

Тема уроку: Тригонометричні функції числового аргументу.

Мета уроку: Формування поняття тригонометричних функцій числового аргументу; вивчення значень тригонометричних функцій деяких чисел (кутів), зміни знаків тригонометричних функцій у координатних чвертях.

I. Перевірка домашнього завдання.

Розв'язування вправ аналогічних до домашніх.

1. Подайте в радіанній мірі кути:

а) 5° ; б) 1140° ; в) -765° ; г) $67^\circ 5'$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{36}$; б) $6\frac{1}{3}\pi$; в) $-4\frac{1}{4}\pi$; г) $\frac{3\pi}{8}$.

2. Подайте в градусній мірі кути:

а) 12° , б) $1,25\pi$; в) 1 ; г) 10 .

Відповідь: а) 105° ; б) 225° ; в) $57,32^\circ$; г) $573,25^\circ$.

3. Знайдіть довжину дуги, якщо на неї опирається центральний кут $\alpha = \frac{9\pi}{10}$, а радіус кола дорівнює 10 м.

Відповідь: 9π м.

II. Сприймання і усвідомлення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа.

Розглянемо на координатній площині коло радіуса 1 з центром у початку координат, яке називається одиничним (рис. 43). Позначимо точку P_0 — правий кінець горизонтального діаметра. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу α точку кола за такими правилами:

1) Якщо $\alpha > 0$, то, рухаючись по колу із точки P_0 в напрямі проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу кола), опишемо по колу шлях довжиною α , кінцева точка цього шляху і буде шуканою точкою P_α .

2) Якщо $\alpha < 0$, то, рухаючись із точки P_0 (рис. 44) в напрямі за годинниковою стрілкою, опишемо по колу шлях довжиною $|\alpha|$; кінець цього шляху і буде шукана точка P_α .

3) Якщо $\alpha = 0$, то поставимо у відповідність точку P_0 .

Таким чином, кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку P_α одиничного кола.

Якщо $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, де k — ціле число, то при повороті на кут α одержуємо одну і ту саму точку, що й при повороті на кут α_0 .

Якщо точка P відповідає числу α , то вона відповідає і всім числам виду $\alpha + 2\pi k$, де 2π — довжина кола (бо радіус дорівнює 1), а k — ціле число, що показує кількість повних обходів кола в ту чи іншу сторону.

Виконання вправ

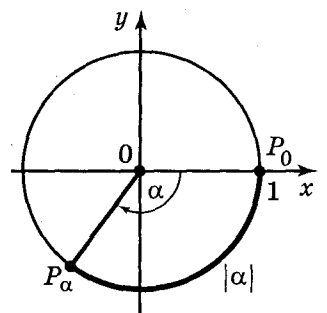
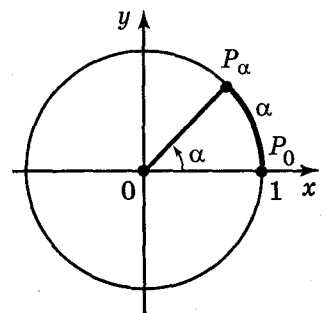


Рис. 44

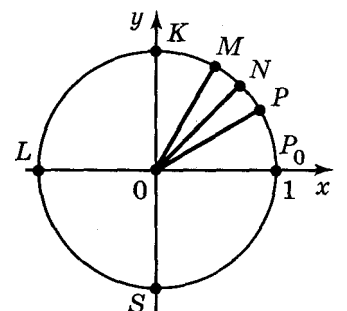


Рис. 45

1. Яким числам відповідають точки P_0, P, M, K, L, S (рис. 45), якщо відомо, що N — середина дуги P_0K , а дуги P_0P, PM, MK — рівні.

Відповідь: $2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам:

а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: а) рис. 46 (кожна чверть кола поділена на 2 рівні частини);

б) рис. 47 (кожна чверть кола поділена на 3 рівні частини).

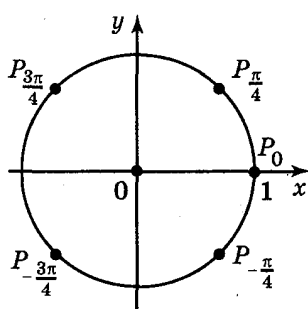


Рис. 46

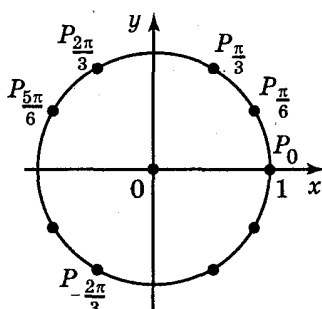


Рис. 47

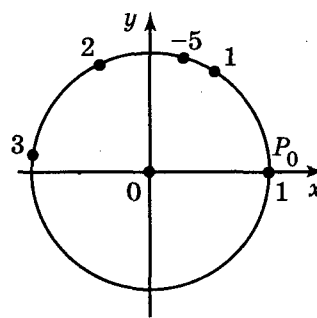


Рис. 48

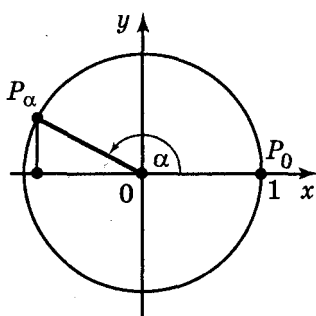


Рис. 49

3. Позначте на одиничному колі точки, які відповідають числам 1; 2; 3; -5.

Відповідь: рис. 48.



Синусом числа α називається ордината точки P_α , утвореної поворотом точки P_0 (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\sin \alpha$) (рис. 49).

Синус визначений для будь-якого числа α .



Косинусом числа α називається абсциса точки P_α , утвореної поворотом точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\cos \alpha$) (рис. 49).

Косинус визначений для будь-якого числа α .

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $\cos 7\pi$; б) $\sin 7\pi$; в) $\cos \frac{5\pi}{2}$; г) $\sin \frac{5\pi}{2}$.

Відповідь: а) -1; б) 0; в) 0; г) 1.

2. Обчисліть:

а) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$; в) $\sin \pi + \sin 1,5\pi$; г) $\cos 0 + \cos 3,5\pi - \cos 3\pi$.
Відповідь: а) 0; б) -1; в) -1; г) 2.



Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Тангенс визначений для всіх α , крім тих значень, для яких $\cos \alpha = 0$, тобто, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінію тангенсів (рис. 50). Проведемо дотичну t до одиничного кола в точці P_0 . Нехай α — довільне число, для якого $\cos \alpha \neq 0$, тоді точка $P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$ не лежить на осі ординат і пряма OP_α перетинає t в деякій точці T_α з абсцисою 1. Знайдемо ординату точки T_α із трикутника OP_0T_α .

$$\frac{y}{1} = \operatorname{tg} \alpha; \quad y = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким чином, ордината точки перетину прямих OP_α і t дорівнює тангенсу числа α . Тому пряму t називають

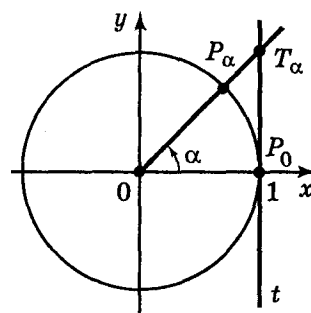


Рис. 50

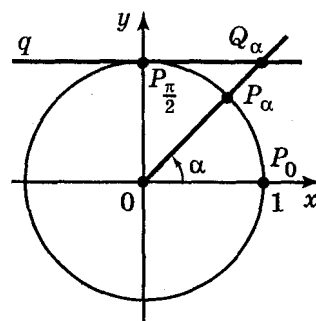


Рис. 51

віссю тангенсів.



Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Котангенс визначений для всіх α , крім таких значень, для яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто, $\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Введемо поняття лінії котангенсів (рис. 51). Проведемо дотичну q до

одиничного кола в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$. Для довільного числа α , якщо $\sin \alpha \neq 0$ і відповідно точка $P_{\alpha}(\cos \alpha, \sin \alpha)$ не лежить на осі OX і тому пряма OP_{α} перетинає пряму q у деякій точці Q_{α} з ординатою, що дорівнює 1. Із трикутника

$OP_{\frac{\pi}{2}}Q_{\alpha}$ маємо: $\frac{x}{1} = \operatorname{ctg} \alpha$, звідси $x = \operatorname{ctg} \alpha$. Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_{α} і q дорівнює котангенсу числа α , тому пряму q називають віссю котангенсів.

Виконання вправ

1. Обчисліть: а) $\operatorname{tg} \pi$; б) $\operatorname{tg} (-\pi)$; в) $\operatorname{tg} 4\pi$; г) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$.
Відповідь: а) 0; б) 0; в) 0; г) не визначений.

2. Визначте знак числа: а) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

III. Визначення значень тригонометричних функцій деяких чисел.

Через те що поворот на кут в α радіан співпадає з поворотом 180 на кут —

$\frac{180}{\pi} \alpha$ градусів, аргумент синуса і косинуса можна виразити як в градусах, так і

в радіанах. Наприклад, при повороті точки $(1; 0)$ на кут $\frac{\pi}{2}$, тобто на кут 90° ,

тому $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$.

Заповнимо таблицю значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких чисел (таблиця 4) або розглянемо таблицю 2 (стор. 31) підручника і виконаємо вправу 1.

Таблиця 4

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існ.	0	не існ.	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не існ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існ.	0	не існ.

Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса інших чисел можна знайти за допомогою математичних таблиць або калькулятора.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $3\sin \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; б) $5\sin \frac{\pi}{4} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5\cos \frac{\pi}{4} - 10\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$; г) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}$; б) -7; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{4}$.

2. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) $\sin 1,5$; б) $\cos 0,5$; в) $\operatorname{tg} \frac{27\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$.

Відповідь: а) 1,00; б) 0,88; в) 3,08; г) 2,75.

IV. Вивчення зміни знаків тригонометричних функцій.

Число $\sin \alpha$ — це ордината відповідної точки P_α , тому $\sin \alpha > 0$, якщо точка розташована вище осі абсцис, тобто в I і II чвертях (рис. 52). Якщо ця точка лежить нижче осі абсцис, то її ордината від'ємна в третій і четвертій чвертях.

Число $\cos \alpha$ — це абсциса точки P_α , тому $\cos \alpha > 0$ в I та IV чвертях, $\cos \alpha < 0$ в II та III чвертях (рис. 53).

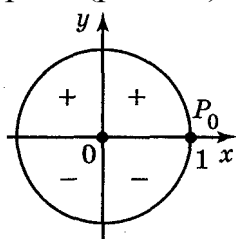


Рис. 52

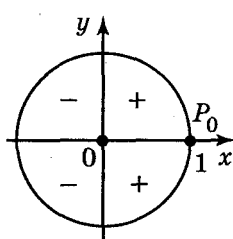


Рис. 53

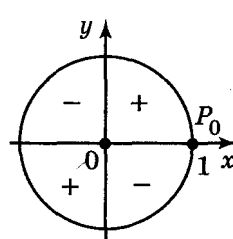


Рис. 54

Так як $tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, то $tg \alpha > 0$ і $ctg \alpha > 0$, якщо $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, і $tg \alpha < 0$ і $ctg \alpha < 0$ в II і IV чвертях (рис. 54).

Виконання вправ

1. У якій чверті знаходиться точка P_α , якщо:

- а) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha > 0$; б) $\sin \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$;
в) $\sin \alpha < 0$ і $\cos \alpha > 0$; г) $\sin \alpha < 0$ і $\cos \alpha < 0$?

Відповідь: а) I; б) II; в) IV; г) III.

2. Якій чверті належить P_α , якщо:

- а) $\sin \alpha \cos \alpha > 0$; б) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$;
в) $tg \alpha \cos \alpha > 0$; г) $ctg \alpha \sin \alpha < 0$?

Відповідь: а) I або III; б) II або IV; в) I або II; г) II або III.

3. Знайдіть знак виразу:

- а) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$; б) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$; в) $ctg(\pi + \alpha)$; г) $tg \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) плюс; г) плюс.

4. Визначте знак виразу:

- а) $\sin 105^\circ - \cos 105^\circ$; б) $\cos 155^\circ - \sin 255^\circ$; в) $tg 127^\circ \cdot ctg 200^\circ$; г) $tg 351^\circ \cdot ctg 220^\circ$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

5. Визначте знак добутку:

- а) $tg 2 \cdot tg 3 \cdot ctg 3 \cdot \cos 1$; б) $\sin 1 \cdot \cos 2 \cdot tg 3 \cdot ctg 4$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс.

V. Підсумок уроку.