GEOMETRÍA

Por: Almez

La historia del origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencia de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza.

El sabio griego Eudemo de Rodas, atribuyó a los egipcios el descubrimiento de la geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras. Recordemos que, precisamente, la palabra geometría significa medida de tierras.

Los egipcios se centraron principalmente en el cálculo de áreas y volúmenes, encontrando, por ejemplo, para el área del círculo un valor aproximado de 3'1605. Sin embargo el desarrollo geométrico adolece de falta de teoremas y demostraciones formales. También encontramos rudimentos de trigonometría y nociones básicas de semejanza de triángulos.

También se tienen nociones geométricas en la **civilización mesopotámica**, constituyendo los problemas de medida el bloque central en este campo: área del cuadrado, del círculo (con una no muy buena aproximación de, volúmenes de determinados cuerpos, semejanza de figuras, e incluso hay autores que afirman que esta civilización conocía el teorema de Pitágoras aplicado a problemas particulares, aunque no, obviamente, como principio general.

No se puede decir que la geometría fuese el punto fuerte de las **culturas china e india**, limitándose principalmente a la resolución de problemas sobre distancias y semejanzas de cuerpos. También hay quien afirma que estas dos civilizaciones llegaron a enunciados de algunos casos particulares del teorema de Pitágoras, e incluso que desarrollaron algunas ideas sobre la demostración de este teorema.

En los matemáticos de la **cultura helénica** los problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel. Sin embargo, lo novedoso era, que estos problemas poco a poco se desprendieron en una rama independiente de las matemáticas que obtuvo la denominación de "logística". A la logística fueron atribuidas: las operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, el cálculo con la ayuda de dispositivos auxiliares, cálculo con fracciones, resolución numérica de problemas que conducen a ecuaciones de 1er y 2º grado, problemas prácticos de cálculo y constructivos de la arquitectura, geometría, agrimensura, etc.

Al mismo tiempo ya en la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Junto a la demostración geométrica del teorema de Pitágoras fue encontrado el método de hallazgo de la serie ilimitada de las ternas de números "pitagóricos", esto es, ternas de números que satisfacen la ecuación

$a^2+b^2=c^2$.

En este tiempo transcurrieron la abstracción y sistematización de las informaciones geométricas. En los trabajos geométricos se introdujeron y perfeccionaron los métodos de demostración geométrica. Se consideraron, en particular: el teorema de Pitágoras, los problemas sobre la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura de una serie de áreas (en particular las acotadas por líneas curvas).

.Paralelamente, al ampliarse el número de magnitudes medibles, debido a la aparición de los números irracionales, se originó una reformulación de la geometría, dando lugar al álgebra geométrica. Esta nueva rama incluía entre otros conceptos el método de anexión de áreas, el conjunto de proposiciones geométricas que interpretaban las cantidades algebraicas, división áurea, expresión de la arista de un poliedro regular a través del diámetro de la circunferencia circunscrita. Sin embargo, el álgebra geométrica estaba limitada a objetos de dimensión no mayor que dos, siendo inaccesibles los problemas que conducían a ecuaciones de tercer grado o superiores, es decir, se hacían imposibles los problemas que no admitieran solución mediante regla y compás. La historia sobre la resolución de los tres problemas geométricos clásicos (sobre la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo) está llena de anécdotas, pero lo cierto es que como consecuencia de ellos surgieron, por ejemplo, las secciones cónicas, cálculo aproximado del número pi, el método de exhaución como predecesor del cálculo de límites o la introducción de curvas trascendentes.

Asimismo, el surgimiento de la irracionalidad condicionó la necesidad de creación de una teoría general de las relaciones, teoría cuyo fundamento inicial lo constituyó el algoritmo de Euclides.

Las primeras teorías matemáticas que se abstrajeron de los problemas concretos o de un conjunto de problemas de un mismo tipo, crearon las condiciones necesarias y suficientes para el reconocimiento de la autonomía y especificidad de las matemáticas.

El carácter abstracto del objeto de las matemáticas y los métodos de demostración matemática establecidos, fueron las principales causas para que esta ciencia se comenzara a exponer como una ciencia deductiva, que a partir de unos axiomas, presenta una sucesión lógica de teoremas. Las obras en las cuales, en aquella época se exponían los primeros sistemas matemáticos de denominaban "Elementos".

Se encuentran elementos pertenecientes a muchos autores, sin embargo todos ellos han quedado relegados a un segundo plano tras la obra matemática más impresionante de la historia: Los Elementos de Euclides. "Los Elementos", como denominaremos a esta obra a partir de ahora, están constituidos por trece libros, cada uno de los cuales consta de una sucesión de teoremas. A veces se añaden otros dos, los libros 14 y 15 que pertenecen a otros autores pero por su contenido, están próximos al último libro de Euclides.

En "Los Elementos" de Euclides se recogen una serie de axiomas o postulados que sirvieron de base para el posterior desarrollo de la geometría. Es de especial interés, por la controversia que originó en épocas posteriores el quinto axioma, denominado "el de las paralelas", según el cual dos rectas paralelas no se cortan nunca. Durante siglos se asumió este axioma como irrebatible, hasta que en el siglo XIX surgieron las llamadas geometrías no euclídeas, que rebatieron este postulado.

Con posterioridad a Euclides y Arquímedes, las matemáticas cambiaron fuertemente, tanto en su forma como en su contenido, haciendo el proceso de formación de nuevas teorías más pausado, hasta llegar a interrumpirse.

Entre las nuevas teorías desarrolladas ocupa el primer lugar la teoría de las secciones cónicas, que surgió de las limitaciones del álgebra geométrica. El interés hacia las secciones cónicas creció a medida que aumentaban la cantidad de problemas resueltos con su ayuda. Sin duda, la obra más completa, general y sistemática de las secciones cónicas se debe a Apolonio de Perga.

En la época del dominio romano destacan algunos recetarios en forma de reglas que permitían el cálculo de algunas áreas y volúmenes; y en especial la conocida fórmula de Herón para calcular el área del triángulo conocido los tres lados.

Durante el primer siglo del **Imperio Musulmán** no se produjo ningún desarrollo científico, ya que los árabes, no habían conseguido el impulso intelectual necesario, mientras que el interés por el saber en el resto del mundo, había desaparecido casi completamente. Fue a partir de la segunda mitad del siglo VIII, cuando comenzó el desenfrenado proceso de traducir al árabe todas las obras griegas conocidas, fundándose escuelas por todo el Imperio.

Destacaremos como avance anecdótico, pero no por ello carente de valor, la obtención del número pi con 17 cifras exactas mediante polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia realizada por Kashi (s. XV). Después de más de 150 años, en 1593, en Europa, Viète encontró sólo nueve cifras exactas. Hubo que esperar a fines del siglo XVI y comienzos del XVII para repetir el cálculo de Kashi.

El rasgo característico más importante de las matemáticas árabes fue la formación de la trigonometría. En relación con los problemas de astronomía, confeccionaron tablas de las funciones trigonométricas con gran frecuencia y alto grado de exactitud, tanto en trigonometría plana como esférica.

Entre las obras geométricas destacan las de Omar Khayyam (s. XVI) y Nasir Edin (s. XIII), directamente influenciadas por las obras clásicas, pero a las que contribuyeron con distintas generalizaciones y estudios críticos, como los relativos al axioma euclidiano del paralelismo, que pueden considerarse como estudios precursores de la geometría no euclidiana.

En el continente europeo, las matemáticas no tienen un origen tan antiguo como en muchos países del Lejano y Medio Oriente, alcanzando sólo éxitos notorios en la época del medioevo desarrollado y especialmente en el Renacimiento.

Podemos considerar la obra de Fibonacci "Practica Geometriae" como el punto de arranque de la geometría renacentista. Esta obra está dedicada a resolver determinados problemas geométricos, especialmente medida de áreas de polígonos y volúmenes de cuerpos.

Otro contemporáneo, aunque no tan excepcionalmente dotado fue Jordano Nemorarius (1237-?) a quien debemos la primera formulación correcta del problema del plano inclinado.

El profesor parisino Nicole Oresmes (1328-1382) llegó a utilizar en una de sus obras coordenadas rectangulares, aunque de forma rudimentaria, para la representación gráfica de ciertos fenómenos físicos.

Ya en el **siglo XV**, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de Regiomontano (1436-1474), que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos. Asimismo en esta obra se establece un notable cambio desde el álgebra literal al álgebra simbólica.

Fue François Viète (1540-1603) quien dio un sistema único de símbolos algebraicos consecuentemente organizado, estableciendo en todo momento, una fuerte conexión entre los trabajos trigonométricos y algebraicos, de forma que de igual manera que se le considera el creador del álgebra lineal, se le podría considerar como uno de los padres del enfoque analítico de la trigonometría, esto es, la goniometría.

Para hacer más fáciles los cálculos, los matemáticos desarrollaron ciertos procedimientos en los que, el papel fundamental lo jugaban determinadas relaciones trigonométricas, lo que llevó a la confección de numerosas tablas trigonométricas. En la elaboración de tablas trabajaron, por ejemplo, Copérnico (1473-1543) y Kepler (1571,1630). Semejantes métodos se utilizaban tan frecuentemente que recibieron el nombre de "prostaferéticos". Ellos fueron utilizados por los matemáticos de Oriente Medio, Viète, Tycho Brahe, Wittich, Bürgi y muchos otros. Estos métodos siguieron utilizándose incluso después de la invención de los logaritmos a comienzos del siglo XVII, aunque sus fundamentos, basados en la comparación entre progresiones aritméticas y geométricas, comenzaron a fraguarse mucho antes.

Durante el **siglo XVII** surgieron casi todas las disciplinas matemáticas, produciéndose en lo que a la geometría se refiere el nacimiento de la geometría analítica.

Sin duda los dos grandes en esta materia y época fueron René Descartes (1596-1650) y Pierrede Fermat (1601-1655).

La última parte de la famosa obra de Descartes "Discurso del Método" denominada "Géometrie", detalla en su comienzo, instrucciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas, centrándose seguidamente en la aplicación del álgebra a ciertos problemas geométricos. Analiza también curvas de distintos órdenes, para terminar en el tercer y último libro que compone la obra, con la construcción de la teoría general de ecuaciones, llegando a la conclusión de que el número de raíces de una ecuación es igual al grado de la misma, aunque no pudo demostrarlo. Prácticamente la totalidad de la Géometrie está dedicada a la interrelación entre el álgebra y la geometría con ayuda del sistema de coordenadas.

Simultáneamente con Descartes, Pierre de Fermat desarrolló un sistema análogo al de aquél. Las ideas de la geometría analítica, esto es, la introducción de coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebraicos, se concentran en una pequeña obra: "introducción a la teoría de los lugares planos y espaciales". Aquellos lugares geométricos representados por rectas o circunferencias se denominaban planos y los representados por cónicas, especiales. Fermat abordó la tarea de reconstruir los "Lugares Planos" de Apolonio, describiendo alrededor de 1636, el principio fundamental de la geometría analítica: "siempre que en una ecuación final aparezcan dos incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de uno de ellos una línea, recta o curva". Utilizando la notación de Viète, representó en primer lugar la ecuación Dx=B, esto es, una recta. Posteriormente identificó las expresiones $xy=k^2$; $a^2+x^2=ky$; $x^2+y^2+2ax+2by=c^2$; $a^2-x^2=ky^2$ con la hipérbola, parábola circunferencia y elipse respectivamente. Para el caso de ecuaciones cuadráticas más generales, en las que aparecen varios términos de segundo grado, aplicó rotaciones de los ejes con objeto de reducirlas a los términos anteriores.

La extensión de la geometría analítica al estudio de los lugares geométricos espaciales, la realizó por la vía del estudio de la intersección de las superficies espaciales por planos. Sin embargo, las coordenadas espaciales también en él están ausentes y la geometría analítica del espacio quedó sin culminar.

Lo que sí está totalmente demostrado, es que la introducción del método de coordenadas deba atribuirse a Fermat y no a Descartes, sin embargo su obra no ejerció tanta influencia como la Géometrie de Descartes, debido a la tardanza de su edición y al engorroso lenguaje algebraico utilizado.

El desarrollo posterior de la geometría analítica, mostró que las ideas de Descartes sobre la unificación del álgebra y geometría no pudieron realizarse sino que siguieron un camino separado aunque relacionado.

El surgimiento de la geometría analítica, aligeró sustancialmente la formación del análisis infinitesimal y se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la mecánica de Newton, Lagrange y Euler, significando la aparición de las posibilidades para la creación del análisis de variables.

Ya en el **siglo XVIII** se completó el conjunto de las disciplinas geométricas y, excluyendo sólo las geometrías no euclidianas y la apenas iniciada geometría analítica, prácticamente todas las ramas clásicas de la geometría, se formaron en este siglo. Así además de la consolidación de la geometría analítica, surgió la geometría diferencial, descriptiva y proyectiva, así como numerosos trabajos sobre los fundamentos de la geometría. Entre los diferentes problemas y métodos de la geometría, tuvieron gran significado las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal. De ellas surgió y se desarrolló la geometría diferencial, la ciencia que ocupó durante el siglo XVIII el lugar central en al sistema de las disciplinas geométricas. Estudiemos por separado cada una de estas ramas:

Geometría Analítica:
Bajo esta denominación se considera aquella parte de la geometría donde se

estudian las figuras y transformaciones geométricas dadas por ecuaciones algebraicas. Las puertas a esta rama fueron abiertas, ya en el siglo XVII por Descartes y Fermat, pero sólo incluían problemas planos. Hubo de ser Newton quien en 1704 diera un paso importante al publicar la obra, "Enumeración de las curvas de tercer orden", clasificando las curvas según el número posible de puntos de intersección con una recta, obteniendo un total de 72 tipos de curvas, que se podían representar por ecuaciones de cuatro tipos. Si designamos $ax3+bx2+cx+d=A$, entonces las soluciones indicadas serán: $xy2+ey=A$; $xy=A$; $y2=A$; $y=A$. Sin embargo, lo verdaderamente importante de esta obra fue el descubrimiento de las nuevas posibilidades del método de coordenadas, definiendo los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes.

Con posterioridad a Newton, las curvas de tercer orden fueron estudiadas por Stirling, Maclaurin, Nicolle, Maupertius, Braikenridge, Steiner, Salmon, Silvestre, Shall, Clebsch y otros.

Fue Euler quien, en 1748, sistematizó la geometría analítica de una manera formal. En primer lugar expuso el sistema de la geometría analítica en el plano, introduciendo además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y polares. En segundo lugar, estudió las transformaciones de los sistemas de coordenadas. También clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales. En otros apartados de sus obras trató las secciones cónicas, las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, las ramas infinitas y asintóticas de las secciones cónicas y clasificó las curvas de tercer y cuarto orden, demostrando la inexactitud de la clasificación newtoniana. También estudió las tangentes, problemas de curvaturas, diámetros y simetrías, semejanzas y propiedades afines, intersección de curvas, composición de ecuaciones de curvas complejas, curvas trascendentes y la resolución general de ecuaciones trigonométricas. Todo estos aspectos se recogen en el segundo tomo de la obra "Introducción al análisis..." que Euler dedicó exclusivamente a la geometría analítica.

En la segunda mitad del siglo se introdujeron sólo mejoras parciales, pues en lo fundamental, la geometría analítica ya estaba formada. Destacaremos entre otros los nombres de G. Monge, Lacroix y Menier.

Geometría diferencial:

Esta disciplina matemática se encarga del estudio de los objetos geométricos, o sea, las curvas, superficies etc. Su singularidad consiste en que partiendo de la geometría analítica utiliza métodos del cálculo diferencial.

A comienzos de siglo ya habían sido estudiados muchos fenómenos de las curvas planas por medio del análisis infinitesimal, para pasar posteriormente a estudiar las curvas espaciales y las superficies. Este traspaso de los métodos de la geometría bidimensional al caso tridimensional fue realizado por Clairaut. Sin embargo, su obra fue eclipsada, como casi todo en esta época, por los trabajos de Euler.

El primer logro de Euler en este terreno, fue la obtención de la ecuación diferencial de las líneas geodésicas sobre una superficie, desarrollando a continuación una completa teoría de superficies, introduciendo entre otros el concepto de superficie desarrollable.

A finales de siglo, es desarrollo de esta rama entró en un ligero declive, debido principalmente a la pesadez y complejidad del aparato matemático.

Geometría descriptiva y proyectiva:
Los métodos de la geometría descriptiva surgieron en el dominio de las aplicaciones técnicas de la matemática y su formación como ciencia matemática especial, se culminó en los trabajos de Monge, cuya obra en este terreno quedó plasmada en el texto "Géometrie descriptive". En la obra se aclara, en primer lugar, el método y objeto de la geometría descriptiva, prosiguiendo a continuación, con instrucciones sobre planos tangentes y normales a superficies curvas. Analiza en capítulos posteriores la intersección de superficies curvas y la curvatura de líneas y superficies.

El perfeccionamiento de carácter particular y la elaboración de diferentes métodos de proyección constituyeron el contenido fundamental de los trabajos sobre geometría proyectiva en lo sucesivo. La idea del estudio de las propiedades proyectivas de los objetos geométricos, surgió como un nuevo enfoque que simplificara la teoría de las secciones cónicas. Las obras de Desargues y Pascal resuelven este problema y sirven de base a la nueva geometría.

Como acabamos de ver la geometría hacia comienzos del **siglo XIX** representaba ya un amplio complejo de disciplinas surgidas del análisis y generalizaciones de los datos sobre las formas espaciales de los cuerpos. Junto a las partes elementales, se incluyeron en la geometría casi todas aquellas partes que la conforman actualmente.

La geometría analítica realizó un gran camino de desarrollo y determinó su lugar como parte de la geometría que estudia las figuras y transformaciones dadas por ecuaciones algebraicas con ayuda del método de coordenadas utilizando los métodos del álgebra.
La geometría diferencial se caracterizó por la utilización de los conceptos y métodos del cálculo diferencial, lo que conllevó relaciones estables con el análisis matemático y con numerosos problemas aplicados.

Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que los matemáticos estudiaron una gran variedad de transformaciones. De ellas, las que se hicieron más populares fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que definen la denominada geometría proyectiva. Los métodos aparentemente detenidos en su desarrollo desde la época de Desargues y Pascal, de estudio de las propiedades de las figuras invariantes respecto a la proyección, se conformaron en los años 20 del siglo XIX en una nueva rama de la geometría: la geometría proyectiva, merced sobre todo a los trabajos de J. Poncelet.

Otro aspecto esencial durante este siglo fue el desarrollo de las geometrías no euclidianas. Podríamos considerar fundador de esta geometría al matemático ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski (1792-1856). Su obra mostraba que era necesario revisar los conceptos fundamentales que se admitían sobre la naturaleza de la matemática, pero ante el rechazo de sus contemporáneos tuvo que desarrollar sus ideas en solitario aislamiento.

El punto de partida de las investigaciones de Lobachevski sobre geometría no euclidiana fue el axioma de las paralelas de Euclides, sin demostración durante siglos. Lobachevski, que inicialmente intentó demostrar dicho axioma, rápidamente se dio cuenta que ello era imposible, sustituyendo dicho axioma por su negación: a través de un punto no contenido en una recta se puede trazar más de una paralela que yace en el mismo plano que la primera.

El año 1826 puede considerarse como la fecha de nacimiento de esta geometría no euclidiana o lobachevskiana, siendo en ese año cuando el autor presentó muchos de los trabajos que avalaban la nueva teoría.

En 1829 Janos Bolyai (1802-1860) llegó a la misma conclusión a la que había llegado Lobachevski. E incluso el mismo Gauss que apoyaba y elogiaba a escondidas, nunca de forma pública, los trabajos de Bolyai y Lobachevski, es posible que mantuviera los mismos puntos de vista pero los calló por temor a comprometer su reputación científica.

La geometría no euclidiana continuó siendo durante varias décadas un aspecto marginal de la matemática, hasta que se integró en ella completamente gracias a las concepciones extraordinariamente generales de Rieman.