07.11.2022

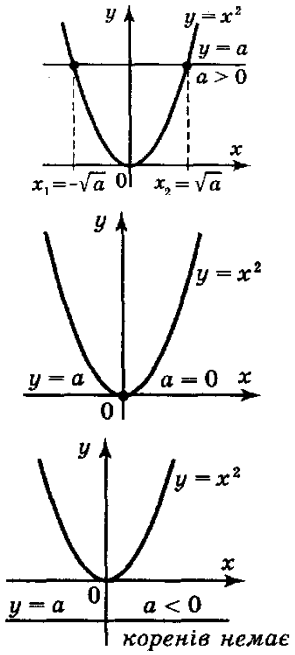
Тема: Корінь n-го степеня і його властивості

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standartu-10-kl.pdf

Матеріали до теми:

Таблиця 1

Квадратні корені

Означення квадратного кореня з числа *a:* число, квадрат якого дорівнює *a*. **Корінь рівняння:** $x^2 = a$.  	***Означення*** арифметичного квадратного кореня з числа *a*: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$ **Тотожності** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a > 0.$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert, a \in \mathrm{R}.$ **Основні властивості** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$. $\sqrt{a^{2k}} = a^k$, $a \geq 0$, $k \in \mathrm{N}$. $\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$, $a \geq 0$

Коренем n-го степеня із дійсного числа a називається число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад: корінь третього степеня із числа 8 дорівнює 2, бо $2^3 = 8$. Корінь четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, бо $3^4 = 81$, $(-3)^4 = 81$.

Згідно даного означення, корінь n-го степеня — це корінь рівняння $x^n = a$. Кількість коренів цього рівняння залежить від n і a.

Якщо n — парне, тобто $n = 2k$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k} = a$ має два корені, якщо $a > 0$; один корінь, якщо $a = 0$; не має коренів, якщо $a < 0$.

Якщо n — непарне, тобто $n = 2k + 1$, $k \in N$, то рівняння $x^{2k+1} = a$ завжди має лише один корінь.

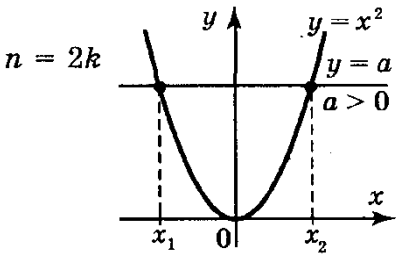
Таблиця 2

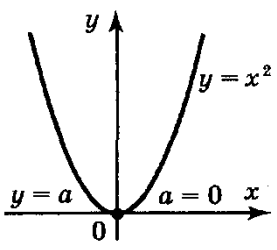
Корінь *n*-го степеня

Означення кореня n-го степеня з числа a:
число, n -й степінь якого дорівнює a.
Корінь рівняння:
$x^2 = a$

Означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a:

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{a} = b \\ a \geq 0 \\ n \in N, n \geq 2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$$





$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, …, $\sqrt[2k+1]{a}$ - існують для $a \in R$.

Якщо $a < 0$, то

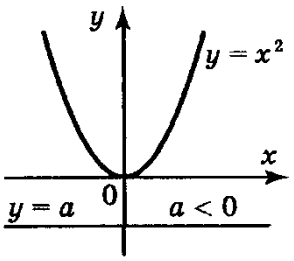
$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}.$$

$\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, … , $\sqrt[2k]{a}$ - існують для $a \geq 0$.

Тотожності

Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \; a \in \mathrm{R}$$



$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a,\ a \in \mathrm{R}.$$

Основні властивості

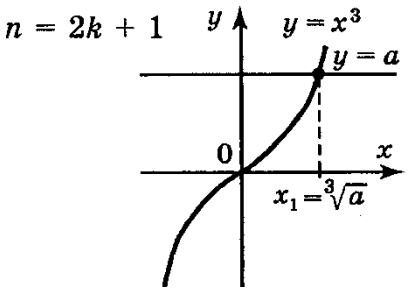
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a \geq 0,\ b > 0.$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$



Невід'ємний корінь рівняння $x^n = a$ називають арифметичним коренем *n*-го степеня із числа *a*.

Арифметичним коренем *n*-го степеня із невід'ємного числа *a* називається таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.

Арифметичний корінь *n*-го степеня із числа *a* позначають так: $\sqrt[n]{a}$. Число *n* називають показником кореня, число *a* — підкореневим числом (виразом).

Якщо $n = 2$, то замість $\sqrt[2]{a}$ пишуть $\sqrt{a}$ і називають арифметичним квадратним коренем.

Арифметичний корінь третього степеня називають кубічним коренем.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь *n*-го степеня, коротко говорять «корінь *n*-го степеня».

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Корінь парного степеня існує лише з невід'ємних чисел, отже, вираз $\sqrt[2k]{a}$ має смисл, якщо $a \geq 0$ і набуває невід'ємних значень.

Корінь непарного степеня існує з будь-якого дійсного числа і до того ж тільки один.

Для коренів непарного степеня справедлива рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Дійсно $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Рівність $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ дозволяє виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь того ж степеня.

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in R$ і може набувати будь-яких значень.

Безпосередньо з означення арифметичного кореня *n*-го степеня випливає:

1. Якщо $\sqrt[n]{a}$ існує, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & якщо\ a \geq 0, \\ -a, & якщо\ a < 0. \end{cases}$
3. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

Ми згадали властивості квадратного кореня. Аналогічні властивості мають і корені *n*-го степеня.



Властивість 1. Для невід'ємних чисел *a* і *b* добуток коренів *n*-го степеня із чисел *a* і *b* дорівнює кореню *n*-го степеня із їх добутку: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.



Властивість 2. Для невід'ємного числа a і додатного числа b частка коренів n-го степеня із чисел a і b. дорівнює кореню n-го степеня із їх частки: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.



Властивість 3. Будь-який цілий степінь *k* кореня *n*-го степеня із невід'ємного числа *a* дорівнює кореню *n*-го степеня із степеня *k* числа *a*: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.



Властивість 4. Щоб добути корінь із кореня із невід'ємного числа можна перемножити показники коренів, а підкореневий вираз залишити без змін: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.



Властивість 5. Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне і те саме натуральне число: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Властивості 1, 2 доводяться аналогічно тому, як це зроблено для квадратних коренів. Доведемо властивості 3—5:

3) Так як $a \geq 0$, то ліва і права частини формули невід'ємні. Тому для доведення цієї рівності досить впевнитися в тому, що n-ий степінь лівої частини дорівнює a^k. Згідно з властивостями степенів з цілим показником маємо:

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$$

4) При $a > O$ ліва і права частини невід'ємні. Тоді

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a$$

Отже, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

5) Згідно з означенням кореня $\sqrt[np]{a^{mp}}$ — це таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює a^{mp}, тобто досить довести $\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{np}=a^{mp}$.

Маємо $\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{np}=\left(\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{n}\right)^{p}=\left(a^{m}\right)^{p}=a^{mp}$.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 4-5.
2. Законспектувати властивості, означення, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 4.1-4.7, 5.1-5.4.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://naurok.com.ua/prezentaciya-korin-n-go-stepenya-145301.html

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .