

Concours National Commun d'admission aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs

session 2002

Rapport pédagogique de l'épreuve de mathématiques II, filière PC

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés de l'ensemble K_n des matrices à coefficients positifs dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

Dans la première partie, on commence par l'étude du cas des matrices 2x2 puis on passe à l'étude d'un exemple particulier en dimension supérieure.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la suite des puissances d'une matrice A à coefficients strictement positifs, appartenant à K_n ainsi que sa matrice transposée ; cette étude est menée en faisant appel à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, canoniquement associé à A . On construit alors une norme sur un hyperplan H stable par f et on vérifie que l'endomorphisme induit par f sur H est une contraction ayant le vecteur nul pour unique point fixe. Ceci permet ensuite de conclure que la suite des itérés de f converge vers une projection et l'on vérifie enfin que la suite des puissances de la matrice A converge vers la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de cette projection.

Dans la troisième partie on étudie des propriétés de valeurs propres d'éléments de K_n . La première section établit que ces valeurs propres sont toutes de module inférieur ou égal à 1. Mieux, si m est le minimum des éléments diagonaux d'une matrice A appartenant à K_n , alors les valeurs propres de A se trouvent dans le disque fermé de centre m et de rayon $1-m$; on en déduit que lorsque m est strictement positif, 1 est la seule valeur propre de A de module 1, et que si $m > 1/2$, A est inversible et son inverse s'exprime comme la somme d'une série de matrices. La deuxième section consiste à montrer qu'en général, les valeurs propres de module 1 des matrices éléments de K_n sont des racines de l'unité.

La correction révèle que les connaissances de la majorité des candidats dans la partie du programme à laquelle l'épreuve fait appel ne sont pas satisfaisantes du tout. La remarque principale à relever est le manque flagrant de rigueur chez l'ensemble des candidats de cette filière ; ils se contentent de justifications superficielles et souvent trop insuffisantes ; il est aussi fort regrettable de remarquer que certains d'entre eux donnent l'impression de ne pas accorder l'importance nécessaire à la qualité de la présentation des copies et n'essayent pas de bien prendre soin de ce qu'ils rédigent.