Chapitre 02
Limites de suites

I. Limite finie ou infinie d'une suite
1. Limite infinie
Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.

En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que l'on souhaite à partir d'un certain rang. Si l'on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 1

- On dit que la suite (u_n) **admet pour limite** $+\infty$ si,pour tout réel a, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) **admet pour limite** $-\infty$ si, pour tout réel b, l'intervalle $]-\infty; b[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note $u_n = -\infty$

D'un point de vue mathématique, $u_n = +\infty$ équivaut à dire que

$$\forall A \in R, \exists N \in N, \forall n \in N, n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$$

Par exemple, pour la suite définie (u_n) définie ci-dessus, soient $A \in R$ et $n \in N$,

$$u_n \geq A \Longleftrightarrow n^2 \geq A \ (1)$$

Donc, si $A \leq 0$, l'inégalité est toujours vérifiée et $N = 0$ convient.
Si $A > 0$, par croissance de la fonction racine sur R_+

$$(1) \Longleftrightarrow n \geq \sqrt{A}$$

Donc, $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1 = \lceil \sqrt{A} \rceil$ convient
Dans tous les cas, il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \in N, n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$$

Remarques

- De la même façon, $u_n = -\infty$ équivaut à dire que
$$\forall A \in R, \exists N \in N, \forall n \in N, n \geq N \Longrightarrow u_n \leq A$$
- On peut aussi écrire $u_n \ n \to \infty \to \ +\infty$ au lieu de $u_n = +\infty$
- Le symbole « $\exists$ » veut dire « il existe ».
- $\lfloor \sqrt{A} \rfloor$ désigne la partie entière (inférieure) de $\sqrt{A}$ et $\lceil \sqrt{A} \rceil$ représente la partie entière supérieure de $\sqrt{A}$. Ces deux notations ne sont pas au programme de terminale mais seront utilisées dans le supérieur. C'est pourquoi l'on utilisera les limites des suites usuelles et les opérations sur les limites pour justifier les exercices.
- Dans cet exemple, il est plutôt aisé de trouver une valeur explicite de N (dépendant de A) la plus petite possible mais dans certains cas, cela ne sera pas aisé (voire impossible) de l'exprimer avec les fonctions usuelles. On utilisera alors des programmes de calcul (**algorithme de calcul de seuil**) permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure ou égal à un nombre réel A

Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 4u_n + 3$$

Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$
On a écrit ci-contre un algorithme écrit en langage Python. En appliquant cet algorithme avec $A = 100$,

En Python

```
A=float(input("Quel est le seuil A choisi ?"))
n=0
u=2
while u<A:
    n+=1
    u=4*u+3
print("Le rang cherché est : ",n)
```

on obtient en sortie $n = 3$. À partir du terme u_3, la suite est supérieure à 100.

🖥️ **Vidéos dans la Playlist**
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ

Exemple 2
On considère la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in N, v_n = n^2 + n + e^n$$

Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$
On veut connaître à partir de quel rang v_n atteint 1 000, 1 000 000 et 1 000 000 000.
D'après l'algorithme en Python écrit ci-contre, les rangs cherchés sont respectivement 7, 14 et 21.

En Python

```
from math import *
A=float(input("Quel est le seuil A choisi ?"))
n=0
u=n**2+n+exp(n)
while u<A:
    n=n+1
    u=n**2+n+exp(n)
print("Le rang cherché est : ",n)
```

Remarques

- Les commandes n=n+1 et n+=1 donnent le même résultat : elles rajoutent 1 à la variable n.
- On peut aussi utiliser e**n pour calculer l'exponentielle mais le résultat est (un peu) moins précis et ne permet pas de calculer l'exponentielle complexe.
- La première ligne permet d'importer la bibliothèque math qui contient notamment les fonctions de base (telles que la fonction racine carrée sqrt pour square root en anglais).

2. Limite finie

Exemple
La suite (u_n) définie sur N par

$$u_n = \frac{1}{1+n^2}$$

possède pour limite 0. En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 0 à partir d'un certain rang. Si l'on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 0 (excepté l'ensemble vide), tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Définition 2
On dit que la suite (u_n) **admet pour limite L** si tout intervalle ouvert non vide contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note

$$u_n = L$$

Une telle suite est dite **convergente**.

D'un point de vue mathématique, $u_n = L$ équivaut à dire que

$$\forall I \subset R, I \neq \emptyset,\ I \text{ ouvert tel que } L \in I, \exists N \in N, \forall n \in N, n \geq N \Rightarrow u_n \in I \text{ (définition topologique)}$$

Ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N, \forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon \text{ (définition métrique)}$$

C'est souvent cette dernière définition que l'on utilisera dans le supérieur pour montrer la convergence d'une suite (au bac, comme on l'a dit précédemment, on se servira des théorèmes des paragraphes suivants).
Par exemple, montrons la convergence de la suite (u_n) citée ci-dessus. Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $n \in N$, la suite (u_n) étant (strictement) positive

$$\left|u_n - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1+n^2} < \varepsilon \text{ (2)}$$

Puis, par décroissance de la fonction inverse sur R_+^*,

$$(2) \Leftrightarrow 1 + n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(2) \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Si $\varepsilon \geq 1$, $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq 0$ donc $N = 0$ convient

Si $\varepsilon < 1$, $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$ et donc, par stricte croissance de la fonction racine sur R_+

$$(2) \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

Donc $N = \lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \rfloor + 1$ convient et, dans tous les cas,

$$\exists N \in N, \forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left| u_n - 0 \right| < \varepsilon$$

Définition 3
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie. Par exemple, la suite de terme générale$(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

Théorème 1
Si la suite $\left(u_n\right)$ est convergente, alors il existe un réel M tel que

$$\forall n \in N, \ \left|u_n\right| \leq M$$

De plus, si les conditions suivantes sont réalisées

$$\forall n \in N, \ u_n \neq 0 \ et \ u_n \ \neq 0$$

Alors il existe un réel $m > 0$ tel que

$$\forall n \in N, \ \left|u_n\right| \geq m$$

Preuve
$\left(u_n\right)$ est convergente. Soit $L \in R$ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier N tel que

$$\forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

On en déduit que

$$\forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left|u_n\right| < (|L - \varepsilon|; |L + \varepsilon|)$$

Par ailleurs,

$$\forall n \in N, n < N \Rightarrow \left|u_n\right| \leq \left(\left|u_k\right|\right)$$

Si l'on pose

$$M_1 = (|L - \varepsilon|; |L + \varepsilon|) \ et \ M_2 = \left(\left|u_k\right|\right)$$

$M = \left(M_1; M_2\right)$ convient et dans ce cas

$$\forall n \in N, \ \left|u_n\right| \leq M$$

Supposons maintenant que

$$\forall n \in N, \ u_n \neq 0 \ et \ u_n \ \neq 0$$

$L \neq 0$ donc on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $0 \notin [L - \varepsilon; L + \varepsilon]$
On en déduit que

$$\forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left|u_n\right| > (|L - \varepsilon|; |L + \varepsilon|) > 0$$

Par ailleurs et par hypothèse,

$$\forall n \in N, n < N \Rightarrow \left|u_n\right| \geq \left(\left|u_k\right|\right) > 0$$

Si l'on pose

$$m_1 = (|L - \varepsilon|; |L + \varepsilon|) \ et \ m_2 = \left(\left|u_k\right|\right)$$

$m = \left(m_1; m_2\right) > 0$ convient et dans ce cas

$$\forall n \in N, \ \left|u_n\right| \geq m$$

3. Limites des suites usuelles

Propriété 1

$$n = + \infty \quad n^2 = + \infty \quad \sqrt{n} = + \infty \quad \frac{1}{n} = 0 \quad \frac{1}{n^2} = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Démonstration de $\frac{1}{n} = 0$

Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $n \in N^*$, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ étant (strictement) positive

$$\left|u_n - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \ (3)$$

Puis, par décroissance de la fonction inverse sur R_+^*,

$$(3) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc, en posant $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ (N est le plus petit entier supérieur à $1/\varepsilon$)

$$\forall n \in N, n \geq N \Rightarrow \left|u_n - 0\right| < \varepsilon \ cqfd$$

II. Opérations sur les limites

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/v7hD6s3thp8**

1. Limite d'une somme

u_n	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v_n	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\left(u_n + v_n\right)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.***

* **Forme indéterminée** : on ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Preuve du premier cas

Supposons que, soient $L, L' \in R$,

$$u_n = L \ et \ v_n = L'$$

Montrons que

$$\left(u_n + v_n\right) = L + L'$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \in R_+^*$. Par hypothèse, il existe deux entiers $N_1, N_2 \in N$ tels que

$$\forall n \in N, n \geq N_1 \Rightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon_1 \Leftrightarrow L - \varepsilon_1 < u_n < L + \varepsilon_1$$

$$\forall n \in N, n \geq N_2 \Rightarrow \left|v_n - L'\right| < \varepsilon_2 \Leftrightarrow L' - \varepsilon_2 < v_n < L' + \varepsilon_2$$

Posons

$$N = (N_1; N_2)$$

Soit $n \in N, n \geq N$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|u_n + v_n - (L + L')\right| = \left|u_n - L + v_n - L'\right| \leq \left|u_n - L\right| + \left|v_n - L'\right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

On peut choisir ε_1 et ε_2 tels que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi,

$\forall n \in N, n \geq N, \left|u_n + v_n - (L + L')\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Et donc

$$\left(u_n + v_n\right) = L + L'$$

Les autres cas se démontrent avec des raisonnements similaires.

Exemple

$\left(n^2 + n\right)$?

Solution

$n^2 = +\infty \ et \ n = +\infty$

Par somme des limites,

$\left(n^2 + n\right) = +\infty$

2. Limite d'un produit

u_n	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
v_n	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$(u_n \cdot v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Preuve du premier cas

Supposons que, soient $L, L'\in R$,

$$u_n = L \; et \; v_n = L'$$

Montrons que

$$u_n \times v_n = L\times L'$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R_+^*$. Par hypothèse, il existe deux entiers $N_1, N_2 \in N$ tels que

$$\forall n\in N, n\geq N_1 \Longrightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon_1$$

$$\forall n\in N, n\geq N_2 \Longrightarrow \left|v_n - L'\right| < \varepsilon_2$$

Posons

$$N = (N_1; N_2)$$

Soit $n\in N$, $n\geq N$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|u_n v_n - LL'\right| = \left|u_n v_n - Lv_n + Lv_n - LL'\right| \leq \left|u_n v_n - Lv_n\right| + \left|Lv_n - LL'\right| \leq \left|v_n\right|\left|u_n - L\right| + |L|\left|v_n - L'\right|$$

Or, d'après le théorème 1, il existe M tel que

$$\forall n\in N, \; \left|v_n\right|\leq M$$

Posons alors

$$M_1 = (M; 1) \; et \; M_2 = (|L|; 1)$$

En remarquant que $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ par définition, on peut choisir ε_1 et ε_2 tels que

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M_1} \; et \; \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M_2}$$

Ainsi,

$\forall n\in N, n\geq N, \left|u_n v_n - LL'\right| < M_1 \times \frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2 \times \frac{\varepsilon}{2M_2} = \varepsilon$

Ainsi

$$\left(u_n \cdot v_n\right) = L\times L'$$

Les démonstrations des autres cas se traitent par des raisonnements aussi imbuvables…

Exemple

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2 + 3\right)$?

Solution

$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$

$n^2 = +\infty \Longrightarrow \left(n^2 + 3\right) = +\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)\left(n^2 + 3\right) = +\infty$

3. Limite d'un quotient

u_n	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
v_n	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Preuve du premier cas

Supposons que la suite (v_n) ne s'annule pas et, soient $L, L' \in R$,

$$u_n = L \; et \; v_n = L'$$

Montrons que

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{L'}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\varepsilon_1, \; \varepsilon_2 \in R_+^*$. Par hypothèse, il existe deux entiers $N_1, N_2 \in N$ tels que

$$\forall n \in N, n \geq N_1 \Longrightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon_1$$

$$\forall n \in N, n \geq N_2 \Longrightarrow \left|v_n - L'\right| < \varepsilon_2$$

Posons

$$N = (N_1; N_2)$$

Soit $n \in N$, $n \geq N$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{L}{L'}\right| = \left|\frac{u_n L' - L v_n}{L' v_n}\right| = \left|\frac{u_n L' - LL' + LL' - L v_n}{L' v_n}\right| \leq \frac{\left|u_n L' - LL'\right| + \left|LL' - L v_n\right|}{|L'|\left|v_n\right|} \leq \frac{|L'|\left|u_n - L\right| + |L|\left|v_n - L'\right|}{|L'|\left|v_n\right|}$$

Or, d'après le théorème 1, il existe un réel $m > 0$ tel que

$$\forall n \in N, \; \left|v_n\right| \geq m \Leftrightarrow \frac{1}{\left|v_n\right|} \leq \frac{1}{m}$$

Posons alors

$$M = (|L|; 1)$$

En remarquant que $M > 0$ par définition, on peut choisir ε_1 et ε_2 tels que

$$\varepsilon_1 = \frac{m\varepsilon}{2} \; et \; \varepsilon_2 = \frac{m|L'|\varepsilon}{2M}$$

Ainsi,

$$\forall n \in N, n \geq N, \left|u_n v_n - LL'\right| < \frac{|L'| \times \frac{m\varepsilon}{2} + M \times \frac{m|L'|\varepsilon}{2M}}{|L'| m} = \varepsilon$$

Ainsi

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{L'}$$

Exemple

$\frac{2}{-n^2-3}$?

Solution

$n^2 = +\infty$ donc $\left(-n^2\right) = -\infty$ et donc $\left(-n^2 - 3\right) = -\infty$

D'après la règle sur la limite d'un quotient,

$$\frac{2}{-n^2-3} = 0$$

Remarque

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs. Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques (et souvent factoriser) afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture, « $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ »

Méthode

Lever une indétermination

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/RQhdU7-KLMA**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/loytWsU4pdQ**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/wkMleHBnyqU**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ**

Déterminer les limites suivantes.

a. $\left(n - 3\sqrt{n}\right)$ **b.** $\frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ **c.** $\frac{3n^2+n}{n+3}$ **d.** $\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$

Solution

a. $n = +\infty$ et $3\sqrt{n} = +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ »
Soit $n \in N$, $n - 3\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 3\right)$
Or $\sqrt{n} = +\infty$ et $\left(\sqrt{n} - 3\right) = +\infty$
Donc par limite d'un produit,

$$\left(n - 3\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 3\right) = +\infty$$

b. $5n^2 + 4 = +\infty$ et $4n^2 + 3n = +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »
$Soit\ n \in N^*$, $\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$
Or $\left(5 + \frac{4}{n^2}\right) = 5$ et $\left(4 + \frac{3}{n}\right) = 4$
Donc, par limite d'un quotient,

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$$

c. Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »
$Soit\ n \in N$, $\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{n}{n} \times \frac{3n+1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{3n+1}{1+\frac{3}{n}}$
Or $(3n + 1) = +\infty$ et $\left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$
Donc, par limite d'un quotient,

$$\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{3n+1}{1+\frac{3}{n}} = +\infty$$

d. Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ »

$$\forall n \in N, \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

On a multiplié $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ par son **expression conjuguée** $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$
Or $\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right) = +\infty$ d'après la règle sur les limites de sommes. Donc, par limite d'un quotient,

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

III. Comportement à l'infini d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Soit $i \in N$. Dans tout le paragraphe, on note I l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à i.

$$I = \{k \geq i\} = N \setminus [\![0; i-1]\!]$$

$[\![0; i-1]\!]$ désigne l'ensemble des entiers entre 0 et $i - 1$ inclus. $N \setminus [\![0; i-1]\!]$ est l'ensemble des entiers naturels privé des entiers entre 0 et $i - 1$ inclus (c'est-à-dire l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à i).

1. Suites arithmétiques

Définition 4
Une suite $\left(u_n\right)_{n \in I}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que

$$\forall n \in I, u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exemple
La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 1$ pour tout $n \in N$ et $u_3 = 2$ est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme 2.

Propriété 2
Soit $\left(u_n\right)_{n \in I}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_i

$$\forall n \in I, u_n = u_i + (n - i)r$$

Preuve
Laissée au lecteur (récurrence évidente).

Exemple
Pour la suite précédente, pour tout entier $n \in N$, $u_n = 2 + (n - 3) \times (-1) = 5 - n$

Limites et variations

r	$r = 0$	$r < 0$	$r > 0$

Premier terme u_i	$u_i \in R$	$u_i \in R$	$u_i \in R$
Variations de la suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$	Constante égale à u_i	décroissante	croissante
$u_i + (n - i)r$	u_i	$-\infty$	$+\infty$

Exemple

La suite précédente a pour limite $-\infty$

Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 3

Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_i

$$\forall n\in I, \sum_{k=i}^{n} u_k = u_i + u_{i+1} + \dots + u_n = (n - i + 1)\frac{u_i+u_n}{2} = (n - i + 1)u_i + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}r$$

est le nombre de termes de la somme

Moyenne du 1er terme et du dernier terme de la somme

Preuve

Soit $n\in I$,

$$\sum_{k=i}^{n} u_k = u_i + u_{i+1} + \dots + u_n = u_i + \left(u_i + r\right) + \left(u_i + 2r\right) + \dots + \left(u_i + (n - i)r\right)$$

$$\sum_{k=i}^{n} u_k = (n - i + 1)u_i + r\sum_{k=0}^{n-i} k$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-i} k = \sum_{k=0}^{n-i} n - i - k$$

Dans les 2 cas, on additionne tous les entiers entre 0 et

Donc, en additionnant les sommes (finies) terme à terme,

$$2\sum_{k=0}^{n-i} k = \sum_{k=0}^{n-i} k + \sum_{k=0}^{n-i} (n - i - k) = \sum_{k=0}^{n-i} (n - i) = (n - i)(n - i + 1)$$

Tous les termes sont égaux et l'on en dénombre

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n-i} k = \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

Donc

$$\sum_{k=i}^{n} u_k = (n - i + 1)u_i + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}r$$

Exemple

Pour la suite précédente, on obtient

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = (n - 3 + 1)\frac{2+2+(n-3)\times(-1)}{2} = \frac{(n-2)(-n+7)}{2} = \frac{-n^2+9n-14}{2}$$

2. Suites géométriques

Définition 5

Une suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que

$$\forall n\in I, u_{n+1} = q\times u_n$$

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ pour tout $n \in N$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5.

Propriété 4
Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_i

$$\forall n \in I, u_n = u_i \times q^{n-i}$$

Preuve
Laissée au lecteur (récurrence évidente).

Exemple
Pour la suite précédente, pour tout entier $n \in N$, $u_n = 5 \times (-3)^n$

Limites et variations

q	$q \in R$	$q \leq -1$	$-1 < q <$	$q = 0$	$0 < q < 1$		$q = 1$	$q > 1$	
Premier terme u_i	$u_i = 0$	$u_i \neq 0$	$u_i \neq 0$	$u_i \in R$	$u_i > 0$	$u_i < 0$	$u_i \in R$	$u_i > 0$	$u_i < 0$
Variations de la suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$	Constante égale à 0	alternée	alternée	Stationnaire à partir du rang $i + 1$	décroissante	croissante	Constante égale à u_i	croissante	décroissante
$u_i q^{n-i}$	0	pas de limite	**0**	**0**	**0**	**0**	u_i	$+\infty$	$-\infty$

Remarques
Une suite est **alternée** si le produit de 2 termes consécutifs est négatif. Autrement dit, des termes consécutifs sont de signes opposés.
Une suite est **constante** si tous ses termes sont égaux.
Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Démonstration dans le cas $q > 1$ (exigible BAC)
Prérequis
Soit $n \in I$, d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$(1 + a)^{n-i} \geq 1 + (n - i)a$$

On suppose que $q > 1$, donc il existe un réel a strictement positif tel que $q = a + 1$

$$q^{n-i} = (1 + a)^{n-i} \geq 1 + (n - i)a$$

$a > 0$ donc, par somme et produit des limites,

$$(1 + (n - i)a) = +\infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison, $q^{n-i} = +\infty$
On déduit que, par produit des limites,

$$u_i q^{n-i} = +\infty \text{ si } u_i > 0 \text{ et } u_i q^{n-i} = -\infty \text{ si } u_i < 0$$

Exemple
$4^n = +\infty$ donc la suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$

Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 5
Soit $\left(u_n\right)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_i

$$\forall n \in I, \sum_{k=i}^{n} u_k = u_i\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-i}\right) = u_i \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q} = u_i \frac{q^{n-i+1}-1}{q-1}$$

Preuve
Soient $n \in I$ et $q \in R \backslash \{1\}$,
$(1-q)\left(1+q+q^2+...+q^{n-i}\right)=1+q+q^2+...+q^{n-i}-q-q^2-...-q^{n-i}-q^{n-i+1}=1-q^{n-i+1}$
Donc
$1+q+q^2+...+q^{n-i}=\frac{1-q^{n+1-i}}{1-q}$
On en déduit le résultat désiré en passant à l'opposé au numérateur et au dénominateur pour le dernier calcul
$\sum_{k=i}^{n} u_k=u_i\left(1+q+q^2+...+q^{n-i}\right)=u_i\frac{1-q^{n-i+1}}{1-q}=u_i\frac{q^{n-i+1}-1}{q-1}$

Méthode
Utiliser la limite d'une suite géométrique
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/XTftGHfnYMw**
Déterminer les limites suivantes.
a. $\frac{(-2)^n}{3}$ **b.** $\left(2^n-3^n\right)$ **c.** $\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
Solution
a. $(-2)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison -2 et $-2\leq-1$ donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.
Et donc $\frac{(-2)^n}{3}$ **n'existe pas**.

b. $2^n-3^n=3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)$
Or $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$
Donc $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1$
3^n est le terme général d'une suite géométrique de raison 3 et $3>1$ donc $3^n=+\infty$
Donc, par limite d'un produit, $\left(2^n-3^n\right)=3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-\infty$
c. On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1.
$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$
Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $-1<\frac{1}{2}<1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$
Donc $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=1$ et $\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$

Méthode
Étudier une suite arithmético-géométrique
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY**
Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n. Ainsi, $u_0=5\,000$ et pour tout $n\in N^*$,
$$u_{n+1}=1,03u_n+300$$
1. Calculer u_1 et u_2
2. Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n=u_n+10\,000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. Étudier les variations de (u_n)
Solution
1. $u_1=1,03u_0+300=5\,450$ $u_2=1,03u_1+300=5\,913,5$

2. Soit $n\in N$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 10\,000 = 1,03u_n + 300 + 10\,000 = 1,03u_n + 10\,300 = 1,03\left(u_n + 10\,000\right) = 1,03v_n$$

Donc (v_n) est une **suite géométrique de raison 1,03** et de premier terme $v_0 = u_0 + 10\,000 = 15\,000$

3. Pour tout $n\in N$, $v_n = 15\,000\times1,03^n$

4. Pour tout $n\in N$, $u_n = 15\,000\times1,03^n - 10\,000$

5. Pour tout $n\in N$, $u_{n+1} - u_n = 15\,000\times1,03^{n+1} - 10\,000 - \left(15\,000\times1,03^n - 10\,000\right)$

$$u_{n+1} - u_n = 15\,000\times\left(1,03^{n+1} - 1,03^n\right) = 15\,000\times1,03^n(1,03 - 1) = 450\times1,03^n > 0$$

Donc la suite (u_n) est **strictement croissante**.

IV. Limites et comparaison

1. Théorèmes de comparaison

Théorème 2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$ et $u_n =+\infty$ alors $v_n =+\infty$

Preuve

Soit un nombre réel a.

$$u_n =+\infty$$

donc il existe un entier $N_1 \in N$ tel que

$$\forall n \in N, n\ge N_1 \Longrightarrow a < u_n$$

Par hypothèse, il existe un entier $N_2 \in N$ tel que

$$\forall n\in N, n\ge N_2 \Longrightarrow u_n \le v_n$$

Posons $N = \left(N_1; N_2\right)$. On en déduit que

$$\forall n\in N, n\ge N \Longrightarrow a < u_n \le v_n$$

On en déduit que

$$v_n =+\infty$$

Théorème 3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \ge v_n$ et $u_n =-\infty$ alors $v_n =-\infty$

Preuve

Soit un nombre réel a.

$$u_n =-\infty$$

donc il existe un entier $N_1 \in N$ tel que

$$\forall n\in N, n\ge N_1 \Longrightarrow u_n < a$$

Par hypothèse, il existe un entier $N_2 \in N$ tel que

$$\forall n\in N, n\ge N_2 \Longrightarrow v_n \le u_n$$

Posons $N = \left(N_1; N_2\right)$. On en déduit que

$$\forall n\in N, n\ge N \Longrightarrow v_n \le u_n < a$$

On en déduit que

$$v_n =-\infty$$

Méthode

Déterminer une limite par comparaison

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/iQhh46LupN4**

Déterminer la limite suivante $\left(n^2 + (-1)^n\right)$

Solution
Soit $n \in N$,

$$(-1)^n \geq -1 \Leftrightarrow n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$$

Or, par somme de limites,

$$\left(n^2 - 1\right) =+ \infty$$

Donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\left(n^2 + (-1)^n\right) =+ \infty$$

2. Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur ℕ.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $u_n = w_n = L$ alors $v_n = L$

Preuve
Soit un nombre réel $\varepsilon > 0$.

$$u_n = L$$

donc il existe un entier $N_1 \in N$ tel que

$$\forall n \in N, n \geq N_1 \Longrightarrow \left|u_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

$$v_n = L$$

donc il existe un entier $N_2 \in N$ tel que

$$\forall n \in N, n \geq N_2 \Longrightarrow \left|w_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < w_n < L + \varepsilon$$

Par hypothèse, il existe un entier $N_3 \in N$ tel que

$$\forall n \in N, n \geq N_3 \Longrightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$$

Posons $N = \left(N_1; N_2; N_3\right)$. On en déduit que

$$\forall n \in N, n \geq N \Longrightarrow L - \varepsilon < v_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow \left|v_n - L\right| < \varepsilon$$

Et donc

$$v_n = L$$

Méthode
Déterminer une limite par encadrement
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/OdzYjz_vQbw**
Déterminer la limite suivante

$$\left(1 + \frac{\sin n}{n}\right)$$

Solution
Soit $n \in N^*$,

$$-1 \leq \sin sin\, n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or ,

$$\left(-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$$

Et donc, par somme des limites,

$$\left(1 + \frac{\sin n}{n}\right) = 1$$

V. Convergence des suites monotones

Propriété 6
Soit (u_n) une suite croissante définie sur ℕ. Si $u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Preuve
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier p tel que

$$u_p > L$$

Posons $\varepsilon = u_p - L > 0$

$$u_n = L$$

donc il existe un entier $N_1 \in N$ tel que

$$\forall n \in N, n \geq N_1 \Longrightarrow \left| u_n - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

Or $u_p = L + \varepsilon$ donc

$$\forall n \in N, n \geq N_1 \Longrightarrow u_n < u_p$$

La suite (u_n) est croissante donc

$$\forall n \in N, n \geq p \Longrightarrow u_n \geq u_p$$

Posons $N = \left(N_1; p\right)$. On en déduit que

$$\forall n \in N, n \geq N \Longrightarrow u_p \leq u_n < u_p \Longrightarrow u_p < u_p$$

Cette dernière égalité est impossible donc l'hypothèse est fausse et la suite (u_n) est majorée par L.

Théorème de convergence monotone
- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

La suite $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in N^*}$ est décroissante et minorée par 0 mais tend vers 1 (elle est d'ailleurs aussi minorée par 1).

Méthode

Utiliser le théorème de convergence monotone

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/gO-MQUlBAfo**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \ et \ u_0 = 2$$

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

Montrons par récurrence la proposition $P(n)$: « $u_n < u_{n+1} < 3$ »

Initialisation

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$u_0 < u_1 < 3$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité

Supposons $P(k)$ vraie et montrons $P(k+1)$.

$$u_k < u_{k+1} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3}u_{k+1} + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 \Leftrightarrow u_{k+1} < u_{k+2} < 3$$

Donc $P(k+1)$ est vraie

Conclusion

La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.

$$\forall n \in N, u_n < u_{n+1} < 3$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente. Remarquons que

$$u_{n+1} = u_n = L$$

Or,

$$\forall n \in N, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

Donc, par produit et somme de limites,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}L + 2$$

Par unicité de la limite, on en déduit que

$$L = \frac{1}{3}L + 2 \Leftrightarrow L = 3$$

La suite (u_n) converge donc vers 3.

Théorème 4

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$

Preuve

Soit un réel a. Comme la suite (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que

$$u_p > a$$

La suite (u_n) est croissante donc

$$\forall n \in N, n \geq p \Longrightarrow u_n \geq u_p$$

Donc

$$\forall n \in N, n \geq p \Longrightarrow u_n > a$$

On en déduit que

$$u_n = +\infty$$

La démonstration est analogue pour le deuxième point.

Corollaire

- Si une suite croissante, alors soit elle est convergente soit elle tend vers $+\infty$
- Si une suite décroissante, alors soit elle est convergente soit elle tend vers $-\infty$

Preuve

La preuve découle directement des deux derniers théorèmes.