МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР 8 класс

Задание 1.1

Известно, что в классе меньше 30 учеников. Девочек-отличниц среди девочек из этого класса – 3/13, а мальчиков-отличников среди мальчиков из класса – 4/11.
Сколько в классе девочек, которые учатся на одни пятёрки?

Ответ: 3

Решение: Сперва необходимо выяснить сколько человек в классе, так как известно, что девочек-отличниц среди девочек - 3/13, то девочек либо 13, либо 26, 39 быть не может, так как учеников меньше 30. Однако мальчиков-отличников среди мальчиков – 4/11, значит мальчиков 11, либо 22, 33 уже быть не может. Так как мальчиков и девочек меньше 30, то единственный возможный вариант – 13 девочек и 11 мальчиков. Девочек-отличниц среди девочек - 3/13, значит 3 девочки-отличницы в классе.

Задание 1.2.

Известно, что в классе меньше 30 учеников. Девочек-отличниц среди девочек из этого класса – 3/11, а мальчиков-отличников среди мальчиков из класса – 4/13.
Сколько в классе девочек, которые учатся на одни пятёрки?

Ответ: 3

Решение: Сперва необходимо выяснить сколько человек в классе, так как известно, что девочек-отличниц среди девочек - 3/11, то девочек либо 11, либо 22, 33 быть не может, так как учеников меньше 30. Однако мальчиков-отличников среди мальчиков – 4/13, значит мальчиков 13, либо 26, 39 уже быть не может. Так как мальчиков и девочек меньше 30, то единственный возможный вариант – 11 девочек и 13 мальчиков. Девочек-отличниц среди девочек - 3/11, значит 3 девочки-отличницы в классе.

Задание 2.1

Найдите $\sqrt{9\,182\,736\,271\,809}$.

Ответ: 3030303

Решение: Необходимо разложить на простые множители 3*3*73*73*101*101*137*137

Задание 2.2

Найдите $\sqrt{4\,081\,216\,120\,804}$.

Ответ: 2020202

Решение: Необходимо разложить на простые множители: 2*2*73*73*101*101*137*137, таким образом 2*73*101*137

Задание 3.1

Учительница на уроке математики написала на доске число, после чего ребята, решающие первый вариант, вычислили сначала квадрат числа, а затем нашли сумму цифр полученного числа. Ребята, сидящие на втором варианте, сначала нашли сумму цифр исходного числа, после чего возвели её в квадрат. Оказалось, что у ребят на первом и втором вариантах полученные значения совпали. Известно, что вычисления выполнялись для наибольшего двузначного числа, удовлетворяющего этим условиям и кратного трём. Что это было за число?

Ответ: 30

Решение: Число меньше ста, так как двузначное, значит максимально возможное число – это 99, а 99^2 = 9801 < 9999, поэтому сумма цифр квадрата числа меньше 9*4 = 36, то есть сумма цифр двузначного числа меньше или равна 5. Перебором можно найти все такие варианты: 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, которые удовлетворяют условию задачи. 14, 23, 32, 41 и 50 не подходят. Максимальное число из найденных и кратное трем – это 30.

Задание 3.2

Учительница на уроке математики написала на доске число, после чего ребята, решающие первый вариант, вычислили сначала квадрат числа, а затем нашли сумму цифр полученного числа. Ребята, сидящие на втором варианте, сначала нашли сумму цифр исходного числа, после чего возвели её в квадрат. Оказалось, что у ребят на первом и втором вариантах полученные значения совпали. Известно, что вычисления выполнялись для наибольшего двузначного числа. Что это было за число (число должно быть нечётным)?

Ответ: 31

Решение: Число меньше ста, так как двузначное, значит максимально возможное число – это 99, а 99^2 = 9801 < 9999, поэтому сумма цифр квадрата числа меньше 9*4 = 36, то есть сумма цифр двузначного числа меньше или равна 5. Перебором можно найти все такие варианты: 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, которые удовлетворяют условию задачи. 14, 23, 32, 41 и 50 не подходят. Максимальное число из найденных – это 31.

Задание 4.1

Треугольник ABC – равнобедренный, угол B, противолежащий основанию, равен 20∘. На AB отметили точку P, оказалось, что BP и AC равны. Чему равен угол PCB?

Ответ: 10

Решение: Проведите высоту ВН данного треугольника, на ней отметьте точку D, что треугольник ADC – равносторонний. Треугольники ABD и CAP равны по двум сторонам и углу между ними. Треугольники ABD и CAP равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle PCB = \angle ABD = 10°$

Задание 4.2

Треугольник ABC – равнобедренный, угол B, противолежащий основанию, равен 20∘. На AB отметили точку P, оказалось, что BP и AC равны. Чему равен угол CPB?

Ответ: 150

Решение:

Проведите высоту ВН данного треугольника, на ней отметьте точку D, что треугольник ADC – равносторонний. Треугольники ABD и CAP равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle PCB = \angle ABD = 10°$. Поэтому $\angle CPB = 180 - 20\ (\angle B) - 10\ (\angle PCB) = 150°$

Задание 5.1

На столе лежат восемь карточек с номерами от 2 до 9, окрашенные в разные цвета: синий, зелёный и красный. Если на карточке написан делитель числа, написанного на другой карточке, то эти карточки окрашены в разные цвета.

Сколькими способами могут быть покрашены:

- карточки, на которых написаны числа 2, 4, 8
- все карточки

Ответ: 6, 432

Решение: 5 и 7 – это простые числа, поэтому все цвета могут быть использованы – 3*3 = 9 способов. 2, 4 и 8 необходимо раскрасить разными цветами, поэтому 3*2*1 = 6 способов. Если 2, 4, 5, 7, 8 покрашены, то для 6 остается 2 цвета, для 3 – 2 цвета, для 9 – 2 цвета, поэтому 2*2*2 = 8 способов, тогда 9*6*8 = 432 способа.

Задание 5.2

На столе лежат восемь тетрадей с номерами от 2 до 9, обложки тетрадей окрашены тремя цветами. Если на обложке написан делитель числа, написанного на другой обложке, то эти обложки тетрадей окрашены в разные цвета.

Сколькими способами могут быть покрашены:

- обложки тетрадей, на которых написаны числа 3, 6, 9
- все обложки тетрадей

Ответ: 8, 432

Решение: 5 и 7 – это простые числа, поэтому все цвета могут быть использованы – 3*3 = 9 способов. 2, 4 и 8 необходимо раскрасить разными цветами, поэтому 3*2*1 = 6. Если 2, 4, 5, 7, 8 покрашены, то для 6 остается 2 цвета, для 3 – 2 цвета, для 9 – 2 цвета, поэтому 2*2*2 = 8 способов, тогда 9*6*8 = 432 способа.

Задание 6.1

Найдите последнюю цифру числа:

1) 9^{77}

2) 99^{77}

3) 999^{77}

Ответ:

1) 9

2) 9

3) 9

Решение:

1)

$$9^2 \equiv 1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 9^{77} \equiv (1)^{38} *\ 9\ (mod\ 10) \equiv 9\ (mod\ 10)$$

2) На основании пункта 1 необходимо провести аналогичные рассуждения

$$9^2 \equiv 1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 99^{77} \equiv\ (1)^{38} *\ 9\ (mod\ 10) \equiv 9\ (mod\ 10)$$

3) На основании пункта 2 выполняются рассуждения

$$9^2 \equiv 1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 999^{77} \equiv\ (1)^{38} *\ 9\ (mod\ 10) \equiv 9\ (mod\ 10)$$

Задание 6.2

Найдите последнюю цифру числа:

1) 7^{77}

2) 77^{77}

3) 777^{77}

Ответ:

1) 7
2) 7
3) 7

Решение:

1)

$$7^2 \equiv -1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 7^{77} \equiv (-1)^{38} * 7\ (mod\ 10) \equiv 7\ (mod\ 10)$$

2) На основании пункта 1 необходимо провести аналогичные рассуждения

$$7^2 \equiv -1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 77^{77} \equiv (-1)^{38} * 7\ (mod\ 10) \equiv 7\ (mod\ 10)$$

3) На основании пункта 2 выполняются рассуждения

$$7^2 \equiv -1\ (mod\ 10),\ \text{тогда}\ 777^{77} \equiv (-1)^{38} * 7\ (mod\ 10) \equiv 7\ (mod\ 10)$$