Chapitre A3
Nombres rationnels

I. Définitions

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers ($b \neq 0$).

Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.

Exemples

3 est rationnel car il peut s'écrire sous la forme $\frac{3}{1}$.

$2,54 = \frac{254}{100}$ est rationnel.

$\frac{254}{100}$ est l'**écriture fractionnaire** de 2,54.

Remarque

Certains nombres ne sont pas rationnels : le nombre π ne peut pas être écrit sous la forme d'une fraction d'entiers.

II. Rappel sur la simplification

Pour simplifier une fraction, on cherche si le numérateur et le dénominateur de la fraction sont multiples de 2, de 3, de 4, etc. La fraction est simplifiée lorsqu'aucun nombre ne divise à la fois le numérateur et le dénominateur.

Exemple

$$\frac{24}{36} = \frac{12\times2}{18\times2} = \frac{12}{18} = \frac{6\times2}{6\times3} = \frac{2}{3}$$

Remarque

On peut simplifier la fraction en plusieurs étapes, le résultat final restera toujours identique.

A l'aide de la calculatrice, on peut retrouver les étapes de la simplification :

- A l'aide de la touche
- A l'aide de la touche **PGCD** (plus grand commun diviseur)

Dans l'exemple précédent, on tape PGCD(24 ;36). Le résultat donné par la calculatrice est 12 donc on peut simplifier la fraction par 12 :

$$\frac{24}{36} = \frac{12\times2}{12\times3} = \frac{2}{3}$$

En tapant la fraction sur la calculatrice et en tapant sur et en simplifiant éventuellement suivant le mode utilisé

III. Comparaison de fractions

Règle de comparaison

Lorsque l'on compare deux fractions, on regarde si :

- On peut comparer les deux fractions **avec un entier** ;
- Les deux fractions ont le **même numérateur**. Dans ce cas, la fraction ayant le plus petit dénominateur est la plus grande.
- Les deux fractions ont le **même dénominateur**. Dans ce cas, la fraction ayant le plus grand numérateur est la plus grande.

Dans le cas contraire, on met les fractions **sur le même dénominateur** pour les comparer.

Question 1

La fraction $\frac{7}{12}$ est-elle supérieure à la fraction $\frac{3}{4}$?

Solution

On remarque que $\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}$ donc $\frac{3}{4}$ est supérieure à $\frac{7}{12}$.

$\frac{3}{4} > \frac{7}{12}$

Question 2

La fraction $\frac{5}{3}$ est-elle supérieure à la fraction $\frac{5}{4}$?

Solution

$\frac{5}{3} > \frac{5}{4}$

Question 3

La fraction $\frac{3}{2}$ est-elle supérieure à la fraction $\frac{5}{6}$?

Solution

$\frac{3}{2} > 1 > \frac{5}{6}$

Remarques

- **La touche PPCM de la calculatrice permet de calculer le dénominateur commun.**
- Si l'on veut simplement savoir si les fractions sont égales ou différentes, on peut calculer les produits en croix.

Exemple

On veut savoir si les fractions $\frac{1}{3,2}$ et $\frac{5}{15,5}$ sont égales :

$1\times15,5 = 15,5$ et $3,2\times5 = 16$

Les produits en croix sont différents donc

$\frac{1}{3,2} \neq \frac{5}{15,5}$

IV. Opérations

Règle 1

Si a, b et c désignent des nombres réels ($c\neq0$), alors :

$$\frac{a}{c}\times b = \frac{a\times b}{c}$$

Exemples

$A = \frac{5}{7}\times14 = \frac{5\times14}{7} = \frac{70}{7} = 10$

$B = \frac{3}{8}\times6 = \frac{3\times6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9\times2}{4\times2} = \frac{9}{4}$

Règle 2

Si a, b, c et d désignent des nombres réels ($c\neq0$, $d\neq0$), alors :

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$$

Exemples

$$A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}=\frac{3\times5}{4\times12}=\frac{3\times5}{4\times3\times4}=\frac{5}{16}$$

$$B=\frac{2}{8}\times\frac{12}{3}=\frac{2\times12}{8\times3}=\frac{24}{24}=1$$

Problème

Jean a bu les trois quarts des deux tiers d'une bouteille de 33cL. Quel volume d'eau a-t-il bu ?

Solution

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times33=\frac{2\times33}{4}=16,5cL$$

Il a bu 16,5 cL.

Règle 3

Si a, b et c désignent des nombres réels ($c\neq0$), alors :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Remarque

Lorsque les dénominateurs sont **différents**, on met les fractions sur le **même dénominateur**, en utilisant éventuellement la touche **PPCM** de la calculatrice.

Exemples

$$A=\frac{3}{7}+\frac{11}{7}=\frac{14}{7}=2$$

$$B=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{3\times2}{7\times2}+\frac{1}{14}=\frac{6}{14}+\frac{1}{14}=\frac{7}{14}=\frac{7\times1}{7\times2}=\frac{1}{2}$$

$$C=\frac{3}{8}-\frac{5}{12}=\frac{3\times3}{8\times3}-\frac{5\times2}{12\times2}=\frac{9}{24}-\frac{10}{24}=\frac{9-10}{24}=\frac{-1}{24}$$

$$D=4-\frac{11}{5}=\frac{4\times5}{5}-\frac{11}{5}=\frac{20}{5}-\frac{11}{5}=\frac{9}{5}$$

$$E=\frac{6}{8}+\frac{5}{4}=\frac{3\times2}{4\times2}+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$$

V. Problèmes

Problème 1

Luc a mangé un huitième d'une tarte à midi. Le soir, il mange un sixième de la tarte. *Quelle fraction de la tarte a-t-il mangée en tout ?*

Solution

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1\times3}{8\times3} + \frac{1\times4}{6\times4} = \frac{3}{24} + \frac{4}{24} = \frac{7}{24}$$

Il a mangé $\frac{7}{24}$ de la tarte.

Problème 2

Louis a mangé trois quarts d'un gâteau. Sa sœur mange la moitié de ce qu'il reste. *Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour Théo ?*

Solution

Après le passage de Louis, il reste un quart du gâteau.

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Sa sœur a mangé un huitième du gâteau.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1\times1}{2\times4} = \frac{1}{8}$$

Il reste donc un huitième du gâteau pour Théo :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Autre méthode

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$