дає математичне пояснення того, чому розмивання і дзвін посилюються при зменшенні ширини використовуваного фільтра в частотній області.

3. Фільтр нижніх частот Баттерворта і його передатна функція.

Передавальна функція фільтра низьких частот Баттерворта (БФНЧ) порядку n з частотою зрізу на відстані D_0 від початку координат задається формулою $H(u,v) = 1/(1+[D(u,v)/D_0]^{2n})$, де $D(u,v)$ позначає відстань від точки (u,v) до початку координат (центра частотного прямокутника). На відміну від ІФНЧ, передавальна функція БФНЧ не має розриву, який встановлює точну межу між пропускають і обрізати частотами. Для фільтрів з гладкою функцією передачі звичайною практикою є визначення місця розташування обрізати частот як безлічі точок, в яких значення функції $H(u,v)$ стають менше деякої частини її максимального значення.

При використанні фільтра Баттерворта порядку 1 дзвін не виникає, що пояснюється властивим фільтру гладким переходом між низькими і високими частотами. Зазвичай дзвін є непомітним для фільтрів близько 2, але може стати значним при використанні фільтрів більш високого порядку. Фільтр Баттерворта

близько 20 вже демонструє властивості ІФНЧ. У межі обидва фільтри стають ідентичними. Взагалі, БФНЧ близько 2 дає приклад хорошого компромісу між ефективністю низькочастотної фільтрації і прийнятним рівнем дзвону.

4. Гаусівський фільтр нижніх частот і його передатна функція.

Гаусові фільтри низьких частот (ГФНЧ) в двовимірному випадку задаються формулою $H(u,v)=\exp(-D(u,v)^2/(2D_0^2))$, де D_0 - частота зрізу. Коли $D(u,v)=D_0$, значення передавальної функції фільтра падає до 0,607 від свого максимального значення.

Зворотне Фур'є-перетворення від гаусом функції знову є Функція Гауса. Це властивість означає, що просторовий гаусів фільтр, отриманий застосуванням зворотного перетворення Фур'є до $H(u,v)$, буде позитивним, і не матиме концентричних кілець (дзвін буде відсутній). Як і в разі БФНЧ, ми відзначаємо плавне зменшення ступеня розмивання при збільшенні частоти зрізу. Застосування ГФНЧ дає меншу в порівнянні з БФНЧ близько 2 згладжування при однаковому значенні частоти зрізу. Цього і слід було очікувати, оскільки профіль ГФНЧ не такий «стислий», як профіль БФНЧ порядку 2. Однак в цілому результати цілком порівнянні, і, крім того, в разі ГФНЧ ми гарантовані від появи дзвону. Це властивість важливо на практиці, особливо в тих ситуаціях, коли артефакти будь-якого роду неприпустимі (наприклад, при обробці медичних зображень). У тих випадках, коли потрібно жорстко контролювати перехідну зону від низьких частот до високих близько частоти зрізу, БФНЧ надають більш відповідний вибір. Платою за цей додатковий контроль над формою фільтра є необхідність зважати на можливість появи дзвону.

Контрольні питання

1. Дати характеристику передавальної функції фільтра низьких частот Баттерворта.
2. Як задаються гаусові фільтри низьких частот?
3. Дати пояснення явища Гіббса.

ЛЕКЦІЯ 15. ФІЛЬТРИ ПІДВИЩЕННЯ РІЗКОСТІ. ІДЕАЛЬНИЙ ФІЛЬТР ВЕРХНІХ ЧАСТОТ І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ. ФІЛЬТР ВЕРХНІХ ЧАСТОТ БАТТЕРВОРТА І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ. ГАУСІВСЬКИЙ ФІЛЬТР ВЕРХНІХ ЧАСТОТ І ЙОГО ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ. ЗГЛАДЖУВАЛЬНІ ФІЛЬТРИ.

1. Ідеальний фільтр верхніх частот і його передатна функція.
2. Фільтр верхніх частот Баттерворта і його передатна функція.
3. Гаусівський фільтр верхніх частот і його передатна функція.

1. Ідеальний фільтр верхніх частот і його передатна функція.

Зображення може бути згладжено шляхом придушення високочастотних складових його фур'є-перетворення. Оскільки контури і інші стрибкоподібні зміни яскравості пов'язані з високочастотними складовими, підвищення різкості зображення може бути досягнуто в частотній області за допомогою процедури високочастотної

фільтрації, яка навпаки, пригнічує низькочастотні складові і не зачіпає високочастотну частину Фур'є-перетворення. Передавальна функція високочастотних фільтрів $H_{HP}(u,v)$ може бути отримана за допомогою наступного співвідношення: $H_{HP}(u,v)=1-H_{LP}(u,v)$, де $H_{LP}(u,v)$ позначає передавальний функцію відповідного фільтра низьких частот. Таким чином, частоти, послаблює низькочастотних фільтром, пропускаються високочастотним фільтром, і навпаки.

Двовимірні ідеальні високочастотні фільтри (ідеальні фільтри високих частот, ІФВЧ) визначаються формулою

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & D(u,v) \leq D_0 \\ 1, & D(u,v) \geq D_0 \end{cases}$$

де D_0 - задана неотрицательная величина, а $D(u,v)$ позначає відстань від точки (u,v) до початку координат (центра частотного прямокутника). Дія ідеального високочастотного фільтра протилежна дії ідеального фільтра низьких частот в тому сенсі, що він обнуляє всі частоти, що потрапляють всередину кола радіуса D_0 , одночасно пропускаючи без ослаблення всі частоти, що лежать поза колом. Як і в разі ідеального фільтра низьких частот, ІФВЧ не може бути реалізований за допомогою електронних пристроїв. Однак він може бути реалізований в комп'ютері.

Зі співвідношення $H_{HP}(u,v)=1-H_{LP}(u,v)$, яке пов'язує фільтри високих і низьких частот, зрозуміло, що ІФВЧ володіють такими ж властивостями щодо дзвону, як і ІФНЧ. Зворотне відношення між шириною фільтра в частотній і просторової області говорить про те, що при збільшенні частоти зрізу ІФВЧ контури на результуючому зображенні стають набагато більш рівними і менше спотворені, і маленькі об'єкти відфільтровані належним чином.

2. Фільтр верхніх частот Баттерворта і його передатна функція.

Передавальна функція високочастотного фільтра Баттерворта (БФВЧ) порядку n з частотою зрізу на відстані D_0 від початку координат задається формулою $H(u,v)=1-1/(1+[D(u,v)/D_0]^{2n})$, де $D(u,v)$ позначає відстань від точки (u,v) до початку координат (центра частотного прямокутника).

Як і в разі низькочастотних фільтрів, ми вправі очікувати від високочастотних фільтрів Баттерворта більш гладкого поведінки в порівнянні з ІФВЧ. Результати застосування БФНЧ близько 2 з частотами зрізу, які беруть ті ж значення, що і для ІФВЧ показують, що перекручування ґриць об'єктів істотно менше, ніж для ІФВЧ, навіть для найменшого значення частоти зрізу. Оскільки розміри центрального плями для ІФВЧ і БФВЧ близькі, робота двох фільтрів по маленьким об'єктів призводить до порівнянним результатам. При більш високих значеннях частоти зрізу для БФВЧ результати обробки зображень істотно більш гладкі, ніж отримані із застосуванням ІФВЧ.

3. Гаусівський фільтр верхніх частот і його передатна функція.

Передавальна функція гауссова фільтра високих частот (ГФВЧ) задається формулою $H(u,v)=1-\exp(-D(u,v)^2/(2D_0^2))$, D_0 - частота зрізу. Оброблені ні за допомогою ГФВЧ зображення є більш гладкими, ніж при використанні ІФВЧ і БФВЧ. Гаусів фільтр дає хорошу якість фільтрації навіть для маленьких об'єктів і тонких смуг. Високочастотні фільтри можна побудувати як різниця низькочастотних гауссових фільтрів. Такі різницеві фільтри, то більша кількість параметрів, і тому для розробки більш націлених формою фільтра. Однак, для вирішення практичних завдань зазвичай виявляється цілком достатньо фільтра $H(u,v)=1-\exp(-D(u,v)^2/(2D_0^2))$, і його вигляд простіше для проведення експериментів.

Контрольні питання

1. Дати визначення ідеального фільтру верхніх частот і його передатної функції.
2. Коли використовується фільтр верхніх частот Баттерворта?.
3. Дати визначення гаусівського фільтру верхніх частот і його передатної функції.

Рекомендована література

1. Козак Ю.Г., Мацкул В.М. Математичне моделювання для економістів: бакалавр-магістр-PhD: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури; 2021. 368 с. Режим доступу: <https://book-ye.com.ua/>
2. Краус Н.М., Краус К.М. Математичний інструментарій моделювання економічних процесів: монографія. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка; 2020. 280 с. Режим доступу: <https://knushop.knu.ua/>
3. Гончаренко О.В. Основи математичного моделювання екологічних та соціальних процесів: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ»; 2019. 156 с. Режим доступу: <https://yakaboo.ua/>
4. Куssуль Н.М., Федоров О.П., Шелестов А.Ю. Моніторинг досягнення цілей сталого розвитку України за супутниковими даними: монографія. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського; 2023. 212 с. Режим доступу: <https://mmda.ipt.kpi.ua/>
5. Ємець В.В., Дригайло В.В. Комп'ютерне моделювання: системи і процеси: підручник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського; 2022. 240 с. Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/items/40dea93e-7060-4040-9537-15995dcd9a8a>
6. Грицай Ю.О., Погорілий О.В. Математичне моделювання систем і процесів: комп'ютерний практикум: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського; 2023. 148 с.
Режим доступу: <https://ela.kpi.ua/items/ff906066-33f0-4104-8e24-d25265792ce2>
7. Бондаренко А.Г., Колесник О.В. Прикладне комп'ютерне і математичне моделювання: комп'ютерне моделювання систем і процесів: навч.-метод. посіб. Київ: Київ. ун-т ім. Бориса Грінченка; 2021. 120 с. Режим доступу: <https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/39039>
8. Соболев О.М. Математичне моделювання в електроенергетиці: навч. посіб. Харків: Укр. енергетичний ін-т; 2020. 210 с.

Навчальне видання

Конспект лекцій з дисципліни «Математичне моделювання» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 124 – Системний аналіз та за спеціальністю 113 – Прикладна математика

Укладач: Марина Вячеславівна Полякова

— Підписано до друку _____. Формат 60x84/16. Папір газетний. Друк
офсетний. 0,87 ум. друк. арк. 0,94 обл. - вид. арк.
Тираж 100 пр. Зам. №

—
Національний університет «Одеська політехніка»
65044, Одеса, пр. Шевченка, 1