Des Cordes

On va aborder différentes questions sur les cordes. Milieux à la fois solides, élastiques et partiellement déformables, on en verra successivement des aspects statiques, dynamiques, vibratoires et .. .musicaux (harmoniques ?.).

Une corde est un milieu unidimensionnel de section uniforme S, $S^{1/2}$ étant faible devant la dimension longitudinale, de masse linéique μ. En un point M de la corde règne une tension T(M). On paramètrera la corde par son abscisse curviligne s ou, lorsqu'elle est assez tendue, par une variable d'espace x linéaire. Ses points se succèdent sans toujours rester alignés.

On rappelle que g = 9,81 m.s $^{-2}$ sous nos latitudes.

Partie I - Corde détendue: chaînette.

La corde est de longueur L et pend de manière flasque, c'est-à-dire sous son propre poids entre deux points de même cote. Par souci de simplicité, on prendra cette cote nulle (z = 0) et les deux extrémités de la corde sur l'axe Ox en O et en A d'abscisse a tel que 0<a<L. La corde est au repos dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen pour l'étude de ce problème.

1) Indiquer par un raisonnement simple pourquoi la corde est contenue dans le plan 0xz

2) On considère **T**(M) = **T**(x) la tension de la corde en un point M. Soit $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent à la corde dans le sens des x croissants. On a alors:

$$\mathbf{T}(x) = T(x)\,\boldsymbol{\tau} = T_x(x)\,\mathbf{e_x} + T_z(x)\,\mathbf{e_z}$$

où $\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{e_z}$ sont les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox et Oz

En exprimant l'équilibre d'un élément de longueur ds de la corde, montrer que $T_x(M)$ est indépendant du point de la corde considéré puis déterminer la variation de T_z en fonction de s.

3) a) Déterminer f = dz/dx en fonction des composantes cartésiennes de la tension T_x et T_z En déduire l'expression de df/dx en fonction de μ, g, T_x et f

b) Intégrer cette relation.

c) Montrer que $z = T_x/\mu g\,[ch(A+\mu gx/T_x)-ch(A)]$ où A est une constante. Déterminer A.

4) Pour obtenir la valeur de T_x, on va devoir utiliser la longueur totale de la corde. Déterminer l'expression de ds en fonction de dx et des caractéristiques de la corde. En déduire L: on obtient une équation donnant implicitement T_x.

5) A.N.: Déterminer numériquement T_x dans le cas d'un filin en acier de section 1 cm^2 sachant que l'acier a une densité de 7,87, que le filin est long de 10 m et accroché entre deux points distants de 6 m. Donner sur la copie l'allure de la forme de la corde à l'échelle 1/100 ème.

Le filin pourrait-il être tenu par un homme à chaque extrémité ? Quelle est la cote du point le plus bas de ce filin ?

Partie II Corde tendue : équation d'onde, cordes stationnaires et cordes agitées

Dans cette partie, la corde est tendue entre les deux points d'accrochage précédents: elle est quasiment rectiligne entre ces deux points à l'équilibre. Dans toute cette partie, on considère que la corde reste proche de sa position d'équilibre et faiblement inclinée par rapport à la position d'équilibre (sur l'axe Ox). La pesanteur sera négligée. Une partie de corde située à l'équilibre en (x,0,0) se situera en (x,0,z) hors équilibre: on ne considère que les mouvements latéraux dans le plan Oxz. Les notations utilisées pour la tension dans la première partie sont toujours valables.

1) Expliquer qualitativement devant quelle grandeur on néglige le poids et pourquoi on peut le faire.

2) Dans l'approximation des petits mouvements que l'on fait, lier dx et ds. Quelle est la relation entre T_x et T, la norme de la tension ?

3) a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à une longueur ds de la corde. En déduire que T_x est constant: que peut-on en conclure pour T, la norme de la tension dans la corde ?
b) Montrer que l'équation en z est à une équation du type:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Donner l'expression de c en fonction des paramètres du problème et en faire une analyse dimensionnelle. Que constate-t-on ?

4) Montrer que les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme:

$$z(x,t) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

Interpréter le sens physique des fonctions f et g et donner le sens physique de c.

5) On va envisager l'aspect énergétique du problème.
a) En multipliant les termes de l'équation d'onde par la vitesse transversale, on peut faire apparaître la variation temporelle d'énergie cinétique linéique. Calculer $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et faire apparaître deux termes dans le membre de droite de l'équation précédente. L'un est une variation temporelle et l'autre est une variation dans l'espace. Regrouper les dérivées temporelles à gauche, la dérivée spatiale restant à droite. Interpréter le résultat comme un bilan d'énergie: identifier l'énergie cinétique linéique, l'énergie potentielle linéique et le terme de flux d'énergie. En déduire $\boldsymbol{\pi}$, le vecteur flux d'énergie en x en fonction de T et des dérivées de z par rapport à x et à t.
b) En considérant le travail de la force de tension qui s'exerce en x sur la corde, retrouver le terme de flux $\pi_x(x)$.
6) On va chercher les formes des réponses correspondant à un régime purement sinusoïdal.
On utilise les notations complexes:

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}\exp(j\,\omega[t - x/c]) + \underline{B}\exp(j\,\omega[t + x/c])$$

où ω est la pulsation du signal, A et B des amplitudes complexes et j est l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.
a) Donner les conditions aux limites de la corde.

b) En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises. Pour ces dernières, on introduira un entier naturel n et on indicera les pulsations et les fréquences: ω_n et f_n Peut-on obtenir plus de précision sur les valeurs de $\underline{A}$ et de $\underline{B}$? Donner une expression simple de z(t) ne faisant plus intervenir que des réels. Comment se nomme ce type d'onde et pourquoi ?

c) Comment appelle-t-on la plus petite valeur permise pour la fréquence $f_1 = \omega_1/2\pi$?
Comment nomme-t-on les suivantes ?
On considérera qu'un signal réel se “ déplaçant ” sur la corde est composé d'une somme des solutions précédentes.
d) Décrire la solution correspondant à n = 3.

7) On revient à l'aspect énergétique mais pour les ondes déterminées en 6).

a) Calculer l'énergie mécanique associée à une des ondes précédentes d'amplitude A et de fréquence f_n en un point de la corde (densité linéique d'énergie) puis sur son ensemble.
Commenter le résultat.
b) L'énergie circule-t-elle dans cette corde ou est-elle stationnaire ? Préciser les points particuliers du point de vue énergétique.

8) On veut vérifier quantitativement que le poids est bien négligeable dans ce problème.
Déterminer précisément l'inégalité portant sur T, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, μ et g qui permet cette approximation.

En déduire l'amplitude critique A_c de l'oscillation $z = A.\cos(\omega_1 t)$ en un point donné de la corde pour négliger le poids durant l'essentiel du mouvement A_c sera donné en fonction des caractéristiques de la corde.
A.N.: déterminer f_1 et A_c pour une corde en acier de densité d = 7,87, de diamètre 0,30 mm, de longueur 64 cm tendue à 100 N. On n'omettra pas de conclure.

Partie III - Corde composée: conditions de passage.

On considère dans cette partie une corde composée de deux parties: l'une de masse linéique μ_1 et l'autre de masse linéique $\mu_2 \neq \mu_1$. Elles sont tendues par la même tension T et liées en O.
Les deux cordes sont suivant l'axe Ox et on ne considère pas le problème de leur point d'attache ailleurs qu'en O: elles pourront être considérées comme infinies, la première en x<0 et la seconde en x>0. On considère une onde incidente venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissant dont on donne la représentation complexe:

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp(j\omega[t - x/C_1])$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux. Les célérités y seront C_1 et C_2.
1) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes respectives de ces deux ondes en complexe. Pourquoi sont-elles de même pulsation que le signal incident ?

2) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux: quelles grandeurs sont continues et pourquoi ?

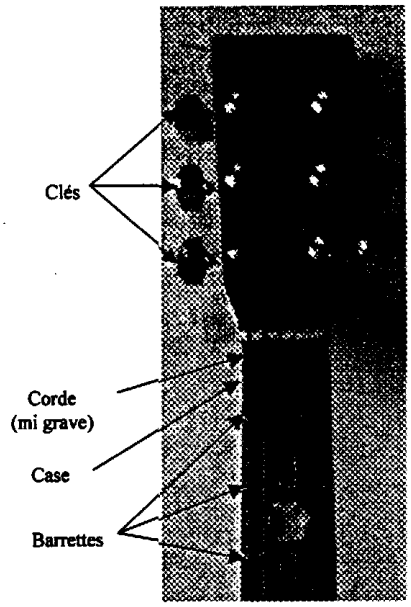
3) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$, puis les ondes réelles associées Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses volumiques, μ_1 et μ_2. Étudier trois cas particuliers liés a des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

4) On considère $\underline{A}_i = A$.

a) Dans le cas où $\mu_1 > \mu_2$, donner z(x,t) pour les deux parties de la corde sous forme d'une somme d'un terme progressif et d'un terme stationnaire (l'un des termes peut être nul) dont on précisera les amplitudes.
b) L'énergie mécanique est-elle continue au passage en O ? Donner l'expression du flux d'énergie qui s'écoule le long de la corde pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et pour l'onde transmise: Π_i, Π_r et Π_t, . Vérifier la conservation de l'énergie lors du passage en O.

5) Faire l'analogie avec les ondes sonores. Peut-on de même qu'en acoustique, ou d'en d'autres domaines, définir une impédance ? On s'appuiera sur les trois ondes précédentes.
Donner la signification physique générale de cette notion.

Partie IV - Application aux cordes de guitare.



Manche de la guitare

On va s'intéresser dans cette partie aux vibrations produites par des cordes de guitare. On se servira des relevés faits sur la guitare photographiée ci-contre et sur laquelle figure des éléments de vocabulaire. On considérera que les cordes sont tendues sur L = 64,25 cm. Au nombre de six. Leur diamètre varie suivant la
fréquence qui leur est associée. Les trois dernières, les plus aiguës, sont en acier d de diamètre 0,30 mm, 0,50 mm et 0,70 mm. De la plus grave à la plus aiguë, elles sont associées aux notes mi_1, la_1 ,re_2, sol_2, si_2 et mi_3 .

Précisons l'évolution des notes en fonction de la fréquence : les notes se répartissent sur une octave, c'est-à-dire un intervalle de fréquences entre f et 2f (fréquence double)

L'octave est divisée en une progression géom t : do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Les écarts entre deux no f entre mi et fa puis entre si et do où il n'y a qu'un se ence 440 Hz que l'on obtient sur la sixième corde de la guitare. Un dièse (#) correspond à une montée d'un demi-ton (ainsi mi# est en fait un fa).

On va se servir des solutions trouvées dans la partie II pour former les ondes qui se propagent sur ces cordes.

1) Déterminer la fréquence fondamentale à vide (lorsqu'elles vibrent sur toute leur longueur) et les tensions des trois cordes en acier (les plus aiguës).

2) Pour pouvoir changer la hauteur (fréquence) de la note jouée sur une corde, on a disposé des barrettes métalliques sur le manche (voir photo): on peut ainsi, en appuyant la corde à l'aide du doigt sur ce support changer la longueur de la corde. En pratique, le doigt appuie dans la case (espace entre les barrettes) précédant la barrette.
a) Pourquoi les barrettes sont-elles disposées orthogonalement au manche et donc aux cordes ?
b) Sur quelle barrette doit reposer la corde de mi_3 pour obtenir le la_3 de référence de la gamme ? A quel endroit du manche est-elle placée ?
c) Avant de jouer de l'instrument, la guitare doit être accordée. Est-ce que cet accordage doit être absolu (c'est-à-dire conforme aux fréquences données en début de partie IV) ou peut-il être relatif (une corde servant de référence et les cinq autres étant accordées sur elle) ?
3) Lorsque l'on frappe une corde ou qu'on la pince, elle n'acquiert pas la forme d'une des solutions trouvée dans la partie II. La solution qui se développera alors sera une somme de plusieurs de ces solutions. On procède à plusieurs enregistrements des sons produits par la guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur. C'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée.
a) Le son produit est-il “ harmonique ” ?
b) Le relevé 1 donné en annexe correspond à un son enregistré après avoir frappé la corde de mi, près du chevalet. Le relevé 2 est l'analyse de Fourier de ce signal.
Commenter ces documents. A quoi pourrait-on s'attendre pour un relevé obtenu après un coup frappé au niveau de la rosace (à peu près au quart de la corde, du côté du chevalet) ? La guitare est-elle accordée ?
c) En plaçant le doigt sur la corde de mi_3 au milieu de la corde, sans l'appuyer sur la barrette, on obtient en frappant la corde le relevé 3. Au-dessus de quelle barrette est-on dans ces conditions ? Ce deuxième enregistrement n'est pas fait avec le même amplificateur. On constate une imperfection au début du relevé 4. A quelle fréquence est-elle due et d'où provient-elle ? Commenter le reste du relevé.

4) Si un son est produit, c'est que la corde perd de l'énergie. On n'envisagera pas le couplage avec la caisse de résonance et avec l'air ambiant. Des considérations expérimentales et qualitatives sur ce phénomène, pour tenir compte de l'action de l'air, amènent, par exemple, à prendre une force de frottement fluide visqueux proportionnelle à la vitesse de la corde s'exerçant sur une longueur ds de celle-ci:

$$- \alpha.ds.dz/dt.$$

a) En quelle unité du système international s'exprime α ?
b) Donner la nouvelle équation du mouvement.

5) On propose alors de modifier les solutions de la partie II mais sans changement radical: il y a juste une perturbation par rapport au cas idéal non-dissipatif de la partieII.
On pose:

$z(x,t) = A.\exp(\beta t).\cos(2\pi ft).\sin(\pi x/L)$ où A et β sont des constantes.

a) Que signifie non-dissipatif ? Y a-t-il des phénomènes réels qui soient non-dissipatifs ?
Quelle loi physique est en rapport avec tout cela ?

b) Connaissez-vous un exemple de méthode de perturbation tiré du programme ?

c) Déterminer β puis α. Que constate-t-on sur ,β ? Était-ce prévisible ? Donner α en fonction de ω ?
Quelles notes persistent le plus longuement ?

6) Les cordes sont fixées au haut du manche à des clés qui permettent d'accorder l'instrument.

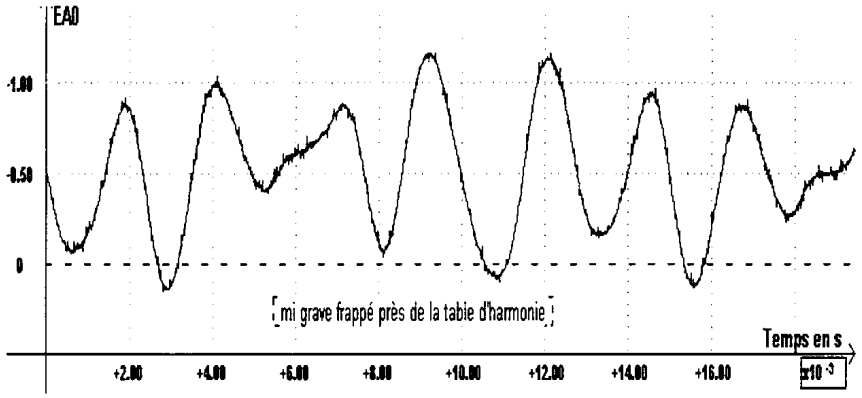
En les tournant, la corde étant enroulée sur la clé, la tension varie. On constate que, pour un quart de tour de clé, la corde la plus fine passe du mi_2 au mi_3. Le cylindre sur lequel est fixée la corde à un diamètre de 5 mm. On définit le module de Young par la relation:

$$E = \frac{T}{S}\frac{l}{\Delta l}$$

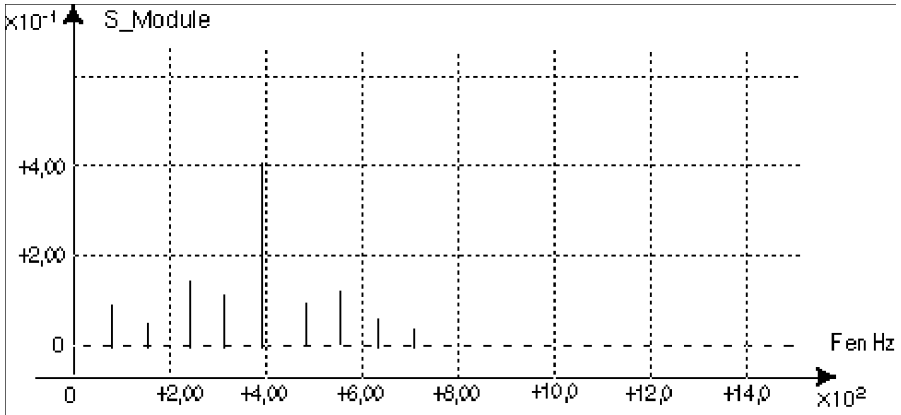
où T est la tension de la corde, S sa section, l sa longueur et Δl son allongement.

Trouver une estimation du module de Young E pour l'acier.

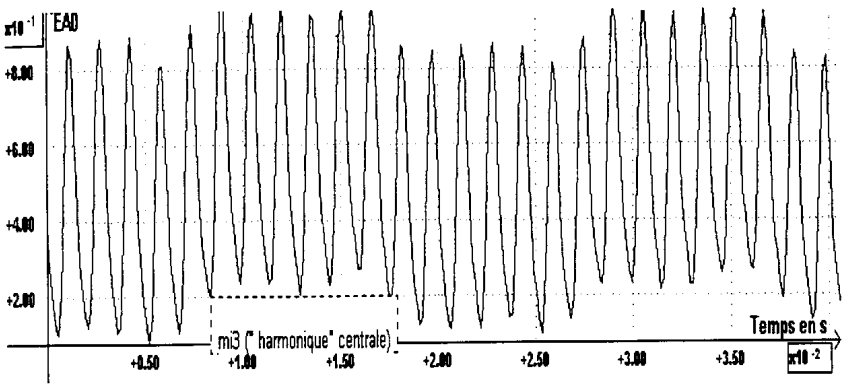
Annexes : courbes de la partie IV.



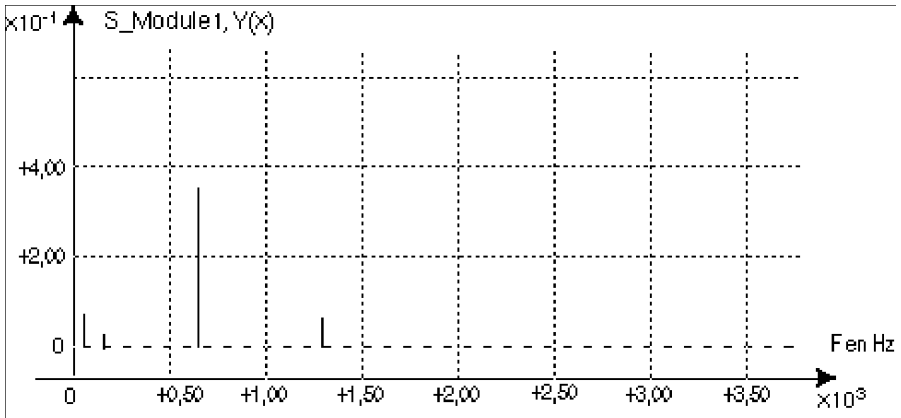
Relevé 1 : enregistrement du son produit par la corde de mi_1.



relevé 2 : analyse de Fourier rapide du signal du relevé 1.



Relevé 3 : « harmonique » de la corde de mi_3.



relevé 4 : analyse de Fourier rapide du signal du relevé 3.