

Позиционные и непозиционные системы счисления

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда же возникла и необходимость в названии и записи чисел.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали, прежде всего, пальцы рук и ног. Издревле употреблялся еще такой вид инструментального счета, как деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Вереvoчные счеты с узелками употреблялись в России и во многих странах Европы.

Способ «записи» чисел при помощи зарубок или узлов был не слишком удобным, так как для записи больших чисел приходилось делать много зарубок или узлов, что затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом, трудно было выполнять и действия над ними. Поэтому возникли иные, более экономичные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречались группы по 5, 12, 20 элементов. Так, счет двадцатками использовали люди племени майя. «Следы» такого счета сохранились в датском и некоторых других европейских языках. Иногда применялся счет пятками, а также группами по 12 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Например, число 185 представлялось как 3 раза по 60 и еще 5. Записывалось такое число с помощью всего двух знаков, один из которых обозначал, сколько раз взято по 60, а другой - сколько взято единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах.

Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая сейчас почти всюду, основана на группировании десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятичная система счисления возникла в Индии, в VI в. Однако вид индийских цифр значительно отличается от современной их записи. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока приняли современную форму.

Первыми заимствовали у индийцев цифры и десятичную систему счисления арабы. Распространению же этого способа записи чисел и правил выполнения арифметических действий над числами способствовала книга среднеазиатского ученого аль-Хорезми «Об индийском счете», созданная им в начале IX в.

Европейцы познакомились с достижениями индо-арабской математики в XI в. Расширение торговли повлекло за собой значительное усложнение счета, появилась потребность в совершенствовании методов счета. Поэтому европейские математики обратились к трудам греческих и арабских ученых, перевели их на латинский язык. С десятичной системой счисления европейцы познакомились через перевод книги аль-Хорезми. В 1202 г. выходит «Книга абака» Л. Фибоначчи, где также вводятся индийские цифры и ноль. С XIII в. начинается внедрение десятичной системы, и к XVI в. она стала повсеместно использоваться в странах Западной Европы.

Распространению десятичной системы в России способствовала книга первого русского выдающегося педагога-математика Л.Ф.Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 г. на славянском языке. Она являлась энциклопедией математических знаний того времени. Все вычисления в ней проводятся при помощи цифр индийской нумерации. В «Арифметике» выделено особое действие «нумерация, или

счисление»: «Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0 (которая цифрой или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей, то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем». Однозначные числа в книге Л.Ф.Магницкого называются «перстами»; числа, составленные из единиц и нулей, - «суставами»; все остальные числа - «сочинениями». Таблица с названиями круглых чисел доведена Магницким до числа с 24 нулями. В «Арифметике» в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...»

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления - это метод записи числа при помощи указанного набора специальных знаков (цифр).

Система счисления:

- даёт представление множества чисел (целых и/или вещественных);
- даёт каждому числу уникальное представление (либо, хотя бы, стандартное представление);
- отображает алгебраическую и арифметическую структуру числа.

Запись числа в некоторой системе счисления называется **кодом числа**.

Отдельная позиция в отображении числа называется **разряд**, значит, номер позиции - **номер разряда**.

Количество разрядов в записи числа называют **разрядностью** и совпадает с его длиной.

Системы счисления делятся на **позиционные** и **непозиционные**. Позиционные системы счисления делятся на **однородные** и **смешанные**.

Непозиционная система счисления — древнейшая, здесь все цифры числа имеют величину, которая не зависит от позиции (разряда).

Т.е., если есть 5 палочек, значит число соответственно равно 5, так как каждой палочке, вне зависимости от её места в строке, соответствует только 1 предмет.

Позиционная система счисления — значение каждой цифры зависит от позиции (разряда) этой цифры в числе.

Например, стандартная 10-я система счисления является позиционной. Допустим дано число 453.

Цифра 4 означает число сотен и соответствует числу 400, 5 — кол-во десятков и соответствует значению

50, а 3 — единицы и значению 3. Легко заметить, что с увеличением разряда увеличивается значение.

Таким образом, заданное число запишем в виде суммы $400+50+3=453$.

Однородная система — для каждого разряда (позиции) числа набор допустимых символов (цифр) одинаковый. Как пример снова используем 10-ю систему. Если записывать число в однородной 10-й системе, то можно использовать в каждом разряде только одну цифру в интервале 0 - 9, т.о., допускается число 450 (1-й разряд — 0, 2-й — 5, 3-й — 4), а 4F5 — нет, так как символ F не входит в набор цифр от 0 до 9.

Смешанная система — в каждом разряде (позиции) числа набор допустимых символов (цифр) может отличаться от наборов в других разрядах. Хороший пример — система измерения времени. В разряде секунд и минут существует 60 разнообразных символов («00» - «59»), в разряде часов — 24 символа («00» - «23»), в разряде суток — 365 и т. д.

В **непозиционных системах счисления** вес цифры не зависит от позиции, которую она занимает в числе. К примеру, в **римской системе счисления** в числе XXXII (32) вес цифры X в каждой позиции равняется десяти.

Цифрами в римской системе служат: I(1), V(5), X(10), L(50), C(100), D(500), M(1000).

Размер числа в римской системе счисления определяют как сумму либо разность цифр в числе. Когда меньшая цифра стоит слева от большей – она вычитается, когда справа – прибавляется.

Например:

CCXXXII=232

IX=9

Самая первая система счисления — единичная (непозиционная).

В **позиционных системах счисления** вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее позиции в последовательности цифр, которые изображают число.

Каждая позиционная система характеризуется своим основанием.

Основание позиционной системы счисления – это количество разных знаков либо символов, которые используются для изображения цифр в этой системе.

Основанием принимают всякое натуральное число - 2, 3, 4, 16 и т.д. То есть, существует бесграничное множество позиционных систем.

Примеры позиционной системы счисления – [двоичная система счисления](#), [десятичная система счисления](#), [восьмеричная система счисления](#), [шестнадцатеричная система счисления](#) и другие системы счисления.

Перевод систем счисления. Числа можно перевести из одной системы счисления в другую.

Таблица соответствия цифр в различных системах счисления.

Различают **позиционные** и **непозиционные системы счисления**. В позиционных системах один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Так, шестидесятеричная вавилонская и десятичная системы счисления являются позиционными.

Непозиционные системы характеризуются тем, что каждый знак (из совокупности знаков, принятых в данной системе для обозначения чисел) всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примером такой системы может служить римская система, возникшая в средние века. В этой системе счисления имеются знаки для узловых чисел: единица обозначается - I, пять - V, пятьдесят - L, сто - C, пятьсот - D, тысяча - M. Все остальные числа получают при помощи двух арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится тогда, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV - четыре, XC - девяносто. Запишем несколько чисел в римской нумерации.

193 - это сто (C) плюс девяносто, т.е. сто без десяти (XC), плюс три (III); следовательно, число 193 записывается как CXCIII.

564 - это пятьсот (D) плюс пятьдесят (L) плюс десять (X) плюс, четыре, т.е. пять без одного (IV). Следовательно, 564 записывается как DLXIV.

2708 - это две тысячи (MM) плюс пятьсот (D) плюс сто (C) плюс сто (C) плюс пять (V) плюс три (III). Следовательно, число 2708 записывается так: MMDCCVIII.

Если число содержит несколько (немного) тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака M. Вообще же числа четырех-, пяти- и шестизначные записывались с помощью буквы m (от лат. слова mille - тысяча), слева от

которой записывали тысячи, а справа - сотни, десятки, единицы. Так, запись CXXXIII^mDCCCXLII является записью числа 133842.

В России до XVII в. в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа изображались буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставили особый знак - титло.

Естественно, что такие системы записи чисел, как римская или славянская, были удобнее, чем зарубки на бирках, поскольку позволяли записывать большие числа. Однако выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом. Поэтому на смену им пришла десятичная система счисления.

Римская система счисления. Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (Centum — сто, Demimille — половина тысячи, Mille — тысяча).

Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков, единиц. Например, десятичное число 28 представляется следующим образом:

XXVIII=10+10+5+1+1+1 (три десятка, пяток, три единицы). Для записи промежуточных чисел римляне использовали не только сложение, но и вычитание. При этом применялось следующее правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Например, IX — обозначает 9, XI — обозначает 11.

Десятичное число 99 имеет следующее представление:

XCIX = -10+100-1+10.

Римскими цифрами пользовались очень долго. Еще 200 лет назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать). Римская система счисления сегодня используется, в основном, для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

Алфавитные системы счисления. Более совершенными непозиционными системами счисления были алфавитные системы. К числу таких систем счисления относились греческая, славянская, финикийская и другие. В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита.

В алфавитной системе счисления Древней Греции числа 1, 2, ..., 9 обозначались первыми девятью буквами греческого алфавита, например а = 1, б = 2, г = 3 и т.д. Для обозначения чисел 10, 20, ..., 90 применялись следующие 9 букв (и = 10, к = 20, л = 30, м = 40 и т.д.), а для обозначения чисел 100, 200, ..., 900 — последние 9 букв (р = 100, с = 200, т = 300 и т.д.). Например, число 141 обозначалось гма.

В России славянская нумерация сохранилась до конца XVII века. При Петре I возобладала так называемая арабская нумерация, которой мы пользуемся и сейчас. Славянская нумерация сохранилась только в богослужебных книгах.

Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:

1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.

2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.

3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.