



Chapitre 03 Dérivation

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples

- Soit la fonction f définie sur $] - \infty ; 0[\cup] 0 ; + \infty [$ par

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	- 0,5	- 0,1	- 0,01	- 0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

- Soit la fonction g définie sur $] - \infty ; 0[\cup] 0 ; + \infty [$ par

$$g(x) = \frac{1}{x^2}$$

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+$ et on note

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Définition

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On note $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et on lit : « La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L . »

II. Dérivabilité

1. Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.

Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b .

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Fonction dérivable

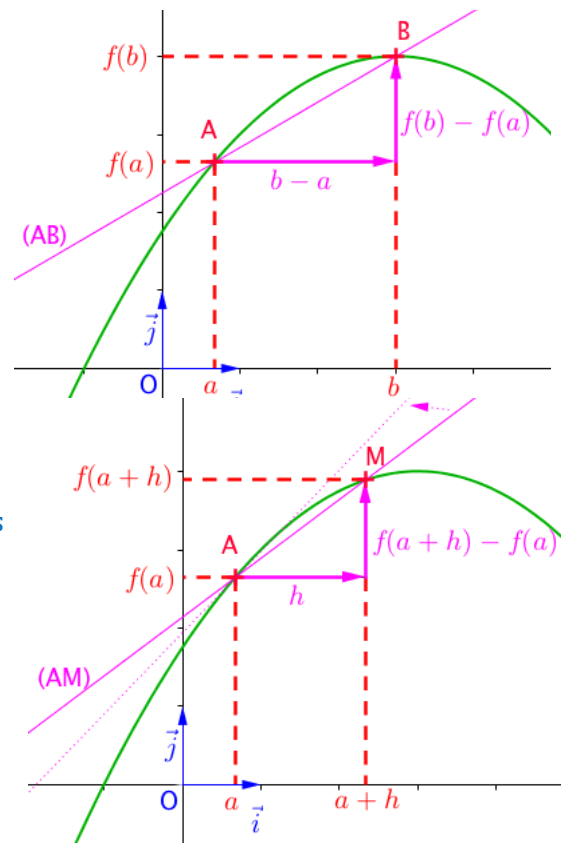
Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit un réel a appartenant à I . Soit un réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a + h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.



La limite de ce coefficient directeur lorsque h tend vers 0 s'appelle le **nombre dérivé de f en a** .

Définition

On dit que la fonction f est **dérivable en a** s'il existe un nombre réel L , tel que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

L est appelé le **nombre dérivé** de f en a . On note alors $f'(a) = L$

Méthode

Démontrer qu'une fonction est dérivable

▶ Vidéo <https://youtu.be/UmT0Gov6yyE>

▶ Vidéo https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE

1. Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Démontrer que f est dérivable en $x = 2$

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 5|$

La fonction g est-elle dérivable en $x = 5$?

Solution

1. On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - (2^2 + 2 \times 2 - 3)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3 - 5}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

$$f'(2) = 6$$

2. On commence par calculer $\frac{g(5+h)-g(5)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$\frac{g(5+h)-g(5)}{h} = \frac{|5+h-5| - |5-5|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{pour } h > 0 \\ -\frac{h}{h} = -1 & \text{pour } h < 0 \end{cases}$$

$\frac{g(5+h)-g(5)}{h}$ n'admet donc pas de limite (unique) lorsque h tend vers 0 donc g **n'est pas dérivable en $x = 5$** .

III. Tangente à une courbe

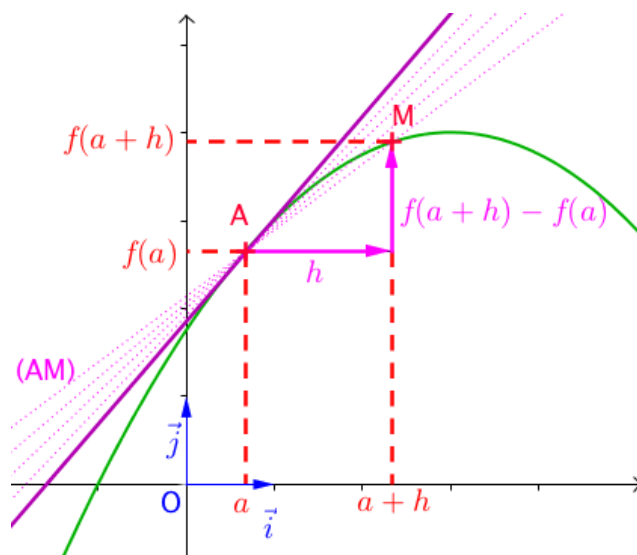
Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a . $f'(a) = L$

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition

La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de **coefficient directeur le nombre dérivé L** .



Méthode

Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

► Vidéo <https://youtu.be/0jhxK55jONs>

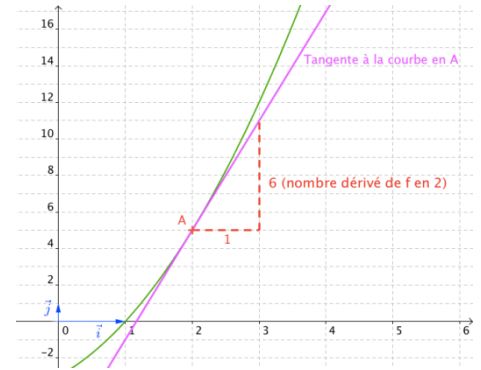
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

Solution

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.



Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration

La tangente a pour coefficient directeur $L = f'(a)$ donc son équation est de la forme $y = Lx + b$ où b est un réel. Déterminons b .

La tangente passe par le point $A(a; f(a))$, donc

$$f(a) = La + b$$

Soit

$$b = f(a) - La$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire

$$y = Lx + f(a) - La$$

Soit

$$y = L(x - a) + f(a)$$

Méthode

Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

► Vidéo <https://youtu.be/fKEGoo50Xmo>

► Vidéo <https://youtu.be/7-z62dSkkTQ>

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

Solution

On a vu plus haut que le coefficient directeur de la tangente est égal à 6.

Donc son équation est de la forme $y = 6(x - 2) + f(2)$

Soit

$$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 6x - 12 + 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est

$$y = 6x - 7$$