

Дисциплина: ОД.07 Математика

Занятие № 35

Группа БУ и ТД 1/1-9/25

Дата: 06.11.2025

Тип занятия: комбинированное занятие

Преподаватель: Бережная В.А.

Тема занятия: Повторение планиметрии. Основные понятия стереометрии

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для формирования системы знаний, связанных с понятиями взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Содержательная:

- сформировать представление о стереометрии, как о разделе математики;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: стереометрия, плоскость, скрещивающиеся прямые;
- актуализировать знания об основных фигурах планиметрии;
- познакомиться с задачами на взаимное расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве.

План занятия:

1. Повторение планиметрии.
2. Предмет стереометрии. Основные понятия.
3. Основные аксиомы стереометрии.
4. Основные пространственные фигуры.

Ход занятия

1. Повторение планиметрии

Геометрические фигуры на плоскости

Самая малая геометрическая фигура – это *точка*. Она не имеет измерительных особенностей и характеристик: не содержит длины, высоты, объема, площади.

Линия – фигура, которая состоит из множества соединенных между собой точек, расположенных последовательно друг за другом.

Линии бывают прямыми, кривыми и ломаными.

Отрезок – часть прямой линии, ограниченная с двух сторон точками.

Луч – направленная полупрямая, у которой есть точка начала, но нет конца.

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки (которая называется вершиной угла).

Треугольник – это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, попарно соединенных между собой отрезками. Точки называются вершинами треугольника, отрезки – сторонами треугольника. Треугольник имеет три вершины и три стороны. Стороны треугольника обозначаются часто малыми буквами, которые соответствуют заглавным буквам, обозначающим противоположные вершины.

Виды треугольников по углам:

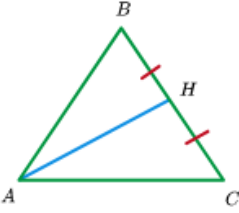
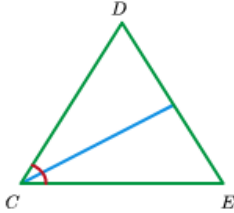
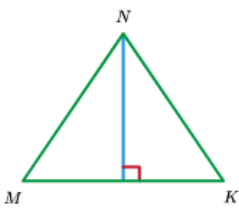
1. Остроугольный треугольник – все углы которого острые (градусная мера каждого угла меньше 90°).
2. Прямоугольный треугольник – один угол прямой (градусная мера 90°).
3. Тупоугольный треугольник – один угол тупой (градусная мера больше 90°).

Виды треугольников по сторонам:

1. Равносторонний треугольник (или правильный треугольник) – все три стороны равны.
2. Равнобедренный треугольник – две стороны равны.

3. Разносторонний треугольник – все стороны имеют разную длину.

Элементы треугольника

Медиана	Биссектриса	Высота
это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.	это отрезок, делящий угол треугольника на две равные части.	это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.
		

Четырехугольник – это фигура, состоящая из четырёх точек (вершин) и четырёх отрезков (сторон), последовательно соединяющих вершины.

При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Существуют следующие виды четырехугольников:

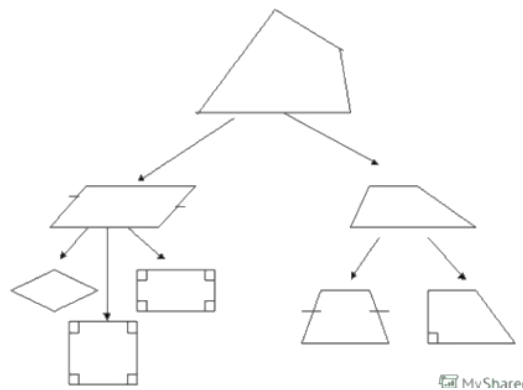
Трапеция – четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие – не параллельны.

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны; это ромб, у которого все углы прямые.



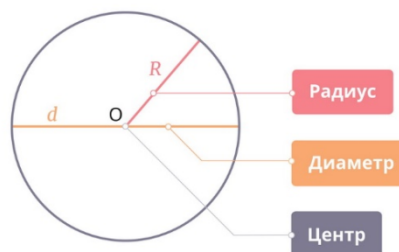
Окружность – это множество всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки, которая называется центром окружности.

Элементы окружности: центр, радиус, диаметр.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Диаметр – это хорда, проходящая через центр окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.



2. Предмет стереометрии. Основные понятия

Предмет стереометрии

Напомним: геометрия – это наука, которая изучает свойства геометрических фигур. Геометрическая фигура – это любая совокупность точек. Геометрия подразделяется на планиметрию и на стереометрию, которую мы начинаем изучать.

Если в планиметрии мы имели одну плоскость, на которой располагались все рассматриваемые фигуры, то в стереометрии бесконечно много плоскостей. Таким образом, ведение нового геометрического образа (плоскости) влечет за собой необходимость расширить систему аксиом. **Стереометрия** – это раздел геометрии, изучающий пространственные фигуры и их свойства.

Основные понятия стереометрии

Точка, прямая и плоскость – основные (неопределяемые) или, как говорят иначе, простейшие геометрические фигуры в пространстве.

Точки принято обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т.д., прямые – строчными латинскими буквами a, b, c и т.д., плоскости же обозначают строчными буквами греческого алфавита α, β, γ и т.д.

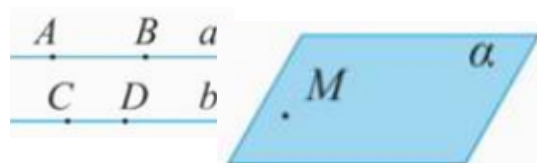


Плоскости принято рисовать либо в виде параллелограмма, либо в виде произвольной замкнутой фигуры. Если все точки геометрической фигуры принадлежат некоторой плоскости, то эту фигуру называют плоской.

Рассмотрим прямую a . На ней лежат точки A и B . Прямая может быть также обозначена как AB . Рассмотрим прямую b , на ней лежат точки C и D . Прямая b может быть также обозначена как CD .

Специфика всей стереометрии заключается в том, что пространственные фигуры мы будем изображать на плоскости.

Так же, как и в планиметрии, важен знак принадлежности, \in . Например, точка A принадлежит прямой a : $A \in a$. Точка M принадлежит плоскости α : $M \in \alpha$. А вот прямая a не принадлежит плоскости α : $a \notin \alpha$.



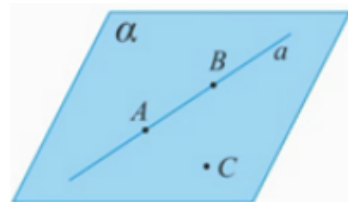
3. Основные аксиомы стереометрии.

Полная система аксиом стереометрии состоит из аксиом планиметрии и дополнительных аксиом стереометрии.

Первая аксиома стереометрии

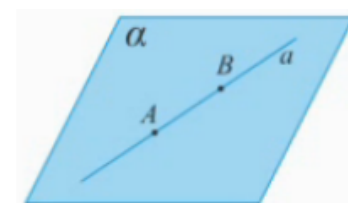
Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Рассмотрим три точки: A, B, C , причем точка C не принадлежит прямой AB . Тогда через три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, проходит плоскость α , и притом только одна. Плоскость можно также обозначить через три точки ABC .



Вторая аксиома стереометрии

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

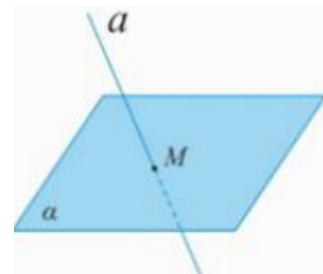


По-иному говорят, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую.

Рассмотрим плоскость α , точки A, B прямой a принадлежат плоскости α . Аксиома утверждает – все точки прямой a (прямой AB) принадлежат плоскости α , т.е. вся прямая лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую a . Смысл заключается в следующем: из того, что только две точки принадлежат плоскости, вытекает, что бесчисленное множество точек прямой лежат в этой плоскости.

Следствие: Может ли быть только три общие точки у прямой и плоскости? Нет, не может быть. Может быть две точки, и тогда вся прямая лежит в плоскости.

Если у прямой и плоскости одна общая точка M , то тогда говорят, что прямая a и плоскость α пересекаются в точке M . Этот факт записывается следующим образом: $a \cap \alpha = M$.

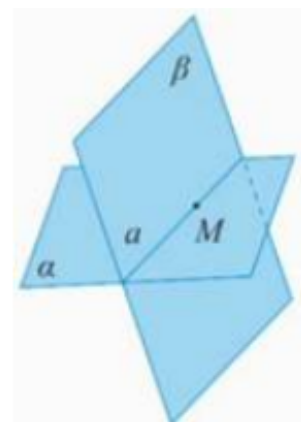


Третья аксиома стереометрии

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. Говорят, что плоскости пересекаются по прямой.

Имеем разные плоскости: плоскость α , плоскость β . Известно, что они имеют общую точку M , точка M принадлежит плоскости α и плоскости β .

Отсюда вытекает, что существует прямая a , которая проходит через точку M , которая одновременно принадлежит и плоскости α , и плоскости β . Вот в этом случае и говорят, что плоскости α и β пересекаются по прямой a .



4. Основные пространственные фигуры.

Если не существует плоскости, которой принадлежали бы все точки геометрической фигуры, то эта фигура называется пространственной.

Пространственные геометрические фигуры принято также называть геометрическими телами. Каждое геометрическое тело имеет поверхность, которой оно ограничено (отделено) от всего пространства.



Призма



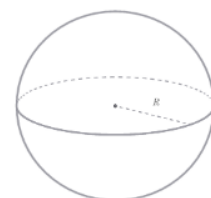
Цилиндр



Пирамида



Конус



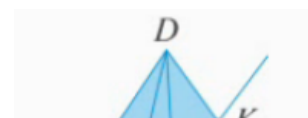
Шар, сфера (поверхность шара)



Параллелепипед

Решение задач

Задача 1



а) в какой плоскости лежит прямая PE?

Ответ: $PE \in ABD$. Прямая PE лежит в плоскости ABD , так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка E лежит в плоскости ABD и точка P лежит в этой же плоскости. Значит, по второй аксиоме все точки прямой PE лежат в плоскости ABD .

б) в какой плоскости лежит прямая МК?

Ответ: $MK \in DBC$. Прямая MK лежит в плоскости DBC , так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка M лежит в плоскости DBC и точка K лежит в плоскости DBC . По второй аксиоме все точки прямой MK лежат в плоскости DBC .

в) в каких плоскостях лежит прямая BD?

Ответ: Прямая BD лежит в плоскости BDA и в плоскости BDC . Значит, прямая BD одновременно лежит в двух плоскостях. Прямая BD есть линия пересечения двух плоскостей. Говорят, что грани ABD , BDC пересекаются по прямой BD . Это можно записать так:

$$\begin{aligned} BD \in DBC \\ BD \in BDA \end{aligned} \Rightarrow BD = DBC \cap BDA$$

г) в каких гранях лежит прямая AB?

Ответ: Прямая AB лежит в грани ABC и в грани ABD . Значит, прямая AB есть линия пересечения двух этих граней.

$$\begin{aligned} AB \in ABC \\ AB \in ABD \end{aligned} \Rightarrow AB = ABC \cap ABD$$

д) в каких гранях лежит прямая EC?

Ответ: Прямая EC лежит в плоскости ABC и в плоскости ECD , так как точки E и C лежат одновременно в плоскости ABC и в плоскости ECD . Значит, прямая EC есть линия пересечения этих плоскостей.

$$\begin{aligned} EC \in ABC \\ EC \in ECD \end{aligned} \Rightarrow EC = ECD \cap ABC$$

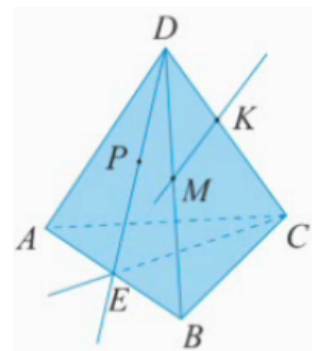
Задача 2.

а) найдите точку пересечения прямой DK с плоскостью ABC.

Решение: Прямая DK содержит точку C . Плоскость ABC содержит точку C . Значит, прямая DK и плоскость ABC пересекаются в точке C .

б) найдите точку пересечения прямой CE с плоскостью ADB.

Решение: Точка E принадлежит и прямой CE , и плоскости ADB . Значит, прямая CE пересекается с плоскостью ADB в точке E .



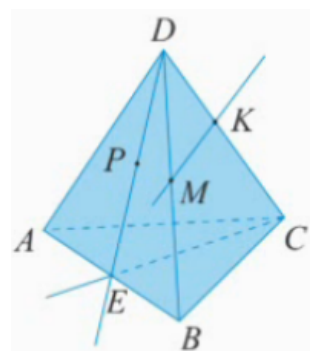
Задача 3.

а) найдите точки, лежащие одновременно в плоскостях ADB и DBC.

Решение: Точка B и точка D одновременно лежат и в ADB , и в DBC . Значит, $ADB \cap DBC = DB$. Все точки прямой DB являются ответом.

б) найдите прямые, по которым пересекаются плоскость ADB и DBC.

Решение: Точка B и точка D одновременно лежат и в ADB , и в DBC . Значит, прямая DB есть прямая, по которой пересекаются заданные плоскости.



в) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости ADB и CDA .

Решение: Точки A, D лежат в плоскости ADB , а также точки A, D лежат в другой плоскости CDA . Значит, AD – линия их пересечения: $ADB \cap CDA = AD$.

г) назовите прямые, по которым пересекаются плоскости PDC и ABC .

Решение: Плоскость PDC совпадает с плоскостью EDC . Точка E и точка C одновременно лежат в двух плоскостях: PDC и ABC . Значит, CE – это линия пересечения двух плоскостей. $PDC \cap ABC = EC$

Домашнее задание

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Сформулируйте основные аксиомы стереометрии.
- 1.2. Сформулируйте основные следствия из аксиом стереометрии.
- 1.3. Приведите примеры основных пространственных фигуры.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Дополните высказывание верным термином:

... – раздел геометрии, в котором изучаются свойства геометрических тел на плоскости.

2.2. Дополните высказывание верным термином:

... – раздел геометрии, в котором изучаются свойства геометрических тел в пространстве.

2.3. Продолжите высказывание, подставив верное название пары прямых по расположению в пространстве:

2.3.1. Прямые AB и BC являются...

2.3.2. Прямые AB и B_1C_1 являются...

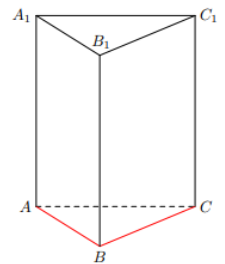
2.4. Запишите, сколько в кубе пар перпендикулярных ребер?

2.5. Запишите, сколько в кубе пар параллельных ребер?

2.6. Сторона ромба равна 5 см, а одна из его диагоналей – 6 см.

Вычислите, чему равна площадь ромба?

2.7. Вычислите, чему равна площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 26 см, один из катетов которого равен 24 см.



3. Конспект занятия в тетради

Отчетность

Работы принимаются до 12 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 06.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 06.11.25 (Иванов Иван, БУ и ТД 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>



С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ
Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 287 с.