# Chương 4
# BỨC XẠ NHIỆT

## 4.1. Khái niệm cơ bản về Bức xạ nhiệt

Bức xạ nhiệt là quá trình truyền nhiệt bằng sóng điện từ giữa các vật thể. Các thành phần mang điện trong cấu trúc vi mô của vât thể luôn ở trạng thái chuyển động tạo ra sóng điện từ, lan truyền trong không gian gọi là bức xạ điện từ. Khi đập vào bề mặt vật thể khác, một phần bức xạ điện từ bị vật đó hấp thụ biến thành nhiệt. Quá trình truyền năng lượng nhiệt bằng sóng điện từ đó gọi là trao đổi nhiệt bức xạ. Mọi vật luôn tồn tại nhiệt độ T > 0K, nên luôn phát ra bức xạ nhiệt và đồng thời cũng hấp thụ các tia bức xạ nhiệt từ các vật khác chiếu tới, bởi vậy quá trình trao đổi nhiệt bức xạ là quá trình hai chiều, nhưng ở vật có nhiệt độ cao năng lượng bị mất đi bởi bức xạ ra sẽ lớn hơn năng lượng nhận được bởi hấp thụ. Khi các vật có nhiệt độ bằng nhau, quá trình trao đổi nhiệt bức xạ giữa chúng vẫn xảy ra nhưng ở thế cân bằng động, tức là ở mỗi vật phát năng lượng bức xạ ra bằng năng lượng hấp thụ vào nên năng lượng của vật đó không thay đổi.

Các đại lượng đặc trưng khả năng tiếp nhận tia bức xạ chiếu tới :

$\alpha$ Hệ số hấp thụ, biểu thị tỷ lệ năng lượng tia chiếu tới được vật tiếp nhận
$\rho$ Hệ số phản xạ, biểu thị tỷ lệ năng lượng tia chiếu tới bị vật phản xạ
$\tau$ Hệ số xuyên qua, biểu thị tỷ lệ năng lượng tia chiếu tới được vật cho đi qua
Các hệ số trên phụ thuộc vào bước sóng, góc chiếu của tia tới

Nói chung với mọi vật luôn có : $\alpha + \rho + \tau = 1$

Vật có $\alpha = 1$ , $\rho = \tau = 0$ gọi là vật đen
Vật có $\rho = 1$ , $\alpha = \tau = 0$ gọi là vật trắng
Vật có $\tau = 1$ , $\alpha = \rho = 0$ gọi là vật trong
Vật có $\tau = 0$ gọi là vật đục
Vật có $\alpha + \rho = 1$ gọi là vật xám

$\varepsilon$ Độ đen hay hằng số phát xạ của vật, biểu thị khả năng bức xạ ra của vật.
Vật đen có $\varepsilon_0 = 1$, vật xám có $\varepsilon < 1$.

Năng lượng truyền đi bằng bức xạ từ bề mặt vật đen tuân theo định luật Stefan Bolzơman

$$E_0 = \sigma_0 . T^4 \tag{4.1}$$

ở đây $E_0$ là năng suất bức xạ của vật đen, (W/m$^2$); $\sigma_0$ là hằng số Stefan Boltzơmann $\sigma_0 = 5{,}669.10^{-8}$ (W/m$^2$K$^4$); T là nhiệt độ tuyệt đối (K).

Năng lượng bức xạ từ bề mặt các vật xám nhỏ hơn vật đen, xác định bởi

$$E = \varepsilon . \sigma_0 T^4 \tag{4.2}$$

ở đây E là năng suất bức xạ của vật xám, (W/m$^2$); $\varepsilon$ là hằng số phát xạ của vật xám, còn gọi là độ đen

Theo định luật Kirrchop với vật xám có $\frac{\alpha}{E} = E_0 = f(T)$ và α = ε

Năng lượng phát xạ thực tế từ bề mặt một vật xám bao gồm năng lượng bản thân của vật ở nhiệt độ T và thành phần phản xạ của tia chiếu tới :

$$E_{hd} = E + (1-\alpha)E_T \tag{4.3}$$

ở đây :

$E_{hd}$ là năng lượng phát xạ thực tế của vật, gọi là năng suất bức xạ hiệu dụng

E là năng suất bức xạ riêng của vật, $E = \varepsilon.\sigma_0 T^4$

ρ là hệ số phản xạ của vật, ρ = 1 – α.

$E_T$ là năng suất tia bức xạ chiếu tới.

Hai tấm phẳng rộng đặt song song khá gần nhau có nhiệt độ và hệ số hấp thụ tương ứng là $T_1$, $\alpha_1$ và $T_2$, $\alpha_2$ , giữa là môi trường trong suốt (τ = 0) thì năng suất bức xạ hiệu dụng của mỗi tấm là

Tấm 1: $$E_{hd1} = \frac{E_1 + (1-\alpha_1)E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2}$$

Tấm 2: $$E_{hd2} = \frac{E_2 + (1-\alpha_2)E_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} \tag{4.4}$$

Năng lượng bức xạ trao đổi giữa hai tấm là

$$q_{12} = E_{hd1} - E_{hd2} = \frac{\alpha_2 E_1 - \alpha_1 E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \tag{4.5}$$

Nếu giữa hai tấm trên đặt màn chắn có độ đen $\varepsilon_M$ thì năng lượng bức xạ trao đổi giữa hai tấm qua màn là

$$q_{1M2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{2}{\varepsilon_M} - 2} C_0 \left[ \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

Tấm thứ nhất được bao kín hoàn toàn bởi mặt thứ hai có nhiệt độ $T_2$ thì trao đổi nhiệt bức xạ được tính bởi

$$Q = q\alpha_1 = \varepsilon_1 \sigma.F_1(T_1^4 - T_2^4) \tag{4.6}$$

## 4.2. Bức xạ giữa các vật đen

## 4.2.1. Hệ số góc bức xạ

Khảo sát bức xạ giữa hai vật đen là hai mặt phẳng có diện tích $A_1$ và $A_2$ . Để đánh giá sự phụ thuộc cuả trao đổi nhiệt bức xạ vào vị trí không gian của mỗi hình, cần phải xác định các đặc điểm không gian đó.

Hệ số góc bức xạ được định nghĩa :

$F_{1-2}$ = tỷ lệ năng lượng rời mặt 1 tới mặt 2
$F_{2-1}$ = tỷ lệ năng lượng rời mặt 2 tới mặt 1
$F_{m-n}$ = tỷ lệ năng lượng rời mặt m tới mặt n

Hệ số góc bức xạ còn có các tên khác là *yếu tố nhìn* (view factor), *hệ số cấu hình* (configuration factor)

Năng lượng rời mặt 1 đi đến mặt 2 là

$$E_{b1}A_1F_{12} \tag{4.7}$$

Năng lượng rời mặt 2 đi đến mặt 1 là

$$E_{b2}A_2F_{21} \tag{4.8}$$

Trong đó $E_{b1}$ và $E_{b2}$ là năng suất bức xạ của hai mặt đen.

Do hai mặt là vật đen nên chúng hấp thụ hết tia chiếu đến, nên năng lương trao đổi của hệ thống là:

$$Q_{1-2} = E_{b1}A_1F_{12} - E_{b2}A_2F_{21}$$

Khi hai vật có cùng nhiệt độ thì $Q_{1-2} = 0$ và vì $T_1 = T_2$ nên $E_{b1} = E_{b2}$ nên có:

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \tag{4.9}$$

Vậy nói chung năng lượng trao đổi giữa hai vật là:

$$Q_{1-2} = A_1F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = A_2F_{21}(E_{b1} - E_{b2}) \tag{4.10}$$

Tổng quát từ (4.9) suy ra cho hai mặt m và n:

$$A_mF_{mn} = A_nF_{nm}, \quad \text{hay:} \quad F_{nm} = \frac{A_m}{A_n}F_{mn} \tag{4.11}$$

Để xác định hệ số góc bức xạ, xét các phân tố diện tích $dA_1$ và $dA_2$ trên mỗi mặt . Gọi $\varphi_1$ và $\varphi_2$ là các góc giữa pháp tuyến của mỗi mặt với đường r nối hai điểm giữa của hai hình. Hình chiếu của $dA_1$ theo hướng r là

$$dA_1\cos\varphi_1 \tag{4.12}$$

**a. Góc khối**

Gọi góc khối của diện tích $dA_n$ vuông góc với r là $d\Omega$

$$d\Omega = \frac{dA_n}{r^2} \tag{4.13}$$

Trong toạ độ cầu diện tích $dA_n$ tính theo r, góc φ và góc ψ sẽ là :

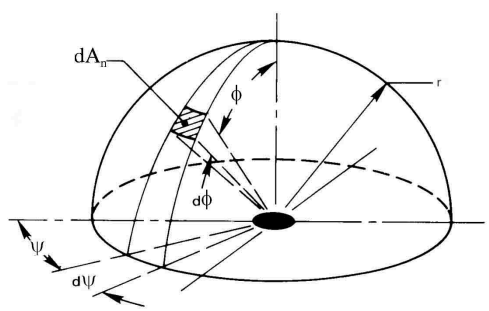
$$dA_n = rd\varphi.rd\psi.\sin\varphi = r^2 d\varphi\sin\varphi d\psi \tag{4.14}$$

(Với bán cầu phía trên : $\psi = 0 \div 2\pi$ , $\varphi = 0 \div \pi/2$)

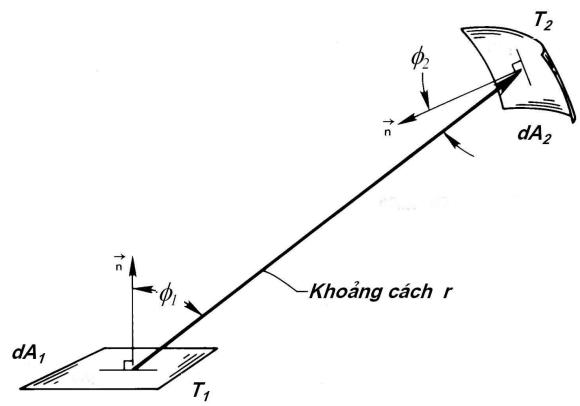
Từ trên thấy

$$d\Omega = \frac{dA_n}{r^2} = d\phi \sin\phi.d\psi \tag{4.15}$$

Đơn vị góc khối là steradian. 1 steradian là góc khối chắn bởi một hình vuông cong trên mặt cầu có diện tích bằng bán kính của nó. Toàn mặt cầu có diện tích $4\pi r^2$, nên có góc khối $\Omega = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$ steradian




Hình 4.1. Toạ độ cầu và diện tích $dA_n$




Hình 4.2. Xác định vị trí giữa hai mặt tương hỗ.

**b. Cường độ bức xạ góc $I_b$ , năng lượng bức xạ theo hướng**

Gọi cường độ bức xạ góc $I_b$ là năng lượng bức xạ phát đi trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị góc khối theo hướng nào đó thì năng lượng phát đi của phân tố $dA_1$ theo hướng $\varphi_1$ là

$$I_\varphi = I_b dA_1 \cos\varphi_1 \tag{4.16}$$

Năng lượng trên đi đến phân tố diện tích $dA_n$ chắn bởi góc khối $d\Omega$,sẽ là

$$I_b dA_1 \cos\phi_1 d\Omega = I_b dA_1 \frac{dA_n}{r^2} \tag{4.17}$$

Từ (4.14) suy ra công thức tương ứng với góc $\varphi_1$ của phân tố $dA_1$ rồi thay vào (4.17) sẽ có

$$I_b dA_1 \cos\varphi_1 d\Omega = I_b dA_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 d\varphi_1 d\psi \quad (4.18)$$

**c. Năng lượng bức xạ trên toàn mặt bán cầu**

Năng lượng bức xạ của phân tố $dA_1$ trên toàn mặt bán cầu là $E_b dA_1$

$$E_b dA_1 = I_b dA_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\phi.\cos\phi.d\phi.d\psi = I_b dA_1 \pi \quad (4.19)$$

trong đó

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\phi\cos\phi.d\phi.d\psi = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\phi.}{2} d\frac{2\phi}{2}.\int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{4}(-\cos 2\phi)\Big|_0^{\pi/2}.2\pi = \pi$$

Vậy

$$E_b = I_b\pi \text{ hay } I_b = E_b/\pi \quad (4.20)$$

**d. Năng lượng bức xạ giữa hai phân tố**

Xác định năng lượng phát ra từ phân tố $dA_1$ chiếu tới phân tố $dA_2$:

Do $dA_n$ chắn góc khối $d\Omega$ tại r , cũng chính là góc khối của $dA_2$ nhìn từ mặt 1, nên :

$$dA_n = dA_2 \cos\varphi_2 \quad (4.21)$$

Thay (4.21) vào (4.17) sẽ có năng lượng phát đi của phân tố $dA_1$ đến $dA_2$ là

$$I_b dA_1 \cos\phi_1 \cos\phi_2 \frac{dA_2}{r^2} \quad (4.22)$$

Thay (4.20) vào (4.22) sẽ có năng lượng phát đi từ $dA_1$ đi tới $dA_2$

$$dq_{1\text{-}2} = Eb_1 \cos\phi_1 \cos\phi_2 \frac{dA_1 dA_2}{\pi.r^2} \quad (4.23)$$

Tương tự có năng lượng phát đi từ $dA_2$ đi tới $dA_1$

$$dq_{2\text{-}1} = Eb_2 \cos\phi_2 \cos\phi_1 \frac{dA_2 dA_1}{\pi.r^2} \quad (4.24)$$

**e. Trao đổi năng lượng của hệ thống**

Trao đổi năng lượng của hệ thống giữa hai mặt $A_1$ và $A_2$ là

$$Q_{1-2} = \int_{A1}\int_{A2}(dq_{1-2} - dq_{2-1}) = \int_{A1}\int_{A2}\left(E_{b1}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1dA_2}{\pi.r^2} - E_{b2}\cos\phi_2\cos\phi_1\frac{dA_2dA_1}{\pi.r^2}\right)$$

$$Q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2})\int_{A1}\int_{A2}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1dA_2}{\pi.r^2} \qquad (4.25)$$

**g. Hệ số góc bức xạ**

So sánh (4.10) với (4.25) sẽ thấy :

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} = \int_{A1}\int_{A2}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1dA_2}{\pi.r^2} \qquad (4.26)$$

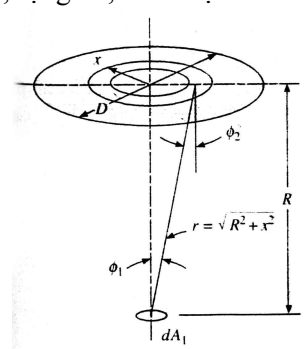
Rút ra

$$F_{12} = \frac{1}{A_1}\int_{A1}\int_{A2}\cos\phi_1\cos\phi_2\frac{dA_1dA_2}{\pi.r^2} \qquad (4.27)$$

Vậy để xác định hệ số góc bức xạ cần tính tích phân trên, nghĩa là phải biết các đặc điểm hình học của các vật như khoảng cách r , các góc khối, diện tích mỗi hình ...

**Thí dụ 4.1.** Xác định hệ số góc bức xạ của diện tích nhỏ $dA_1$ với một đĩa $A_2$ đối diện ở khoảng cách R, hình 4.3. Phân tố diện tích $dA_2$ trên đĩa $A_2$ là hình vành khăn bán kính x, rộng dx, nên diện tích là

$dA_2 = 2\pi xdx$




Hình 4.3.

Do hai mặt song song nên $\varphi_1 = \varphi_2$. áp dụng (4.27) có :

$$dA_1F_{dA1-A2} = dA_1\int_{A1}\int_{A2}\cos\phi_1\cos\phi_1\frac{dA_1dA_2}{\pi.r^2}$$

$$= dA_1\int_{A1}\cos^2\phi\frac{2\pi dx}{\pi.r^2}$$

do $r = (R^2+x^2)^{1/2}$ và $\cos\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$ , nên

$$dA_1F_{dA1-A2} = dA_1\int_0^{D/2}\frac{2R^2x}{(R^2+x^2)^2}dx = dA_1\left(\frac{R^2}{R^2+x^2}\right)\Bigg|_0^{D/2} = dA_1\frac{D^2}{4R^2+D^2}$$

Vậy hệ số góc bức xạ :

$$F_{dA1-A2} = \frac{D^2}{4R^2+D^2} \qquad (4.28)$$

Nếu $A_2$ là bề mặt rộng vô hạn thì $D \to \infty$ . Khi đó

$$F_{dA1\text{-}A2} = F_{dA1\text{-}A2\to\infty} = \lim_{D\to\infty}\frac{D^2}{4R^2+D^2} = 1 \qquad (4.29)$$

**Ví dụ 4.2.** Hai tấm phẳng đen kích thước 0,5 m×1,0 m đặt cách nhau 0,5 m có nhiệt độ $1000^0$C và $500^0$C. Xác định bức xạ giữa chúng?

Giải:
Sử dụng đồ thị hình 4.4(a) có

$\frac{Y}{D} = \frac{0,5}{0,5} = 1$ ; $\frac{X}{D} = \frac{01,0}{0,5} = 2,0$ . Tra ra $F_{12} = 0,285$.

$Q = A_1F_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = \sigma F_{12}(T_1^4 - T_2^4)$
$= (5,669\times10^{-8})(0,5)(0,285)(1273^4-773^4)$
$= 18,33$ kW

## 4.2.2. Một số đặc điểm chung của các hệ số góc bức xạ

**1.** Từ (4.9) :

$$F_{12}A_1 = F_{21}A_2 = F_{td}. \qquad (4.30)$$

$F_{td}$ gọi là diện tích bức xạ tương đương của hai mặt tương hỗ.

Vậy diện tích bức xạ tương đương của hai mặt tương hỗ bằng nhau.

**2.** Từ trên có:

$$\frac{F_{12}}{F_{21}} = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{và} \quad F_{12} = \frac{A_2}{A_1}F_{21} \quad \text{hay} \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2}F_{12} . \qquad (4.31)$$

Vậy hệ số góc bức xạ của hai mặt tương hỗ tỷ lệ nghịch với diện tích của chúng và trong 2 mặt chỉ cần tìm một hệ số góc .
**3**. Nếu diện tích vật 2 là vô cùng lớn: $A_2 \to \infty$ thì

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2}F_{12} = 0 \qquad (4.32)$$

như (3.7) trong ví dụ trên

$$F_{12} = \lim_{A2\to\infty}\frac{A_2}{A_1}F_{12} = 1 \qquad (4.33)$$

Vậy hệ số góc bức xạ của mặt diện tích hữu hạn đối với mặt vô cùng lớn luôn bằng 1.

**4.** Hệ số góc bức xạ cuả một vật đối với môi trường:

Khi một vật có môi trường vô cùng lớn bao quanh, tình trạng giống như trường hợp trên, toàn bộ năng lượng phát ra từ vật sẽ được môi trường nhận hết.
Gọi:

$Q_1 = A_1E_1$ là toàn bộ năng lượng phát ra từ vật 1

$Q_{12} = A_1E_1 F_{12}$ là năng lượng vật (1) được môi trường (2) nhận.

Thì :

$Q_1 = Q_{12}$ tức $A_1E_1 = = A_1E_1 F_{12}$ . Suy ra $F_{12} = 1$ (4.34)

Vậy hệ số góc bức xạ cuả một vật đối với môi trường luôn bằng 1.

**5.** Hệ số góc bức xạ cuả một mặt phẳng hoặc mặt cong lồi đối với chính nó
Giả sử vật 1 có diện tích $A_1$ là mặt phẳng hoặc cong lồi đặt trong môi trường có thể nhận được một phần bức xạ của chính nó phát ra.

$$Q_1 = A_1E_1 = A_1E_1 F_{11} + A_1E_1 F_{12} \quad (4.35)$$

$Q_1 = A_1E_1$ là toàn bộ năng lượng phát ra từ $A_1$
$A_1E_1 F_{11}$ là phần năng lượng vật 1 phát ra chiếu lên chính nó
$A_1E_1 F_{12}$ là phần năng lượng vật 1 phát ra môi trường.

Do $F_{12} = 1$ nên $A_1E_1 = A_1E_1 F_{12}$ , suy ra $A_1E_1 F_{11} = 0$ tức là $F_{11} = 0$.
Vậy hệ số góc bức xạ cuả một mặt phẳng hoặc mặt cong lồi đối với chính nó bằng 0.

**6.** Hệ số góc bức xạ cuả một mặt kín .
Khi vật là một mặt cong kín, toàn bộ năng lượng bức xạ ra của vật sẽ chiếu cho chính nó:

$$Q_1 = A_1E_1F_{11} = A_1E_1 \text{ , nên } F_{11} = 1 \quad (4.36)$$

Vậy hệ số góc bức xạ cuả một mặt kín đối với chính nó bằng 1.

**7.** Hệ số góc bức xạ của mặt lõm đối với chính nó
Khi vật là một mặt lõm tức là mặt cong hở $A_1$, năng lượng bức xạ của vật gồm một phần bức xạ ra môi trường $A_2$ và một phần chiếu cho chính vật $A_1$:

$$Q_1 = E_1A_1 = E_1A_1F_{12} + E_1A_1F_{11} \quad (4.37)$$

$E_1A_1F_{12}$ là năng lượng chiếu ra môi trường, $E_1A_1F_{11}$ là năng lượng chiếu cho chính vật.

$$E_1A_1F_{12} = E_1A_1 - E_1A_1F_{11}$$

Chia cả hai vế cho $E_1A_1$ sẽ được:

$$F_{11} = 1 - F_{12} \quad (4.38)$$

Vậy hệ số góc bức xạ của mặt lõm đối với chính nó luôn khác không và nhỏ hơn 1.

**8.** Nếu hệ thống có n mặt tạo thành hệ kín, thì năng lượng của một mặt bức xạ ra bằng tổng năng lượng bức xạ từ mặt đó chiếu tới tất cả các mặt trong hệ

$$Q_1 = E_1A_1 = E_1A_1F_{12} + E_1A_1F_{13} + \ldots + E_1A_1F_{1n} = \sum_{i=1}^{n} E_1A_1F_{1i} .$$

Suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{1i} = 1 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} A_1 F_{1i} = A_1 \tag{4.39}$$

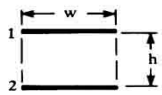
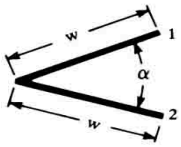
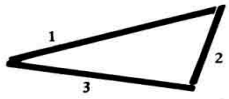
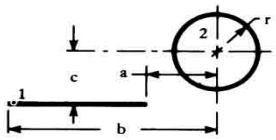
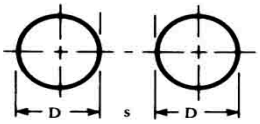
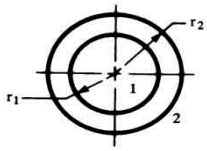
Vậy :

- Tổng hệ số góc bức xạ của một mặt đối với các mặt khác bằng 1.
- Tổng các diện tích bức xạ tương đương của một mặt với các mặt khác bằng chính diện tích mặt đó.

## 4.2.3. Xác định hệ số góc bức xạ trong một số trường hợp

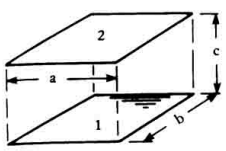
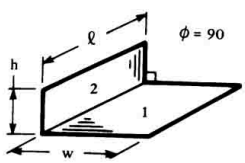
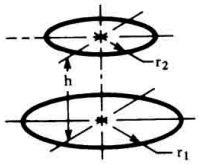
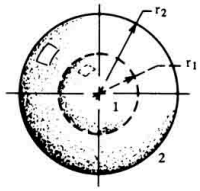
a. **Công thức tính hệ số góc bức xạ giữa các mặt có độ dài rất lớn.**

Bảng 4.1

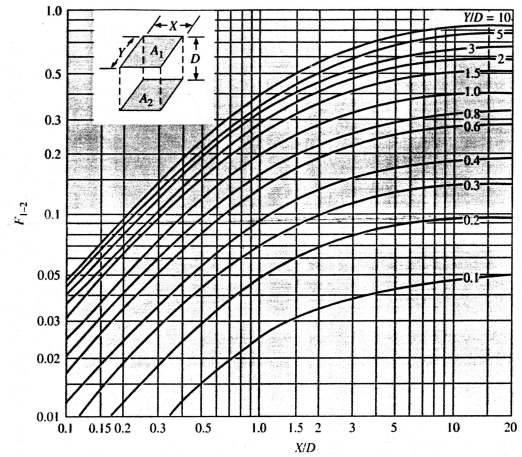
| | *Cấu hình* | *Công thức tính* |
|---|---|---|
| 1. |   | $F_{1\text{-}2} = F_{2\text{-}1} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{w}\right)^2} - \left(\frac{h}{w}\right)$ |
| 2. |   | $F_{1\text{-}2} = F_{2\text{-}1} = 1 - \sin(\alpha/2)$ |
| 3. | | $F_{1\text{-}2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{h}{w} - \sqrt{1 + \left(\frac{h}{w}\right)^2}\right]$ |
| 4. |   | $F_{1\text{-}2} = (A_1 + A_2 - A_3)/2A_1$ |
| 5. |   | $F_{1\text{-}2} = \frac{r}{b-a}\left[\tan^{-1}\frac{b}{c} - \tan^{-1}\frac{a}{c}\right]$ |
| 6. |   | Let $X = 1 + s/D$. Then: $F_{1\text{-}2} = F_{2\text{-}1} = \frac{1}{\pi}\left[\sqrt{X^2 - 1} + \sin^{-1}\frac{1}{X} - X\right]$ |
| 7. |   | $F_{1\text{-}2} = 1$, $F_{2\text{-}1} = \frac{r_1}{r_2}$, and $F_{2\text{-}2} = 1 - F_{2\text{-}1} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$ |

**b. Công thức tính hệ số góc bức xạ giữa các mặt có kích thước hữu hạn.**

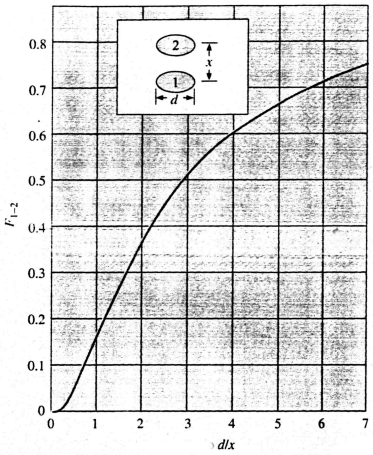
Bảng 4.2

| | *Cấu hình* | *Công thức tính* |
|---|---|---|
| 1. |  | Let $X = a/c$ and $Y = b/c$. Then: $$F_{1\text{-}2} = \frac{2}{\pi XY}\left\{\ln\left[\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}\right]^{1/2} - X\tan^{-1}X - Y\tan^{-1}Y + X\sqrt{1+Y^2}\tan^{-1}\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} + Y\sqrt{1+X^2}\tan^{-1}\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}\right\}$$ |
| 2. |  | Let $H = h/\ell$ and $W = w/\ell$. Then: $$F_{1\text{-}2} = \frac{1}{\pi W}\left\{W\tan^{-1}\frac{1}{W} - \sqrt{H^2+W^2}\tan^{-1}\left(H^2+W^2\right)^{-1/2} + H\tan^{-1}\frac{1}{H} + \frac{1}{4}\ln\left\{\left[\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\right] \times \left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{H^2(1+H^2+W^2)}{(1+H^2)(H^2+W^2)}\right]^{H^2}\right\}\right\}$$ |
| 3. |  | Let $R_1 = r_1/h$, $R_2 = r_2/h$, and $X = 1 + \left(1 + R_2^2\right)/R_1^2$. Then: $$F_{1\text{-}2} = \frac{1}{2}\left[X - \sqrt{X^2 - 4(R_2/R_1)^2}\right]$$ |
| 4. |  | Concentric spheres: $$F_{1\text{-}2} = 1, \qquad F_{2\text{-}1} = (r_1/r_2)^2, \qquad F_{2\text{-}2} = 1 - (r_1/r_2)^2$$ |

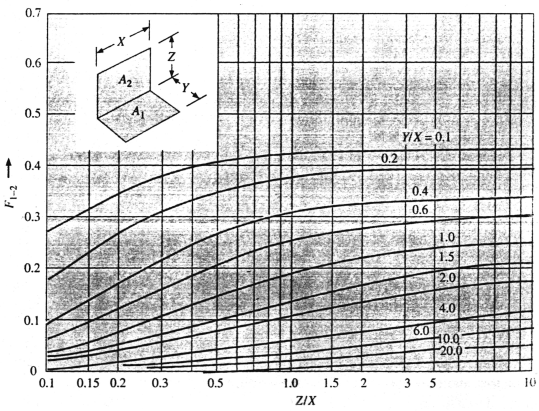
## C. Đồ thị để tra hệ số góc bức xạ



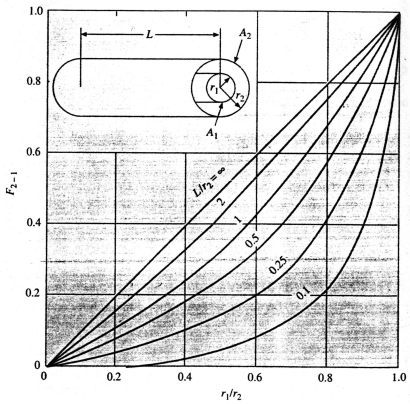

Hình 4.4(a). Hai hình chữ nhật đặt song song



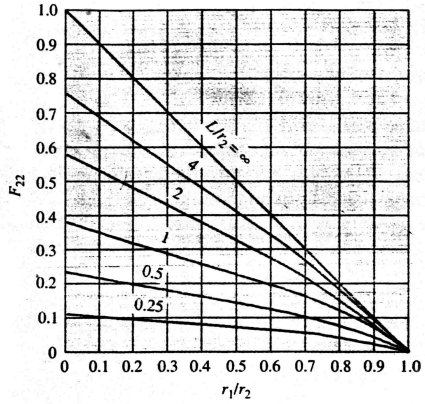

Hình 4.4(b). Hai hình tròn đặt song song




Hình 4.4(c). Hai hình chữ nhật đặt vuông góc nhau




Hệ số góc bức xạ của ống ngoài đối với ống trong




Hệ số góc bức xạ của ống ngoài đối với chính nó

Hình 4.4(c). Hai ống trụ lồng nhau đồng trục

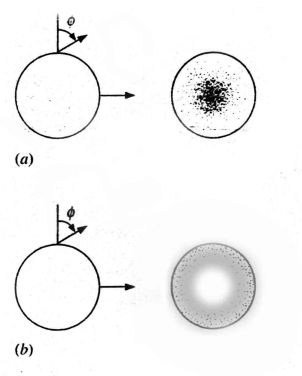
## 4.3. Trao đổi nhiệt bức xạ giữa các vật xám

### 4.3.1. Trạng thái bề mặt vật thực

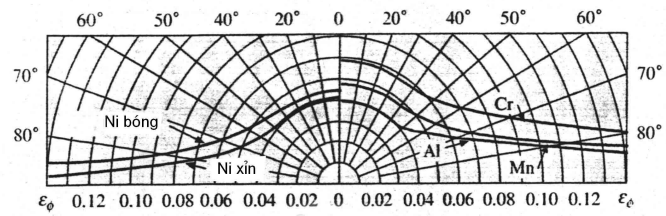
Các vật thực không phản xạ khuếch tán hoàn toàn nên bức xạ từ mặt vật thực không đồng đều nhau theo các hướng. Đường cong biểu thi đặc tính bức xạ của các vật khác nhau chia làm hai loại là vật dẫn điện và vật không dẫn điện. Vật dẫn điện phát xạ năng lượng nhiều hơn theo hướng có góc phương vị lớn. Đặc tính này có thể được giải thích bằng lý thuyết sóng điện từ. Khi hai quả cầu được nung đến nhiệt độ nóng sáng, quả cầu dẫn điện sẽ xuất hiện vành sáng xung quanh do nhiều năng lượng được phát đi ở góc φ lớn. Quả cầu cấu tạo bởi vật liệu không dẫn điện sẽ có đặc điểm ngược lại là xuất hiện vết sáng ở giữa và tối ở xung quanh.

Phản xạ và hấp thụ của các bề mặt vật thực là hàm số của không chỉ bản thân vật mà còn phụ thuộc vào môi trường xung quanh. Các đặc tính này phụ thuộc vào hướng và chiều dài bước sóng của tia tới. Phân bố cường độ bức xạ góc của tia tới là hàm rất phức tạp của nhiệt độ và các đặc tính bề mặt của tất cả các vật liên quan xung quanh.

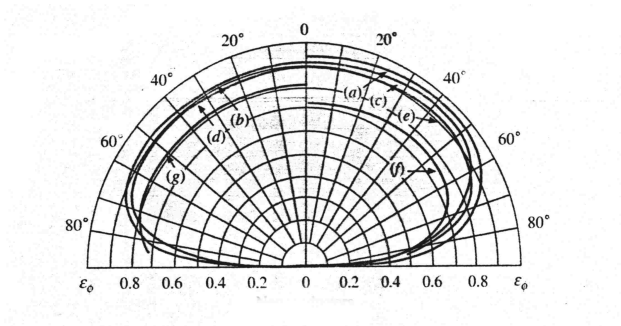
Gọi năng lượng bức xạ tới trên một đơn vị diện tích bề mặt, trong một đơn vị thời gian, trên một đơn vị chiều dài sóng là $G_\lambda$, thì hệ số hấp thụ tổng sẽ bằng tỷ số năng lượng hấp thụ tổng với năng lượng tổng đi tới trên bề mặt.




Hình 4.5




Hình 4.6. Hệ số bức xạ của các vật dẫn điện.




Hình 4.7. Hệ số bức xạ của các vật không dẫn điện
a) Nước đá. b) Gỗ. c) Thuỷ tinh. d) Giấy. e) Đất sét. f) Ôxít đồng. g) Ôxít nhôm

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \tag{4.40}$$

Nếu giả sử vật xám có $\varepsilon_\lambda = \varepsilon = \text{const}$ thì định luật Kirchoff có thể áp dụng đơn giản như đã viết đối với bức xạ đơn sắc là

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \tag{4.41}$$

Bởi vậy đối vật xám có $\alpha_\lambda = \text{const}$, thì hệ số hấp thụ tổng α cũng là const và độc lập với phân bố chiều dài sóng của tia tới. Hơn nữa hệ số bức xạ và hấp thụ là không đổi trên mọi chiều dài sóng đối với vật xám, chúng cũng buộc phải độc lập với nhiệt độ. Nhưng thực tế các vật thực trong tự nhiên không phải luôn luôn là xám nên phân tích trao đổi nhiệt bức xạ giữa chúng rất phức tạp. Để giảm bớt sự phức tạp các bài toán thực tế cần có những hệ số hiệu chỉnh bởi những tiêu chuẩn thực tế đủ hiệu lực.

## 4.3.2. Các đại lượng đặc trưng

**a. Các hệ số đặc trưng tính chất của vật đối với tia bức xạ**

α hệ số hấp thụ (absorptivity)

ρ hệ số phản xạ (reflectivity)
τ hệ số xuyên qua (transmitssivity)
ε hệ số phát xạ (emissivity) còn gọi là độ đen của vật xám, tỷ lệ phát xạ so với vật đen.
$\varepsilon = E/E_b$ , $\varepsilon = \alpha$
G năng suất tia tới (irradiation), tổng các bức xạ chiếu tới bề mặt trên 1 đơn vị diện tích, trong 1 đơn vị thời gian

**b. Năng suất bức xạ hiệu dụng J**

Năng suất bức xạ hiệu dụng J là tổng năng lượng phát đi từ bề mặt trên 1 đơn vị diện tích, trong 1 đơn vị thời gian, gồm năng suất bức xạ riêng E và thành phần phản xạ tia tới ρG.

E năng suất bức xạ riêng của vật xám

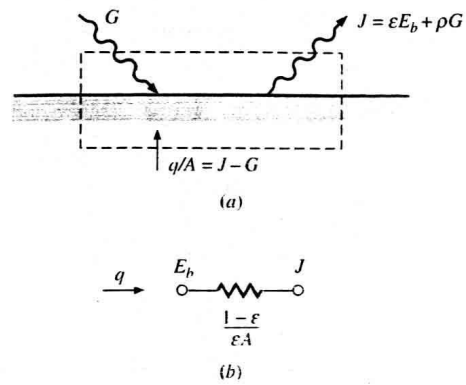
$$E = \varepsilon.E_b \qquad (4.42)$$

Trong đó là $E_b$ năng suất bức xạ của vật đen

Năng suất phản xạ tia tới của vật xám ρG (4.43)
Năng suất bức xạ hiệu dụng

$$J = \varepsilon.E_b + \rho G \qquad (4.44)$$

Với vật đục $\tau = 0$ , $\rho = 1- \varepsilon$




Hình 4.8.

$$J = \varepsilon.E_b + (1- \varepsilon )G \qquad (4.45)$$

Từ (4.45) suy ra

$$G = \frac{J - \varepsilon E_b}{1 - \varepsilon} \qquad (4.46)$$

**c. Bức xạ hiệu quả**

Gọi mật độ dòng bức xạ hiệu quả của vật xám là năng lượng thực sự phát đi từ bề mặt của vật bằng hiệu của năng lượng hiệu dụng J trừ năng lượng chiếu tới G:

$$q = J - G \qquad (4.47)$$

Thay các đại lượng ở trên vào:

$$q = \varepsilon.E_b + (1- \varepsilon )G - G$$

$$q = \varepsilon(E_b - \frac{J - \varepsilon E_b}{1 - \varepsilon})$$

$$q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}} \qquad (4.48)$$

Vậy bức xạ nhiệt hiệu quả phát đi từ vật có diện tích A là:

$$Q = \frac{E_b - J}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}} \qquad (4.49)$$

Công thức (4.49) tương tự như công thức tính dòng điện I = $\frac{U_1 - U_2}{R}$, bởi vậy có thể biểu thị bằng phần tử mạng hình 4.9.

($E_b$- J) gọi là hiệu thế bức xạ tại bề mặt

$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}$ gọi là nhiệt trở bức xạ tại bề mặt vật, ký hiệu là $R_m$

## 4.3.3. Trao đổi nhiệt bức xạ giữa các mặt xám

## 1. Bức xạ giữa hai mặt

Xét hai mặt xám trong không gian có diện tích $A_1$ và $A_2$. Gọi $J_1$ và $J_2$ là năng suất bức xạ hiệu dụng phát đi từ mỗi mặt. Bức xạ phát đi từ mặt thứ nhất đến mặt thứ 2 phụ thuộc vào hệ số góc bức xạ giữa chúng.

Lượng bức xạ phát đi từ mặt 1 đi đến mặt 2 là

$$J_1A_1F_{12} \qquad (4.50)$$

Lượng bức xạ phát đi từ mặt 2 đi đến mặt 1 là

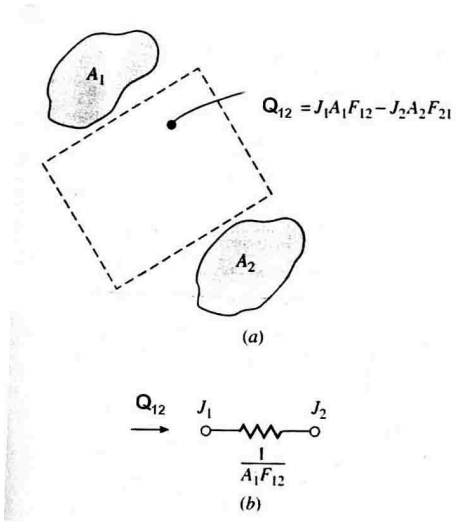
$$J_2A_2F_{21} \qquad (4.51)$$

Trao đổi nhiệt bức xạ giữa hai mặt là

$$Q_{1\text{-}2} = J_1A_1F_{12} - J_2A_2F_{21} \qquad (4.52)$$

Vì $A_1F_{12} = A_2F_{21}$

nên




Hình 4.9 Bức xạ giữa hai mặt

$$Q_{1\text{-}2} = (J_1 - J_2)A_1F_{12} = (J_1 - J_2)A_2F_{21} \qquad (4.53)$$

hay

$$Q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1F_{12}}} \qquad (4.54)$$

Tương tự trên, hình 4.9, gọi

$J_1$ - $J_2$ là hiệu thế truyền bức xạ không gian giữa hai mặt

$\frac{1}{A_1F_{12}}$ là nhiệt trở bức xạ không gian giữa hai mặt , ký hiệu $R_{12}$

Trở lại lượng nhiệt hiệu quả tại bề mặt của mỗi mặt theo (4.49):

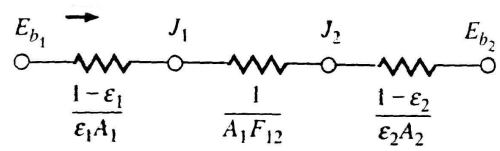
Mặt $A_1$ có $Q_{1-2} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}}$ ; mặt $A_2$ có $Q_{2-1} = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$ hay $Q_{1-2} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$

Do ổn định nên các dòng nhiệt trên buộc phải bằng nhau nên

$$Q_{1-2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \qquad (4.55)$$

Theo ký hiệu quy ước ở trên:

$$Q_{1-2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{R_{m1} + R_{12} + R_{m2}} \qquad (4.56)$$




Hình 4.10 . Các nhiệt trở bức xạ giữa hai mặt

Trong đó $R_{m1} = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}$ ; $R_{m2} = \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}$ ; $R_{12} = \frac{1}{A_1F_{12}}$

Như vậy các nhiệt trở bức xạ bề mặt phụ thuộc vào độ đen và diện tích bề mặt đó, nhiệt trở bức xạ không gian phụ thuộc vào hệ số góc bức xạ giữa các mặt.

## 2. Hệ thống bức xạ có 3 mặt

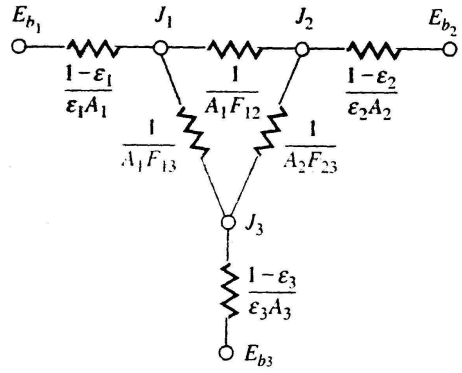
ba mặt xám có diện tích và hệ số bức xạ tương ứng là $A_1$, $A_2$, $A_3$ và $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$.
Tương tự trên sẽ có các nhiệt trở bức xạ bề mặt

$$R_{m1} = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} \; ; \quad R_{m2} = \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} \; ; \quad R_{m3} = \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}$$

Nhiệt trở bức xạ không gian giữa các mặt

$$R_{12} = \frac{1}{A_1 F_{12}} \; ; \quad R_{13} = \frac{1}{A_1 F_{13}} \; ; \quad R_{23} = \frac{1}{A_2 F_{23}}$$

Dòng nhiệt trao đổi giữa mặt 1 và mặt 2 là




Hình 4.11

$$Q_{12} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} \tag{4.57}$$

Dòng nhiệt trao đổi giữa mặt 1 và mặt 3 là

$$Q_{13} = \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} = \frac{J_1 - J_3}{R_{13}} \tag{4.58}$$

Dòng nhiệt trao đổi giữa mặt 2 và mặt 3 là

$$Q_{23} = \frac{J_2 - J_3}{\frac{1}{A_2 F_{23}}} = \frac{J_2 - J_3}{R_{23}} \tag{4.59}$$

Dòng nhiệt hiệu quả tại mặt 1 là

$$Q_1 = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = \frac{E_{b1} - J_1}{R_{m1}} \tag{4.60}$$

Dòng nhiệt hiệu quả tại mặt 2 là

$$Q_2 = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{E_{b2} - J_2}{R_{m2}} \tag{4.61}$$

Dòng nhiệt hiệu quả tại mặt 3 là

$$Q_3 = \frac{E_{b3} - J_3}{\dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3}} = \frac{E_{b3} - J_3}{R_{m3}} \tag{4.62}$$

Trong đó $J_1$, $J_2$, $J_3$ là đại lượng phải tìm, do ổn định $J_1$, $J_2$, $J_3$ không đổi . Tại các nút tổng các dòng nhiệt bằng không nên có :

Nút $J_1$: $$\frac{E_{b1} - J_1}{R_{m1}} + \frac{J_2 - J_1}{R_{21}} + \frac{J_3 - J_1}{R_{31}} = 0$$

Nút $J_2$: $$\frac{E_{b2} - J_2}{R_{m2}} + \frac{J_1 - J_2}{R_{12}} + \frac{J_3 - J_2}{R_{32}} = 0 \tag{4.63}$$

Nút $J_3$: $$\frac{E_{b3} - J_3}{R_{m3}} + \frac{J_1 - J_3}{R_{13}} + \frac{J_2 - J_3}{R_{23}} = 0$$

Từ trên dẫn đến hê phương trình sau:

$$\left(\frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{31}}\right)J_1 - \left(\frac{1}{R_{21}}\right)J_2 - \left(\frac{1}{R_{21}}\right)J_3 = \frac{E_{b1}}{R_{m1}}$$

$$-\left(\frac{1}{R_{12}}\right)J_1 + \left(\frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{32}}\right)J_2 - \left(\frac{1}{R_{32}}\right)J_3 = \frac{E_{b2}}{R_{m2}}$$

$$-\left(\frac{1}{R_{13}}\right)J_1 - \left(\frac{1}{R_{23}}\right)J_2 + \left(\frac{1}{R_{m3}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}}\right)J_3 = \frac{E_{b3}}{R_{m3}}$$

Hệ trên đưa về dạng ma trận

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{31}}\right) & -\frac{1}{R_{21}} & -\frac{1}{R_{31}} \\ -\frac{1}{R_{12}} & \left(\frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{32}}\right) & -\frac{1}{R_{32}} \\ -\frac{1}{R_{13}} & -\frac{1}{R_{23}} & \left(\frac{1}{R_{m3}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{23}}\right) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E_{b1}}{R_{m1}} \\ \frac{E_{b2}}{R_{m2}} \\ \frac{E_{b3}}{R_{m3}} \end{vmatrix} \tag{4.64}$$

Có thể giải bằng phương pháp ma trận nghịch đảo.

## 3. Các bề mặt cách nhiệt và bề mặt có diện tích lớn

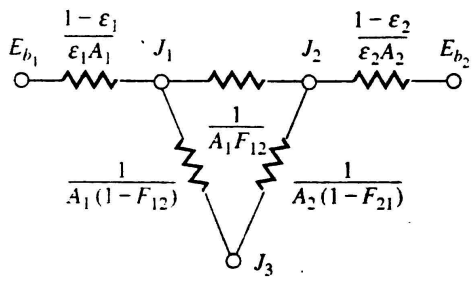
Nhiệt trở bức xạ bề mặt là $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}$, nếu bề mặt được cách nhiệt hoàn toàn hoặc phản xạ lại toàn bộ năng lượng chiếu tới, thì dòng nhiệt qua bề mặt bằng không và dẫn đến $E_b = J$. Nhưng nhiệt trở cách nhiệt không có giá trị 0. Kết quả nút J của mạng thay đổi, nghĩa là không có dòng nhiệt qua, vế phải có diện tích lớn sẽ làm nhiệt trở tiến tới 0. Đó là trạng thái bề mặt như vật đen có ε = 1, nhiệt trở sẽ bằng không.

Khảo sát hệ thống hai mặt trao đổi nhiệt với mặt thứ ba được cách nhiệt hoàn toàn. Mặt thứ ba không có tác động tới quá trình trao đổi nhiệt vì nó hấp thụ và phản xạ trở lại năng lượng từ hai mặt kia chiếu tới. Tuy nhiệt trở bề mặt $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}$ tồn tại, nhưng do không có dòng nhiệt qua nên $E_{b3} = J_3$.

Do mặt 3 bao quanh hai mặt 1 và 2 nên các hệ số góc bức xạ của hai mặt đối với mặt 3 là

$$F_{13} = 1 - F_{12}$$
$$F_{23} = - F_{21} \qquad (4.65)$$

Trong hệ thống, mặt 1 và 2 là lồi nên chúng không thể nhìn thấy chính chúng được nên $F_{11} = F_{22} = 0$.




Hình 4.12

**Thí dụ 4.3.** Giữa hai tấm phẳng có cùng diện tích $A_1 = A_2 = 0,5\ m \times 1m = 0,5\ m^2$, nhiệt độ và độ đen tương ứng hai tấm là $1000^0C$ và $500^0C$, $\varepsilon_1 = 0,2$ và $\varepsilon_2 = 0,5$ đặt cách nhau trong phòng rộng có nhiệt độ $27^0C$. Xác định dòng nhiệt trao đổi của mỗi tấm.

Bố trí hai tấm và sơ đồ điện tương đương được biểu thị trên hình 4.13

Giải:
+ Xác định hệ số góc bức xạ giữa các tấm:

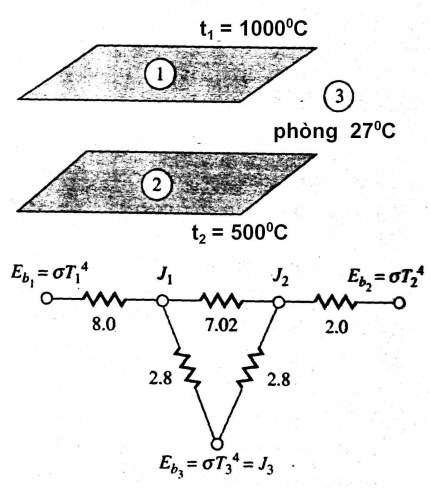
- Giữa tấm 1 và 2, tra trên hình 4.3(a) với

$$\frac{Y}{D} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \ ; \ \frac{X}{D} = \frac{01,0}{0,5} = 2,0 \qquad \rightarrow F_{12} = 0,285 = F_{21}$$

- Giữa tấm 1 và phòng $F_{13}$:
Phòng có diện tích $A_3$ coi là vô cùng lớn, nên
$F_{13} = 1 - F_{12} = 1 - 0,285 = 0,715$
- Giữa tấm 2 và phòng cũng như trên: $F_{23} = 0,715$

+ Tính các nhiệt trở bức xạ bề mặt:

- Tấm 1: $R_{m1} = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{1-0,2}{(0,2)(0,5)} = 8$




Hình 4.13. Sơ đồ trao đổi nhiệt

- Tấm 2: $R_{m2} = \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2} = \dfrac{1-0,5}{(0,5)(0,5)} = 2$

- Phòng là môi trường bao quanh 2 tấm có diện tích vô cùng lớn ∞, nên nhiệt trở bề mặt bằng 0.

$R_{m3} = \dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 A_3} = 0$. Bởi vậy $E_{b3} = \sigma T^4 = J_3$

+ Tính các nhiệt trở bức xạ không gian:

- Giữa tấm 1 với 2 và giữa tấm 2 với 1: $R_{12} = \dfrac{1}{A_1 F_{12}} = R_{21} = \dfrac{1}{A_2 F_{21}} = \dfrac{1}{(0,5)(0,285)} = 7,018$

- Giữa tấm 1 với phòng và giữa tấm 2 với phòng: $R_{13} = \dfrac{1}{A_1 F_{13}} = \dfrac{1}{(0,5)(0,715)} = 2,797 = R_{23}$

+ Lập hệ phương trình thế bức xạ J ( bức xạ hiệu dụng) tại các nút:

- Nút 1: $\dfrac{E_{b1}-J_1}{8} + \dfrac{J_2-J_1}{7,02} + \dfrac{E_{b3}-J_1}{2,8} = 0 \rightarrow \left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7,02}+\dfrac{1}{2,8}\right)J_1 - \dfrac{1}{7,02}J_2 = \dfrac{E_{b1}}{8} + \dfrac{E_{b3}}{2,8}$

-Nút 2: $\dfrac{J_1-J_2}{7,02} + \dfrac{E_{b2}-J_2}{8} + \dfrac{E_{b3}-J_2}{2,8} = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{7,02}J_1 + \left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7,02}+\dfrac{1}{2,8}\right)J_2 = \dfrac{E_{b2}}{8} + \dfrac{E_{b3}}{2,8}$

$E_{b1} = \sigma T_1^4 = (5,67\times10^{-8})(1273^4) = 148,87$ kW/m$^2$
$E_{b2} = \sigma T_2^4 = (5,67\times10^{-8})(773^4) = 20,241$ kW/m$^2$
$E_{b3} = \sigma T_3^4 = (5,67\times10^{-8})(300^4) = 0,4592$ kW/m$^2$

Thay vào giải ra

$J_1 = 33,469$ kW/m$^2$ , $J_2 = 15,054$ kW/m$^2$

Dòng nhiệt từ tấm 1 mất đi: $Q_1 = \dfrac{E_{b1}-J_1}{R_{m1}} = \dfrac{148,87-33,469}{8} = 14,425$ kW

Dòng nhiệt từ tấm 2 mất đi: $Q_2 = \dfrac{E_{b2}-J_2}{R_{m2}} = \dfrac{20,241-15,054}{2} = 2,549$ kW

Dòng nhiệt phòng nhận từ hai tấm:

$Q_3 = \dfrac{J_1-J_3}{R_{13}} + \dfrac{J_2-J_3}{R_{23}} = \dfrac{33,469-0,4592}{2,8} + \dfrac{15,054-0,4592}{2,8} = 17,020$ kW

## 4. Bức xạ giữa hai mặt song song nhau rộng vô hạn

### a. Hai mặt phẳng rộng vô hạn

Khi hai mặt là rộng vô hạn thì $A_1 = A_2$ và $F_{12} = 1$. Thay vào (4.55) được dòng nhiệt trao đổi giữa hai tấm

$$Q_{1\text{-}2} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{A(E_{b1} - E_{b2})}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad (4.65)$$

Mật độ dòng nhiệt

$$q_{12} = \frac{Q_{1-2}}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad W/m^2 \qquad (4.66)$$

**b. Hai vách trụ lồng nhau đồng trục dài vô hạn**

Do vách bên trong (1) được bọc kín bởi vách ngoài (2) nên bức xạ của vách trong sẽ được vách ngoài nhận hết, bởi vậy $F_{12} = 1$. Thay vào (4.55) sẽ được

$$Q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \frac{\sigma . A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)}, \qquad (4.67)$$

với $A_1/A_2 = r_1/r_2$. $r_1$ , $r_2$ là bán kính hai vách trụ

Hai vách cầu lồng nhau cũng dùng công thức (4.67) với $A_1/A_2 = (r_1/r_2)^2$

## 4.4. Bức xạ trong môi trường có hấp thụ và xuyên qua

### 4.4.1. Thành phần bức xạ xuyên qua môi trường

Khảo sát hai mặt có môi trường hấp thụ và xuyên qua ở giữa, hình 4.14. Trong thực tế, môi trường có thể là chất khí, thuỷ tinh hoặc chất dẻo.

Giả thiết môi trường không có phản xạ, nên theo định luật Kirchhop :

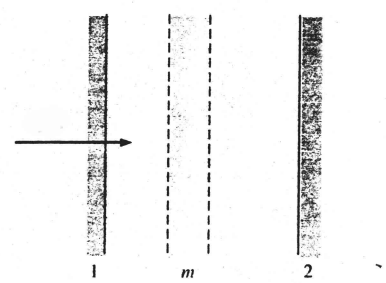
$$\alpha_m + \tau_m = \varepsilon_m + \tau_m = 1 \qquad (4.68)$$

Năng lượng từ mặt 1 đi qua môi trường đến mặt 2 là:

$$J_1 A_1 F_{12} \tau_m \qquad (4.69)$$

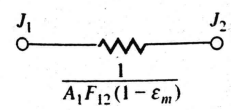
Năng lượng từ mặt 2 đi qua môi trường đến mặt 1 là:

$$J_2 A_2 F_{21} \tau_m \qquad (4.70)$$




Hình 4.14

Trao đổi của hệ thống trong quá trình truyền xuyên qua môi trường




Hình 4.15

$Q_{1\text{-}2\ xuyên} = A_1F_{12}\tau_m(J_1 - J_2) = A_1F_{12}(1-\varepsilon_m)(J_1 - J_2)$

$$Q_{1-2.xuyen} = \frac{J_1 - J_2}{\dfrac{1}{A_1 F_{12}(1-\varepsilon_m)}} \qquad (4.71)$$

Công thức trên được biểu thị bằng phần tử mạng hình 4.15

## 4.4.2. Thành phần trao đổi giữa bề mặt 1 và môi trường.

Môi trường không phản xạ, năng lượng của môi trường bức xạ ra là

$$J_m = \varepsilon_m E_{bm} \qquad (4.72)$$

Xét tại mặt 1, năng lượng của môi trường đi tới mặt 1 là

$$A_m F_{m1} J_m = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm} \qquad (4.73)$$

Năng lượng từ mặt 1 đi tới môi trường là

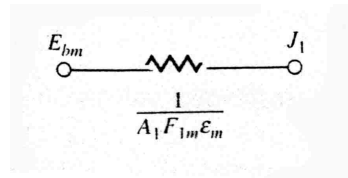
$$J_1 A_1 F_{1m} \alpha_m = J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$$

Chú ý rằng sự hấp thụ trong môi trường nghĩa là bức xạ chiếu tới đã vào môi trường. Tương ứng với các quan hệ trên, năng lượng trao đổi của hệ thống giữa môi trường và mặt 1 là chênh lệch giữa tổng năng lượng phát ra bởi môi trường tới mặt 1 và và lượng hấp thụ phát ra từ mặt 1

$Q_{m\text{-}1net} = A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{bm} - J_1 A_1 F_{1m} \varepsilon_m$

Chú ý tới $A_m F_{m1} = A_1 F_{1m}$ thì

$$Q_{m\text{-}1net} = Q_{m-net} = \frac{E_{bm} - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{1m} \varepsilon_m}} \qquad (4.74)$$



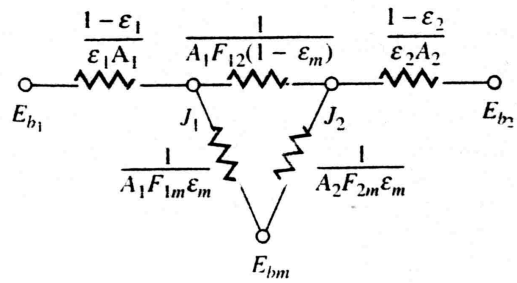

Hình 4.16

Quá trình truyền nhiệt trên được biểu thị bằng phần tử mạng hình 4.16

## 4.4.3. Trao đổi nhiệt của hệ thống

Quá trình trao đổi nhiệt của hệ thống biểu thị bằng sơ đồ mạng tổng thể trên hình 4.17.

Nếu nhiệt môi trường giữ ổn định thì $E_{bm}$ được xác định theo $E_{bm} = \sigma T^4$
Tuy nhiên, do năng lượng được phân chia trong môi trường nên $E_{bm}$ trở thành điểm thả nổi, và thế của nó được xác định theo các phần tử của mạng.




Hình 4.17

Trong các bài toán thực tế các mặt xám trao đổi nhiệt qua chất khí có hấp thụ, khó khăn là xác định hệ số xuyên qua và hệ số hấp thụ của chất khí. Các đại lượng này không chỉ phụ thuộc vào bản chất của khí mà còn phụ thuộc vào bề dày của lớp khí. Bức xạ qua lớp khí mỏng nhiều hơn lớp khí dày.

**Thí dụ 4.4.** Hai tấm phẳng rộng có nhiệt độ và độ đen tương ứng là $T_1 = 800$ K; $\varepsilon_1 = 0,3$ ; $T_2 = 400$ K; $\varepsilon_2 = 0,7$. Giữa chúng là khí xám có $\varepsilon_g = 0,2$ ; $\tau_g = 0,8$. Xác định mật độ dòng nhiệt truyền giữa hai tấm, bức xạ của mỗi tấm và nhiệt độ của khí.

Giải:
Sơ đồ mạng thể hiện trên hình 4.17. Coi diện tích các tấm $A_1 = A_2 = 1$ m$^2$.
Nhiệt trở bức xạ bề mặt 1 và 2:

$$R_{m1} = = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1-0,3}{0,3} = 2,333 \quad ; \quad R_{m2} = \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{1-0,7}{0,7} = 0,4286$$

Nhiệt trở không gian giữa hai bề mặt 1 và 2:

$$R_{12} = \frac{1}{F_{12}(1-\varepsilon_g)} = \frac{1}{1(1-0,2)} = 1,25$$

Nhiệt trở không gian giữa từng mặt với môi trường khí

$$R_{1g} = \frac{1}{F_{1g}\varepsilon_g} = R_{2g} = \frac{1}{F_{2g}\varepsilon_g} = \frac{1}{0,2} = 5,0$$

Nhiệt trở không gian tương đương của $R_{12}$ và $R_{1g}$ , $R_{1g}$

Do : $[R_{12}// (R_{1g} + R_{1g})]$ nên $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{1g} + R_{2g}} \rightarrow$

$$R_{td} = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{1g} + R_{2g}}} = \frac{1}{\frac{1}{1,25} + \frac{1}{5,0 + 5,0}} = 1,1111$$

Nhiệt trở tổng giữa hai mặt:

$$R_{\Sigma} = R_{m1} + R_{td} + R_{m2} = 2,333 + 1,1111 + 0,4286 = 3,8726$$

Thế bức xạ tại mỗi mặt:

$$E_{b1} = \sigma T_1^4 = (5,67.10^{-8}).(800)^4 = 23.220 \text{ W/m}^2$$

$$E_{b2} = \sigma T_2^4 = (5,67.10^{-8})(400^4) = 1451 \text{ W/m}^2$$

Dòng bức xạ tổng giữa hai mặt:

$$q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{R_{\Sigma}} = \frac{23220 - 1451}{3,8726} = 5621,28 \text{ W/m}^2$$

Dòng bức xạ giữa hai mặt khi không có khí ở giữa:

$$q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} = \frac{23220 - 1451}{\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,7} - 1} = 5786,69 \text{ W/m}^2$$

Thế bức xạ hiệu dụng của mỗi mặt $J_1$ và $J_2$ (tức dòng bức xạ hiệu dụng của mỗi tấm)

Trên mỗi nhiệt trở bề mặt $R_{m1}$ và $R_{m2}$ đều có dòng bức xạ hiệu dụng bằng dòng bức xạ tổng:

$$q_{m1} = \frac{E_{b1} - J_1}{R_{m1}} = 5621,28.\text{W/m}^2 \quad ; \quad q_{m2} = \frac{J_1 - E_{b2}}{R_{m2}} = 5621,28 \quad W/m^2$$

suy ra :

$$J_1 = E_{b1} - 5621,28 \times R_{m1} = 23220 - 5621,28 \times 2,333 = 10105,55 \text{ W/m}^2$$
$$J_2 = E_{b2} + 5621,28 \times R_{m2} = 1451 + 5621,28 \times 0,4286 = 3860,28 \text{ W/m}^2$$

Do nhiệt trở không gian giữa mỗi mặt với khí bằng nhau $R_{1g} = R_{1g}$ nên thế bức xạ của khí phải bằng trung bình cộng của thế bức xạ hiệu dụng mỗi mặt:

$$E_{bg} = \frac{J_1 + J_2}{2} = \frac{10105,55 + 3860,28}{2} = 6982,15 \text{ W/m}^2$$

Nhiệt độ của khí: $E_{bg} = \sigma T_g^4 \rightarrow$ $$Tg = \sqrt[4]{\frac{E_{bg}}{\sigma}} = \left(\frac{6982,15}{5,67.10^{-8}}\right)^{1/4} = 592,3\,K$$

## 4.4.4. Môi trường hấp thụ và xuyên qua có nhiều lớp

Khi có trên 2 bề mặt tham gia trao đổi nhiệt, thì trao đổi nhiệt bức xạ giữa chúng sẽ xuyên qua môi trường. Kết quả là hệ số xuyên qua giữa các bề mặt có thể khác đi, phụ thuộc vào sự định hướng hình học của chúng. Do vậy nhiệt độ của khí sẽ thay đổi, tính chất xuyên qua và bức xạ của chất khí cũng thay đổi theo khu vực khác nhau trong khí. Một cách biểu thị tình trạng này là chia khối khí thành các lớp và thiết lập mạng bức xạ tương ứng và cho thế của các nút đó thay đổi dần để đạt tới phân bố nhiệt độ trong chất khí. Khi đó buộc phải dùng phương pháp tính lặp vì tính chất bức xạ của khí là hàm của các thế bức xạ thay đổi chưa biết. Nếu nhiệt độ khí mà đồng nhất thì cách giải quá dễ dàng.

Khảo sát hệ thống gồm 2 tấm bức xạ qua môi trường 2 lớp m và n có tính hấp thụ và xuyên qua như trên hình 4.18.

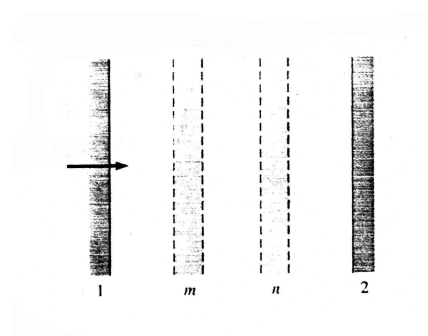
Năng lượng trao đổi giữa mặt 1 và lớp m của môi trường là

$$Q_{1\text{-}m} = A_1F_{1m}\varepsilon_m J_1 - A_mF_{m1}\varepsilon_{bm}E_{bm} = \frac{J_1 - E_m}{\dfrac{1}{A_1F_{1m}\varepsilon_m}} \qquad (4.75)$$

Năng lượng trao đổi giữa mặt 2 và lớp n của môi trường là

$$Q_{2\text{-}m} = A_1F_{2m}\varepsilon_n J_2 - A_nF_{n1}\varepsilon_n E_{bn} = \frac{J_2 - E_n}{\dfrac{1}{A_2F_{2n}\varepsilon_n}} \qquad (4.76)$$

$$Q_{2\text{-}m} = A_1F_{2m}\varepsilon_n J_2 - A_nF_{n1}\varepsilon_n E_{bn} = \frac{J_2 - E_n}{\dfrac{1}{A_2F_{2n}\varepsilon_n}}$$




Hình 4.18

Năng lượng từ mặt 1 đến mặt 2 là

$$Q_{1\text{-}2} = A_1F_{12}J_1\tau_m\tau_n = A_1F_{12}J_1(1-\varepsilon_m)(1-\varepsilon_n) \qquad (4.77)$$

Năng lượng từ mặt 2 đến mặt 1 là

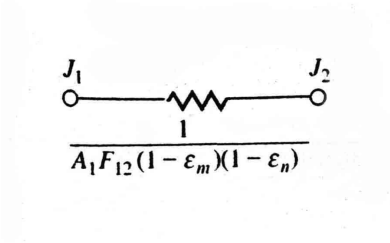
$$Q_{2\text{-}1} = A_2F_{21}J_2\tau_n\tau_m = A_2F_{21}J_2(1-\varepsilon_n)(1-\varepsilon_m) \qquad (4.78)$$

Năng lượng từ mặt 1 đến mặt 2 qua môi trường xuyên qua là

$$Q_{1\text{-}2\text{xuyên qua}} = Q_{1\text{-}2} - Q_{2\text{-}1} = A_1F_{12}(J_1 - J_2)(1-\varepsilon_m)(1-\varepsilon_n)$$

$$Q_{1\text{-}2\text{xuyên qua}} = \frac{J_1 - J_2}{\dfrac{1}{A_1F_{12}(1-\varepsilon_m)(1-\varepsilon_n)}} \qquad (4.79)$$

Công thức trên được biểu thị bởi phần tử mạng hình 4.19.




Hình 4.19

Năng lượng từ mặt 1 bức xạ đi bị hấp thụ tại lớp n là

$$Q_{1\text{-}n} = A_1F_{1n}J_1\tau_m\varepsilon_n = A_1F_{1n}J_1(1-\varepsilon_m)\varepsilon_n \qquad (4.69)$$

Năng lượng lớp n qua lợp m đến mặt 1 là

$$Q_{n\text{-}1} = A_nF_{n1}J_n\tau_m = A_nF_{n1}J_n(1-\varepsilon_m) \qquad (4.80)$$

Do $J_n = \varepsilon_nE_{bn}$ nên trao đổi bức xạ giữa mặt 1 và lớp n là

$$Q_{1\text{-}n.net} = Q_{1\text{-}n} - Q_{n\text{-}1} = A_1F_{1n}(1-\varepsilon_m)\varepsilon_n(J_1 - E_{bn}) \qquad (4.81)$$

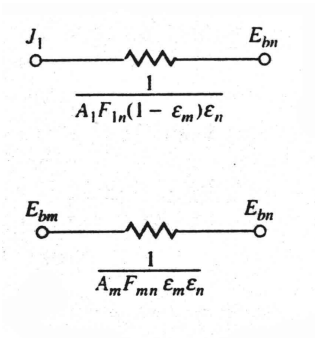
$$Q_{1\text{-}n.net} = \frac{J_1 - E_{bn}}{\dfrac{1}{A_1F_{1n}(1-\varepsilon_m)\varepsilon_n}} \qquad (4.82)$$

Công thức trên được biểu thị bởi phần tử mạng hình 4.20 (trên)

Tương tự như vậy, trao đổi nhiệt giữa tấm 2 với lớp m sẽ là

$$Q_{2\text{-}m.\,net} = Q_{1\text{-}m} - Q_{m\text{-}1} = A_2F_{2m}(1-\varepsilon_n)\varepsilon_m(J_2 - E_{bm})$$

$$Q_{2\text{-}m.\,net} = \frac{J_2 - E_{bm}}{\dfrac{1}{A_2F_{2m}(1-\varepsilon_n)\varepsilon_m}} \qquad (4.78)$$




Hình 4.20

Năng lượng rời lớp m bị hấp thụ trên lớp n là

$$Q_{m\text{-}n} = J_mA_mF_{mn}\alpha_n = A_mF_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_nE_{bm} \qquad (4.83)$$

Năng lượng rời lớp n bị hấp thụ trên lớp m là

$$Q_{n\text{-}m} = J_nA_nF_{mn}\alpha_m = A_nF_{mn}\varepsilon_n\varepsilon_mE_{bn} \qquad (4.84)$$

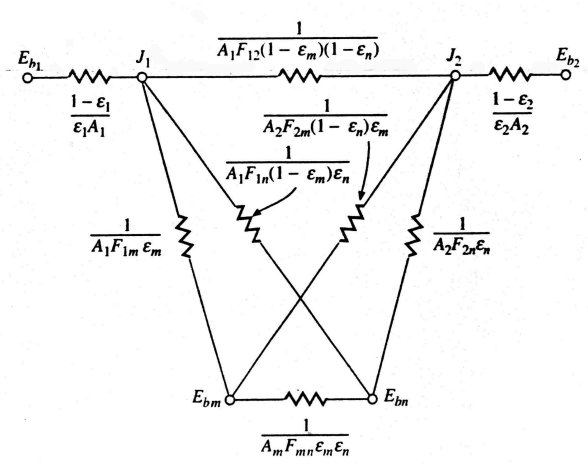
Năng lượng trao đổi giữa hai lớp m và n là

$$Q_{m\text{-}n\ net} = Q_{m\text{-}n} - Q_{n\text{-}m} = A_mF_{mn}\varepsilon_m\varepsilon_n(E_{bm} - E_{bn})$$

$$Q_{m\text{-}n\ net} = \frac{E_{bm} - E_{bn}}{\dfrac{1}{A_m F_{mn} \varepsilon_m \varepsilon_n}} \qquad (4.85)$$

Năng lượng trên được biểu thị bởi phần tử mạng trên hình 4.20

Cuối cùng toàn bộ mạng thể hiện quá trình trao đổi nhiệt bức xạ của hệ thống được thể hiện trên hình 4.21




Hình 4.21.

## 4.5. Trao đổi nhiệt bức xạ của các mặt phản xạ gương

### 4.5.1. Bức xạ tại bề mặt phản xạ gương

Các vật thực tế không hoàn toàn phản xạ khuếch tán mà có thể một phần phản xạ gương. Phản xạ gương được ứng dụng rất nhiều trong các bộ thu năng lượng bức xạ mặt trời, bởi vậy nó có ý nghĩa kỹ thuật lớn. Khi có phản xạ gương, hệ số phản xạ ρ gồm hai thành phần là phản xạ khuếch tán $\rho_D$ và phản xạ gương $\rho_S$:

$$\rho = \rho_D + \rho_S \qquad (4.86)$$

Từ định luật Kiếc sốp: $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$

ε hệ số bức xạ cũng là độ đen, α là hệ số hấp thụ, ρ là hệ số phản xạ,

Lượng nhiệt bề mặt mất đi là hiệu của năng lượng phát ra và năng lượng hấp thụ

$$Q = A(\varepsilon E_b - \alpha G) \qquad (4.87)$$

Gọi mật độ dòng khuếch tán $J_D$ là năng lượng bức xạ khuếch tán rời bề mặt trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian.

$$J_D = \varepsilon E_b + \rho_D G \qquad (4.88)$$

Giải G từ (b) thay vào (a) được

$$Q = \frac{\varepsilon A}{\rho_D}\left[E_b(\varepsilon + \rho_D) - J_D\right] \qquad (4.89)$$

Do $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho_D - \rho_S$ , nên $(\varepsilon + \rho_D) = (1-\rho_S)$ nên

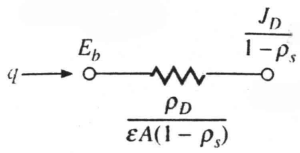
$$Q = \frac{E_b(1-\rho_S) - J_D}{\dfrac{\rho_D}{\varepsilon A}}$$

Vậy

$$Q = \frac{E_b - \dfrac{J_D}{1-\rho_S}}{\dfrac{\rho_D}{\varepsilon A(1-\rho_S)}} \qquad (4.90)$$

$\dfrac{J_D}{1-\rho_S}$ gọi là thế bức xạ gương tại bề mặt

$\dfrac{\rho_D}{\varepsilon A(1-\rho_S)}$ gọi là nhiệt trở bức xạ gương tại bề mặt $R_{mS}$



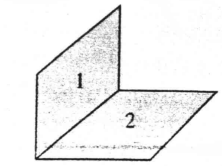

Hình 4.22. Phần tử mạng có phản xạ gương

Công thức (4.90) được biểu thị bởi phần tử mạng hình 4.22. Có thể thấy nếu vật chỉ phản xạ khuếch tán không có phản xạ gương $\rho_S = 0$; thì $\rho = \rho_D = 1 - \varepsilon$, và (4.90) trở về (4.49)

$$Q = \frac{E_b - J}{\dfrac{\rho}{\varepsilon A}} = \frac{E_b - J}{\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon A}} \qquad (4.91)$$

## 4.5.2. Bức xạ giữa 2 bề mặt có phản xạ gương

Khảo sát trao đổi nhiệt bức xạ giữa hai mặt có phản xạ gương 1 và 2 đặt vuông góc nhau, hình 4.23.




Hình 4.23. Hai mặt gương

Năng lượng bức xạ khuếch tán từ mặt 1 đến mặt 2 bị phản xạ gương không quay về mặt 1 là

$$Q_{1\to 2} = J_{1D} A_1 F_{12}(1 - \rho_{2S}) \qquad (4.92)$$

Năng lượng bức xạ khuếch tán từ mặt 2 đến mặt 1 bị phản xạ gương không quay về mặt 2

$$Q_{2\to1} = J_{2D}A_2F_{21}(1-\rho_{1S}) \quad (4.93)$$

$(1-\rho_S)$ đặc trưng cho phần hấp thụ trừ đi phần phản xạ gương khuếch tán đi của mỗi mặt. Đây là thành phần quan trọng nhất vì trước đây chỉ khảo sát những thành phần trao đổi khuếch tán trực tiếp đã buộc phải bỏ qua phần này. Bây giờ khảo sát thành phần phản xạ gương chúng phải có mặt.

Sự trao đổi của hệ thống bằng hiệu số giữa (4.92) và (4.93)

$$Q_{12} = Q_{1\to2} - Q_{2\to1} = J_{1D}A_1F_{12}(1-\rho_{2S}) - J_{2D}A_2F_{21}(1-\rho_{1S}) \quad (4.94)$$

$$Q_{12} = \frac{J_{1D}(1-\rho_{2s}) - J_{2D}(1-\rho_{1s})}{\dfrac{1}{A_1F_{12}}} \quad (4.95)$$

Để đưa về thế bức xạ có phản xạ gương tại mỗi mặt cần biến đổi như sau

$$Q_{12} = \frac{\left[\dfrac{J_{1D}(1-\rho_{2s}) - J_{2D}(1-\rho_{1s})}{(1-\rho_{1s})(1-\rho_{2s})}\right](1-\rho_{1s})(1-\rho_{2s})}{\dfrac{1}{A_1F_{12}}} \quad (4.96)$$

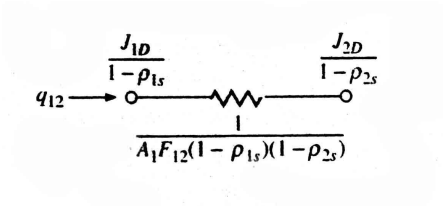
Cuối cùng có:

$$Q_{12} = \frac{\dfrac{J_{1D}}{1-\rho_{1s}} - \dfrac{J_{2D}}{1-\rho_{2s}}}{\dfrac{1}{A_1F_{12}(1-\rho_{1s})(1-\rho_{2s})}} \quad (4.97)$$

$\dfrac{J_{1D}}{1-\rho_{1s}}$ gọi là thế bức xạ có phản xạ gương của mặt 1

$\dfrac{J_{2D}}{1-\rho_{2s}}$ gọi là thế bức xạ có phản xạ gương của mặt 2

$\dfrac{1}{A_1F_{12}(1-\rho_{1s})(1-\rho_{2s})}$ gọi là nhiệt trở không gian của phản xạ gương



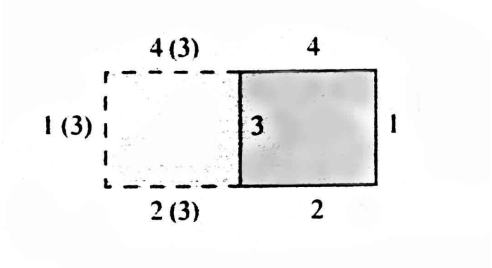

Hình 4.24. Phần tử mạng với thế bức xạ có phản xạ gương.

Công thức (4.97) được biểu thị bởi phần tử mạng trên hình 4.24.

## 4.5.3. Bức xạ của hệ thống kín có phản xạ gương

Xét hệ thống kín gồm bốn mặt 1, 2, 3, 4 trong đó các mặt 1, 2, 4 có phản xạ khuếch tán trực tiếp còn mặt 3 vừa có phản xạ khuếch tán vừa có phản xạ gương, thể hiện trên hình 3.25.

Do mặt 3 có tính chất gương nên bức xạ từ các mặt 1, 2, 4 đến mặt 3 sẽ được phản xạ lại như một tấm gương. Các tia phản xạ gương đó coi như xuất phát từ nguồn bức xạ là hình ảnh trong gương 3 biểu thị bởi đường nét đứt.



Hình 4.25

Bức xạ khuếch tán trực tiếp từ 2 đến 1 là

$$Q_{1\to 2}\ (_{\text{khuếch tán trực tiếp}}) = J_2A_2F_{21} \qquad (4.98)$$

Bức xạ khuếch tán từ 2 phản xạ qua 3 đến 1 là phản xạ gương

$$Q_{1\to 2}\ (_{\text{Phản xạ gương}}) = J_2A_{2(3)}F_{2(3)1}\rho_{3S} \qquad (4.99)$$

$F_{2(3)1}$ là hệ số góc bức xạ giữa mặt 2(3) và 1
$\rho_{3S}$ là hệ số phản xạ gương biểu thị thành phần đến từ mặt 2 trong gương 3 ký hiệu 2(3).
$A_{2(3)}$ diện tích mặt 2 trong gương 3, dĩ nhiên $A_{2(3)} = A_2$

Bức xạ tổng từ 2 đến 1 là tổng của hai thành phần trên:

$$Q_{2\to 1} = J_2A_2F_{21} + J_2A_{2(3)}F_{2(3)1}\rho_{3S} = J_2A_2(F_{21}+F_{2(3)1}\rho_{3S}) \qquad (4.100)$$

Tương tự như vậy bức xạ tổng từ 1 đến 2 là

$$Q_{1\to 2} = J_1A_1F_{12} + J_1A_{1(3)}F_{1(3)3}\rho_{1S} = J_1A_1(F_{12}+F_{1(3)2}\rho_{3S}) \qquad (4.101)$$

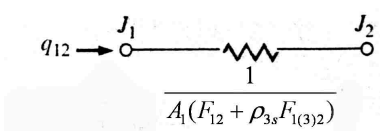
Trao đổi bức xạ của 1 và 2

$$Q_{12} = Q_{1\to 2} - Q_{2\to 1} = J_1A_1(F_{12}+F_{1(3)2}\rho_{3S}) - J_2A_2(F_{21}+F_{2(3)1}\rho_{3S}) \qquad (4.102)$$

do $A_1F_{12}= A_2F_{21}$ nên

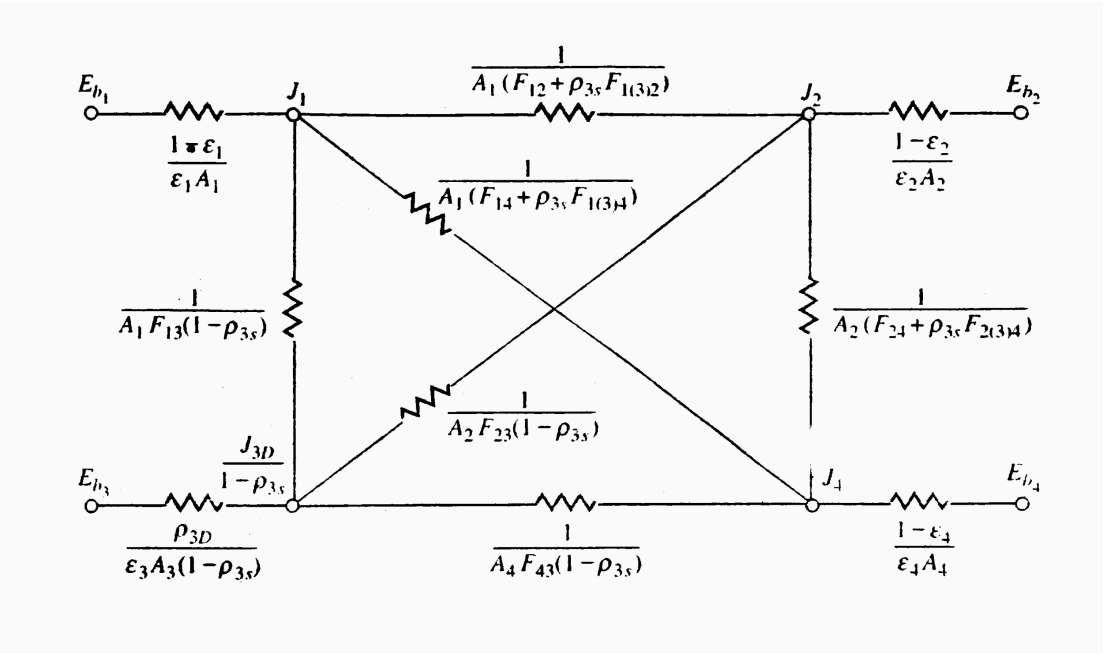
$$Q_{12} = \frac{J_1 - J_2}{\dfrac{1}{A_1(F_{12} + F_{1(3)2}\rho_{3s})}} \qquad (4.103)$$

Công thức (4.103) được biểu thị bởi phần tử mạng trên hình 4.26



Hình 4.26

Các thành phần bức xạ giữa các mặt khác có thể xây dựng bởi phần tử mạng tương tự, cuối cùng trao đổi bức xạ của hệ thống 4 mặt có một mặt phản xạ gương được biểu thị bởi sơ đồ mạng sau, hình 4.27.


$E_{b_1}$
$J_1$
$\frac{1}{A_1(F_{12}+\rho_{3s}F_{1(3)2})}$
$J_2$
$E_{b_2}$
$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}$
$\frac{1}{A_1(F_{14}+\rho_{3s}F_{1(3)4})}$
$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}$
$\frac{1}{A_1 F_{13}(1-\rho_{3s})}$
$\frac{1}{A_2(F_{24}+\rho_{3s}F_{2(3)4})}$
$\frac{1}{A_2 F_{23}(1-\rho_{3s})}$
$\frac{J_{3D}}{1-\rho_{3s}}$
$E_{b_3}$
$J_4$
$E_{b_4}$
$\frac{\rho_{3D}}{\varepsilon_3 A_3(1-\rho_{3s})}$
$\frac{1}{A_4 F_{43}(1-\rho_{3s})}$
$\frac{1-\varepsilon_4}{\varepsilon_4 A_4}$

Hình 4.27.