Consideriamo il seguente problema: un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di $\frac{100}{10}=10\,\frac{m}{s}$ (metri al secondo).
Si tratta di una una media; per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo. In formule:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

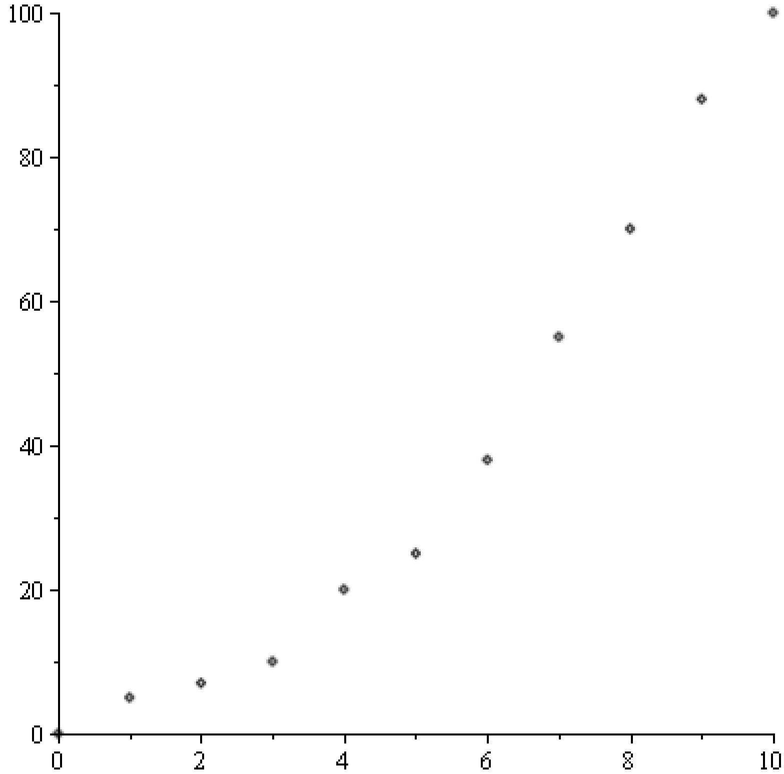
dove Δs sta per spazio percorso e *Δt* sta per tempo impiegato a percorrerlo.
Δs = 100, Δt = 10
In questo caso è:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{100}{10}=10\,\frac{m}{s}$$

In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità. Supponiamo di rilevare in ogni secondo la distanza percorsa e riportiamo i dati in una tabella

tempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
posizione	0	5	7	10	20	25	38	55	70	88	100

Rappresentando la sua corsa in un grafico tempo-spazio ci si può fare un'idea dell'andamento della corsa.



Calcoliamo la velocità media in ogni intervallo di tempo della durata di un secondo utilizzando per ogni intervallo la formula della velocità media. Indicando con s_0 la posizione al tempo t_0, con s_1 la posizione al tempo t_1,... con s_n la posizione al tempo t_n...., la velocità nell'intervallo $[t_n,t_{n+1}]$ si calcola con la formula

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n}$$

Si riportano di seguito i risultati in una tabella:

intervallo	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[6,7]	[7,8]	[8,9]	[9,10]
Velocità media	5	2	3	10	5	13	17	15	18	12

Notiamo che la velocità media di 10 $\frac{m}{s}$è diversa dalla velocità media in ciascun intervallo.
Se conoscessimo anche la posizione in modo più preciso, per esempio con 10 osservazioni in ciascun sottintervallo, potremmo indicare meglio la velocità.
Prendiamo per esempio l'intervallo [0,1].

tempo	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
posizione	0	0.4	1	1.2	2	2.7	2.9	3.7	4.1	4.8	5

Le relative velocità medie in ciascun sottintervallo sono:

intervallo	[0,0.1]	[0.1,0.2]	[0.2,0.3]	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]	[0.5,0.6]	[0.6,0.7]	[0.7,0.8]	[0.8,0.9]	[0.9,1]
Velocità media	4	6	2	8	7	2	8	4	7	2

E così potremmo fare per ciascun altro sottintervallo.
Potremmo rifare lo stesso discorso anche su sottintervalli più piccoli.
Supponendo di avere tutti questi dati a disposizione potremmo calcolare le velocità medie in tutti i sottintervalli.
Si potrebbe procedere in questa maniera suddividendo ulteriormente i sottintervalli, fino a descrivere la velocità istante per istante. Ma che cosa vuol dire esattamente istante? Se ammettiamo che un istante corrisponda a un intervallo di tempo nullo, e quindi che in un tempo nullo sia stato percorso uno spazio nullo, abbiamo $\Delta t = 0$ e $\Delta s = 0$ e quindi la velocità istantanea varrebbe $v = \frac{0}{0}$ che è una frazione indeterminata e quindi indefinita.

Nella pratica il problema della velocità sembra irresolubile: anche riprendendo il moto dell'atleta con la telecamera più sensibile, si giungerà a un all'intervallo di tempo minimo al di sotto del quale non si potrà più scendere; non è possibile avere la velocità istantanea ma solo una velocità media su un tempo molto breve; inoltre mano a mano che spazi e tempi diventano più piccoli, diventa sempre più grande l'errore percentuale commesso nella misura; perciò il calcolo della velocità sarà meno precisa più piccoli saranno gli intervalli di tempo presi in considerazione. Dal punto di vista teorico però è proprio questa la strada che porterà a definire la velocità istantanea. Abbiamo però bisogno di strumenti matematici adeguati.

Innanzitutto ci vuole uno strumento per descrivere la posizione istante per istante. Che cosa c'è di meglio di una funzione che descrive la posizione s in funzione del tempo trascorso?

Poi ci vuole un altro strumento per descrivere il tempo trascorso e lo spazio percorso in un certo istante: un oggetto diverso da zero, ma abbastanza piccolo da descrivere l'istante di tempo e il relativo spazio percorso.

Per superare questa situazione **Newton** introdusse il concetto di infinitesimo: l'istante di tempo è visto non più come un tempo nullo ma come un tempo infinitamente piccolo o infinitesimo dt (leggi de-ti) e analogamente lo spazio percorso come uno spazio infinitesimo ds (leggi de-esse). La velocità istantanea è allora data dal quoziente , che si chiamerà derivata dello spazio rispetto al tempo.

A prima vista questa soluzione può sembrare artificiosa e priva di utilità pratica. Vedremo invece che a partire da queste osservazioni possiamo costruire un nuovo tipo di calcolo, il calcolo infinitesimale, una vera rivoluzione nella matematica, ma anche nella fisica. L'analisi è tuttora strumento di lavoro fondamentale per fisici e ingegneri.