

07.11.2022

Тема: Корінь n-го степеня і його властивості

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Таблиця 1

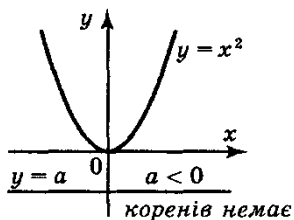
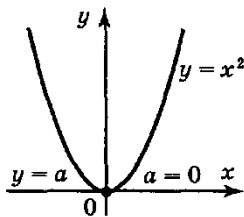
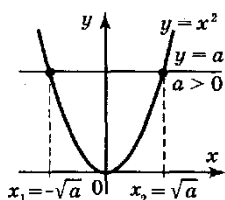
Квадратні корені

Означення квадратного кореня з числа a :

число, квадрат якого дорівнює a .

Корінь рівняння:

$$x^2 = a.$$



Означення арифметичного квадратного кореня з числа a :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$$

Тотожності

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a > 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Основні властивості

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k, \quad a \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}, \quad a \geq 0$$



Коренем n -го степеня із дійсного числа a називається число, n -й степінь якого дорівнює a .

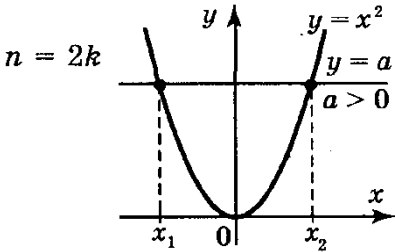
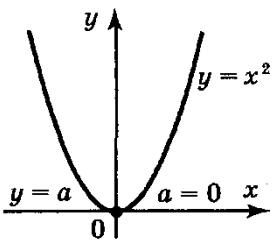
Наприклад: корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

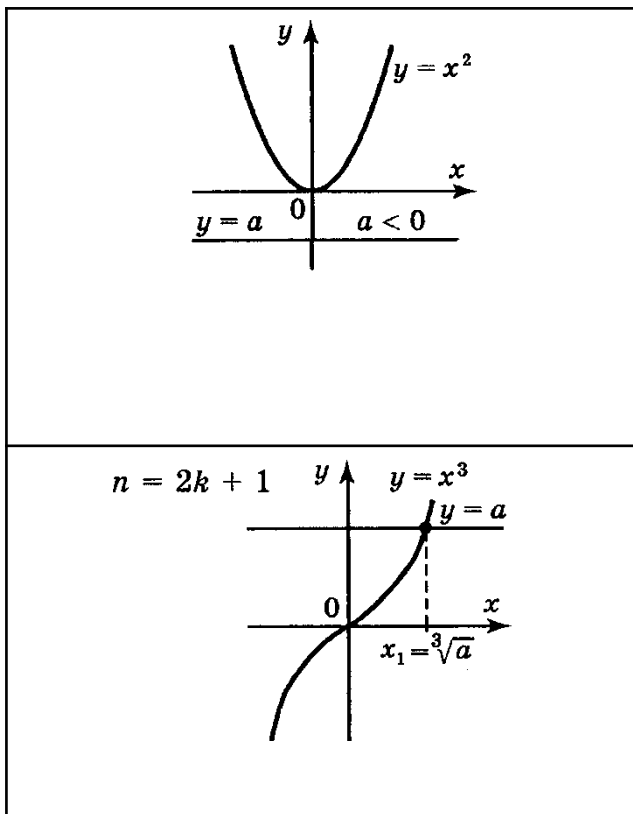
Згідно даного означення, корінь n -го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Кількість коренів цього рівняння залежить від n і a .

Якщо n — парне, тобто $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

Якщо n — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

Таблиця 2

Корінь n -го степеня	
Означення кореня n-го степеня з числа a: число, n-й степінь якого дорівнює a. Корінь рівняння: $x^n = a$	Означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a: $\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = b \\ a \geq 0 \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$
$n = 2k$  	$\sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots, \sqrt[2k+1]{a}$ - існують для $a \in \mathbb{R}$. Якщо $a < 0$, то $\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}.$ $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \dots, \sqrt[2k]{a}$ - існують для $a \geq 0$. Тотожності Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a , a \in \mathbb{R}$



$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, a \in \mathbb{R}.$$

Основні властивості

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0.$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Невід'ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем n -го степеня із числа a .

Арифметичним коренем n -го степеня із невід'ємного числа a називається таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a .

Арифметичний корінь n -го степеня із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число n називають показником кореня, число a — підкореновим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають арифметичним квадратним коренем.

Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь n -го степеня, коротко говорять «корінь n -го степеня».

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має сенс, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Дійсно $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і може набувати будь-яких значень.

Безпосередньо з означення арифметичного кореня n -го степеня випливає:

1. Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$. 2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = a = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$ 3. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$
--

Ми згадали властивості квадратного кореня. Аналогічні властивості мають і корені n -го степеня.



Властивість 1. Для невід'ємних чисел a і b добуток коренів n -го степеня із чисел a і b дорівнює кореню n -го степеня із їх добутку: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.



Властивість 2. Для невід'ємного числа a і додатного числа b частка коренів n -го степеня із чисел a і b , дорівнює кореню n -го степеня із їх частки:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} .$$

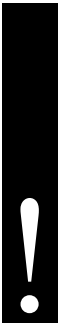


Властивість 3. Будь-який цілий степінь k кореня n -го степеня із невід'ємного числа a дорівнює кореню n -го степеня із степеня k числа a : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.



Властивість 4. Щоб добути корінь із кореня із невід'ємного числа можна перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$



Властивість 5. Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або

поділити) на одне і те саме натуральне число: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Властивості 1, 2 доводяться аналогічно тому, як це зроблено для квадратних коренів. Доведемо властивості 3—5:

3) Так як $a \geq 0$, то ліва і права частини формули невід'ємні. Тому для доведення цієї рівності досить впевнитися в тому, що n -ий степінь лівої частини дорівнює a^k . Згідно з властивостями степенів з цілим показником маємо:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a} \right)^k \right)^n = \left(\sqrt[n]{a} \right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a} \right)^n \right)^k = a^k$$

4) При $a > 0$ ліва і права частини невід'ємні. Тоді

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Отже, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

5) Згідно з означенням кореня $\sqrt[np]{a^{mp}}$ — це таке невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a^{mp} , тобто досить довести $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = a^{mp}$.

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = \left(a^m\right)^p = a^{mp}$$

Маємо .

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 4-5.
2. Законспектувати властивості, означення, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 4.1-4.7, 5.1-5.4.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://naurok.com.ua/prezentaciya-korin-n-go-stepenya-145301.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.