Шта су то Операциона истраживања?

- Операциона истраживања су област науке која се бави применом квантитативних метода за решавање проблема организације и управљања сложеним системима.

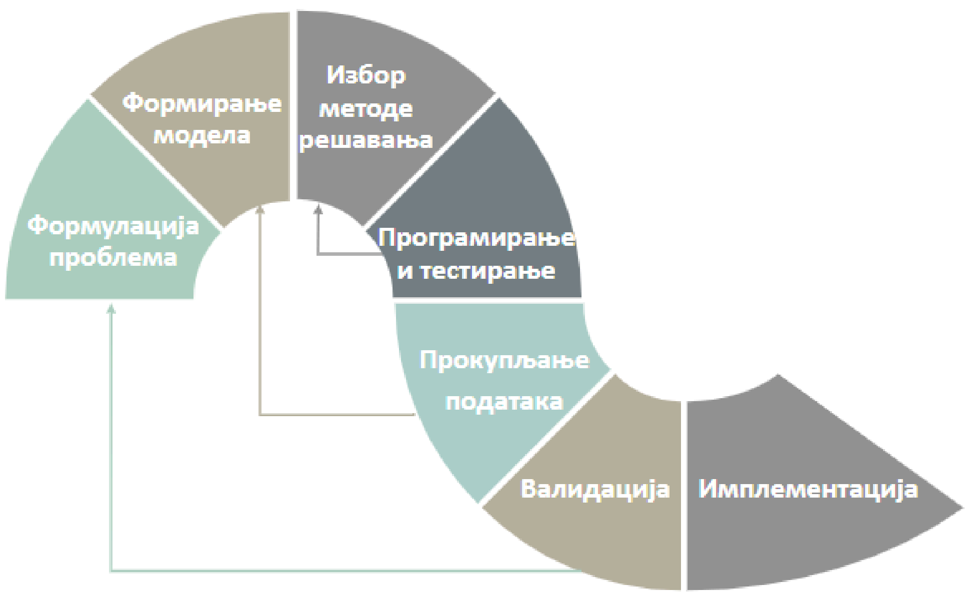
- Операциона истраживања представљају научни метод који обезбеђује квантитативну основу за одлучивање.

Morse i Kimbel

- Операциона истраживања су уметност давања лоших одговора тамо где су дати још гори одговори.

Satty

Моделирање и решавање оптимизационог проблема



Веза реалног система и математичког модела

Реалан систем		Математички модел
Управљачке одлуке	→	Управљачке променљиве
Критеријум управљања	→	Критеријумска функција, тј. функција циља
Циљ	→	
Ограничавајући фактори (ресурси, тржишна ограничења, специфични захтеви...	→	Скуп ограничења, тј. допустиви скуп
		↓
Оптималне управљачке одлуке	←	Оптимално решење, оптимална вредност функције циља

Линеарно програмирање (ЛП)

- ЛП служи за моделирање проблема тзв. условне оптимизације у којима треба наћи оптимално решење, тј. оно решење за које се постиже најбоља вредност неког циља у скупу свих могућих алтернативних решења проблема, при чему свако решање из овог скупа задовољава задате услове (ограничења)
- Придев линеарно означава да се циљ и ограничења формализују линеарним једначинама и неједначинама.
- Термин "програмирање" се употребљава као синоним за планирање.

Испитна питања

16. Структура математичких модела и њихова веза са реалним системом.

2. Општи облик задатка ЛП и његова основна својства

<u>DRUGA PREZENTACIJA</u>

ММ планирања исхране

Размислите...

Испитна питања

До сада

16. Структура математичких модела и њихова веза са реалним системом

Данас

2. Општи облик задатка ЛП и његова основна својства

17. ММ: Основни ММ планирања исхране

Општи ММ планирања исхране (основни модел 1)

Нотација:

n - број прехрамбених производа,

m - број хранљивих састојака,

x_j - непознате дневне потребе за j-тим прехрамбеним производом, $j=1,\dots,n$,

c_j - цена јединице мере j-тог прехрамбеног производа, $j=1,\dots,n$,

a_{ij} - садржај i-тог хранљивог састојка у j-том прехрамбеном производу, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$,

b_i - минимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\dots,m$,

b^*_i - максимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\dots,m$.

Минимизација трошкова

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

Ограничења везана за границе уноса

$$b_i \le \; ? \; \le b^*_i, \quad i=1,\dots,m$$

Нотација:

n - број прехрамбених производа,

m - број хранљивих састојака,

x_j - непознате дневне потребе за j-тим прехрамбеним производом, $j=1,\ldots,n$,

c_j - цена јединице мере j-тог прехрамбеног производа, $j=1,\ldots,n$,

a_{ij} - садржај i-тог хранљивог састојка у j-том прехрамбеном производу, $j=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,m$,

b_i - минимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\ldots,m$,

b^*_i - максимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\ldots,m$.

Минимизација трошкова

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

Ограничења везана за границе уноса хранљивих састојака

$$b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i^*, \quad i = 1,\ldots,m$$

Природна ограничења

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$b_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i^*, \quad i = 1,\ldots,m$$

Општи ММ планирања исхране (основни модел 2)

Нотација:

n - број прехрамбених производа,

m - број хранљивих састојака,

x_j - непознате дневне потребе за j-тим прехрамбеним производом, $j=1,\ldots,n$,

c_j - цена јединице мере j-тог прехрамбеног производа, $j=1,\ldots,n$,

a_{ij} - садржај i-тог хранљивог састојка у j-том прехрамбеном производу, $j=1,\ldots,n$, $i=1,\ldots,m$,

b_i - минимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\ldots,m$,

b^*_i - максимална свакодневна потреба организма за i-тим хранљивим састојком, $i=1,\ldots,m$.

a_j - минимално дозвољене количине прехрамбеног производа j у одређеном временском периоду, $j=1,\ldots,n$,

a^*_j - максимално дозвољене количине прехрамбеног производа j у одређеном временском периоду.

$$\min \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$b_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

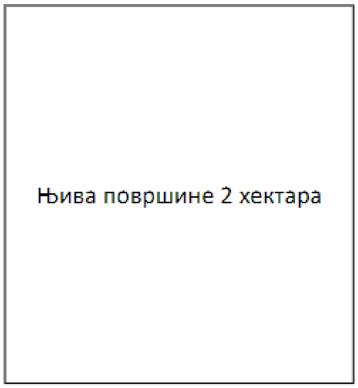
$$a_j^* \ge x_j \ge a_j, \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

<u>TRECA PREZENTACIJA</u>

Подела обрадиве површине на културе (увод)

- Овај проблем је посебно актуелан за велика пољопривредна газдинства код којих је присутна превасходно ратарска производња.

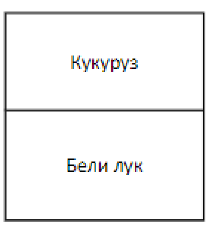


На пример, њива површине два хектара је тренутно необрађена.

Како је искористити на најбољи могући начин?

Могуће је засејати једну или више култура (пшеница, кукуруз, кромпир, лук...)

Подела обрадиве површине на културе (увод)



На њиви треба засејати једну или више култура (пшеница, кукуруз, кромпир, лук...)

Шта има смисла да буду критеријум и циљ одлучивања?
- Принос?
- Принос по хектару/ару?
- Приход/Профит? (зависи од приноса, трошкова, продајне цене)

Шта би могла да буду ограничења?
- Површина њиве
- Агротехничка ограничења
- Расположива радна снага (у разним периодима сезоне)
- Расположива механизацију (по периодима)
- Тржишна ограничења...

Управљачка променљива?
- површина на којој је треба засејати одређену културу

Подела обрадиве површине на културе (опис проблема)

- На укупној обрадивој површини треба засејати одређен број култура.
- Потребно је за сваку одређену културу одредити површину на којој је треба засејати тако да укупна остварена добит буде максимална.
- При томе водити рачуна о ограничењима која се односе на:
  - расположиву радну снагу у разним периодима сезоне;
  - расположиву механизацију по периодима;
  - агротехничка ограничења;
  - ограничења тржишта, итд.

n – број потенцијалних култура, $j=1,\dots,n$.

m – број временских периода, $i=1,\dots,m$.

o – број средстава механизације коју треба ангажовати, $l=1,\dots,o$.

x_j – површина коју треба засејати j-том културом, $j=1,\dots,n$ (на пример број ари/хектара под пшеницом).

c_j – профит (приход) од једног хектара засејаног j-том културом, $j=1,\dots,n$.

z – укупна обрадива површина (у хектарима)

b_i – расположив број радника у i-том временском периоду, $i=1,\dots,m$.

a_{ij} – број радника које треба запослити у i-том периоду на обради једног хектара засејаног j-том културом, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

q_{il} – капацитет l-тог средства механизације у i-том периоду, $i=1,\dots,m$, $l=1,\dots,o$.

r_{ilj} – потребно ангажовање l-те механизације у i-том периоду за обраду једног хектара j-те културе, $i=1,\dots,m$, $l=1,\dots,o$, $j=1,\dots,n$.

g_j и h_j – минимална и максимална површина засејана j-том културом, $j=1,\dots,n$. (агротехничка и тржишна ограничења).

Подела обрадиве површине на културе (модел)

Максимизација укупног профита (прихода, ~~приноса~~)
(c_j)

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

Ограничења везана за радну снагу (по временским периодима)
(b_i, a_{ij})

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

Ограничења везана за механизацију (по врсти механизације и у временском периоду)
(q_{il}, r_{ilj})

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj} x_j \leq q_{il}, (i = 1, 2, ..., m; l = 1, 2, ..., r)$$

Површина њиве
(z)

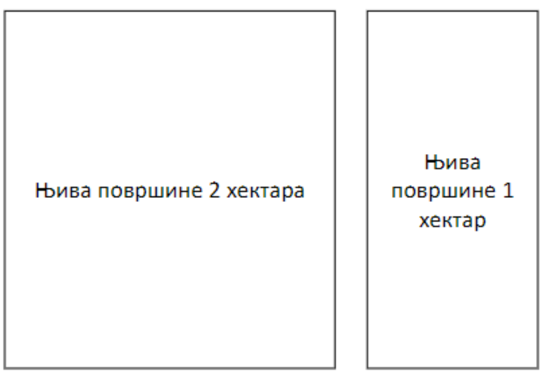
$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq z$$

Агротехничка и тржишна ограничења
(g_j, h_j)

$$g_j \leq x_j \leq h_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

Оптималан план сетве на дислоцираним њивама (увод)

- Често се обрадива површина коју треба засејати одређеним културама налази на више дислоцираних њива које су различитог квалитета и доносе различите приносе.

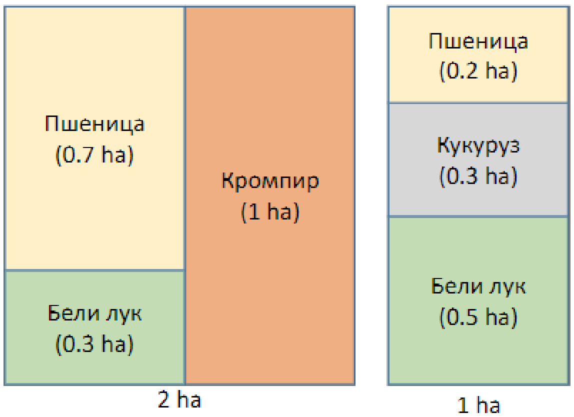


Претпоставимо да пољопривредно газдинство располаже са две њива различитог квалитета и површине 2 и 1 хектар респективно.

На овим њивама треба засејати једну или више култура (пшеница, кукуруз, кромпир, лук...)

Оптималан план сетве на дислоцираним њивама (увод)

- Пример како је могуће засејати културе на овим њивама



Сличност са претходним моделом?
- Максимизација добити (прихода)
- Расположива механизација
- Расположива радна снага
- Агротехничка/тржишна ограничења

О чему додатно треба водити рачуна?
- Површина (сваке њиве и укупна)
- Квалитет земљишта њива (утиче на принос)

Шта је сада управљачка променљива?
- Укупна површина на којој треба засејати одређену културу?
- Површина сваке њиве на којој треба засејати одређену културу?

Оптималан план сетве на дислоцираним њивама (опис проблема)

- Претпоставимо да пољопривредно газдинство располаже са неколико (рецимо *s*) њива различитог квалитета и да је обрадива површина на свакој од њих позната (p_k).
- Потребно је за сваку *j*-ту културу одредити површину коју треба засејати на *k*-тој њиви (x_{jk}) тако да се оствари максимална добит (приход).

- При томе треба водити рачуна о ограничењима која се односе на:
  - број и површину сваке од њива;
  - расположиву радну снагу у разним периодима сезоне;
  - расположиву механизацију по периодима;
  - агротехничка ограничења;
  - ограничења тржишта, итд.

n – број потенцијалних култура, j=1,…,n.

s – број њива различитог квалитета, k=1,…,s.

m – број временских периода, i=1,…,m.

o – број средстава механизације коју треба ангажовати, l=1,…,o.

x_{jk} – површина k-те њиве коју треба засејати j-том културом, j=1,…,n, k=1,…,s.

c_{jk} – профит (приход) од једног хектара j-те културе са њиве k-тог квалитета, j=1,…,n, k=1,…,s.

p_k – обрадива површина (у хектарима) њиве k-тог квалитета, k=1,…,s.

b_i – расположив број радника у i-том временском периоду, i=1,…,m.

a_{ij} – број радника које треба запослити у i-том периоду на обради хектара засејаног j-том културом, i=1,…,m, j=1,…,n.

q_{il} – капацитет l-тог средства механизације у i-том периоду, i=1,…,m, l=1,…,o.

r_{ilj} – потребно ангажовање l-те механизације у i-том периоду за обраду хектара j-те културе, i=1,…,m, l=1,…,o, j=1,…,n.

g_j и h_j – минимална и максимална површина засејана j-том културом, j=1,…,n (тржишна ограничења).

u_{jk} и v_{jk} – минимална и максимална површина k-те њиве засејана j-том културом, j=1,…,n, k=1,…,s (агротехничка ограничења).

n – број потенцијалних култура, j=1,…,n.

s – број њива различитог квалитета, k=1,…,s.

m – број временских периода, i=1,…,m.

o – број средстава механизације коју треба ангажовати, l=1,…,o.

Шта би представљала сума свих иксова по k?

Укупну површину засејану k-том културом (управљачка променљива из претходног модела)

x_{jk} – површина k-те њиве коју треба засејати j-том културом, j=1,…,n, k=1,…,s.

c_{jk} – профит (приход) од једног хектара j-те културе са њиве k-тог квалитета, j=1,…,n, k=1,…,s.

p_k – обрадива површина (у хектарима) њиве k-тог квалитета, k=1,…,s.

b_i – расположив број радника у i-том временском периоду, i=1,…,m.

a_{ij} – број радника које треба запослити у i-том периоду на обради хектара засејаног j-том културом, i=1,…,m, j=1,…,n.

q_{il} – капацитет l-тог средства механизације у i-том периоду, i=1,…,m, l=1,…,o.

r_{ilj} – потребно ангажовање l-те механизације у i-том периоду за обраду хектара j-те културе, i=1,…,m, l=1,…,o, j=1,…,n.

g_j и h_j – минимална и максимална површина засејана j-том културом, j=1,…,n (тржишна ограничења).

u_{jk} и v_{jk} – минимална и максимална површина k-те њиве засејана j-том културом, j=1,…,n, k=1,…,s (агротехничка ограничења).

Максимизација укупног профита (прихода, ~~приноса~~) (c_{jk})

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{jk}x_{jk}$$

п.о.

Ограничења везана за радну снагу (по временским периодима) (b_i, a_{ij})

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{s} x_{jk}) \le b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

Ограничења везана за механизацију (по врсти механизације и у временском периоду) (q_{il}, r_{ilj})

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj}(\sum_{k=1}^{s} x_{jk}) \le q_{il}, (i = 1, 2, ..., m; l = 1, 2, ..., r)$$

Површине њива (p_k)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} \le p_k, (k = 1, 2, ..., s)$$

Тржишна ограничења (g_j, h_j)

$$g_j \le \sum_{k=1}^{s} x_{jk} \le h_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

Агротехничка ограничења (u_{jk}, v_{jk})

$$u_{jk} \le x_{jk} \le v_{jk}, (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., s)$$

Модел са једном наспрам модела са више дислоцираних њива

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boxed{x_j} \le b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj}\boxed{x_j} \le q_{il}, (i = 1, 2, ..., m; l = 1, 2, ..., r)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le z$$

$$g_j \le \boxed{x_j} \le h_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} c_{jk}x_{jk}$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boxed{(\sum_{k=1}^{s} x_{jk})} \le b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ilj}\boxed{(\sum_{k=1}^{s} x_{jk})} \le q_{il}, (i = 1, 2, ..., m; l = 1, 2, ..., r)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} \le p_k, (k = 1, 2, ..., s)$$

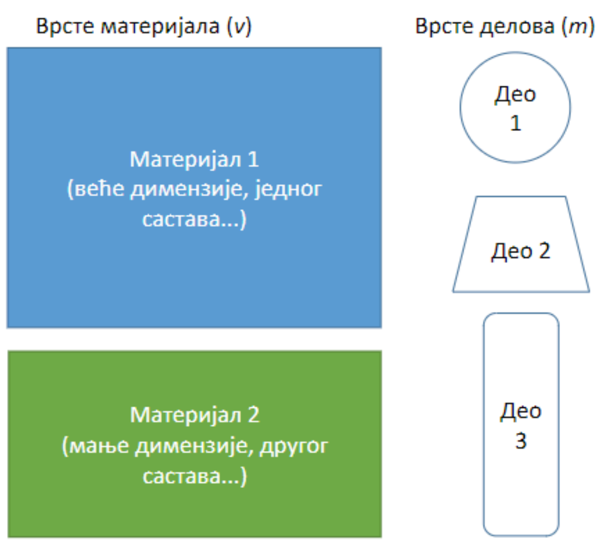
$$g_j \le \boxed{\sum_{k=1}^{s} x_{jk}} \le h_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

$$u_{jk} \le x_{jk} \le v_{jk}, (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., s)$$

Оптимизација утрошка материјала (опис проблема)

- Производно предузеће обрађује материјал одређеног облика и димензија и из њега сечењем добија више врста делова.
- На пример:
  - кројење делова за намештај из табли иверице, медијапана и слично;
  - сечење делова аутомобилске каросерије из табли лима;
  - кројење делова одеће од штофа;
  - ...
- О чему треба размишљати?
- Шта има смисла да буде у функцији циља?
- Шта има смисла да буде управљачка променљива?
- Кројне листе (предефинисани начини сечења)

Оптимизација утрошка материјала (опис проблема)



Шта је познато?

- Број врста материјала (два)
- Количина сваке врсте материјала (*)
- Број типова делова које треба искројити (три)
- Потребна количина сваког од делова (*)

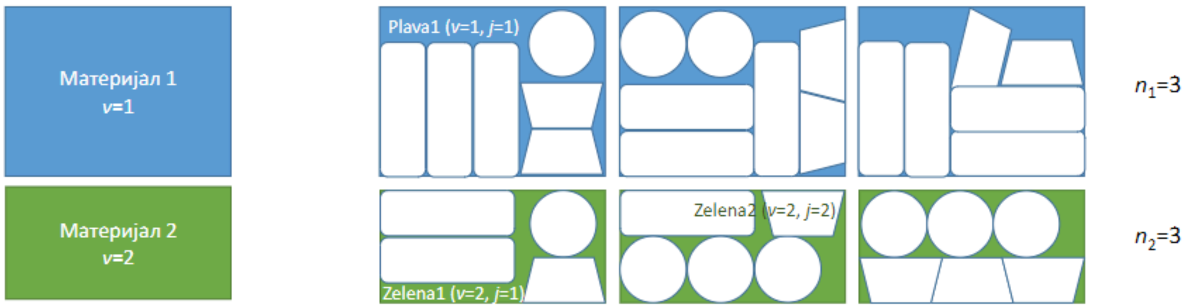
Како се могу делови искројити из датих материјала?

➢ Предефинисане кројне шеме

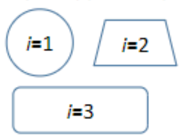
Оптимизација утрошка материјала (опис проблема)

Врсте материјала (v=1,..,s)

Кројне шеме (j=1,...,n_v)



Врсте делова (i=1,..,m)



Познати су s и m и њихове количине, као и број варијанти кројења n_v

Познати су c_{jv} (отпадак за ∀ шаблон) и a_{ijv} (број свих делова из ∀ шаблона)

Потребно је одредити колико ће ког материјала бити исечено по којој шеми кројења, при чему укупна количина отпадака треба да буде минимална.

Ограничавајући фактори?

Оптимизација утрошка материјала (опис проблема)

- Под оптималним утрошком материјала у остваривању одређене производње подразумева се такво искоришћење материјала да укупан губитак буде минималан.
- Када се ради о утрошку једног истог материјала одређених димензија (табле лима, табле шпер плоче, ролне траке, цеви и шипке итд.), проблем који се поставља код његовог кројења или сечења састоји се у минимизацији отпадака.
- Треба водити рачуна о:
  - Укупном расположивој количини сваког од материјала
  - Количини сваке од врста делова које треба искројити
  - Предефинисаним кројним шаблонима
- Потребно је одредити колико ће ког материјала бити исечено по којој шеми кројења, при чему укупна количина отпадака треба да буде минимална.

Оптимизација утрошка материјала (нотација)

s – број врста материјала од ког се секу делови, v=1,...,s.

m – број врста делова које треба производити, i=1,…,m.

n_v – број предефинисаних начина кројења материјала v, j=1,…, n_v.
(нпр. n_1 је број предефинисаних начина кројења материјала врсте 1)

x_{jv} – количина материјала v-те димензије који ће бити искројен по j-тој шеми сечења, v=1,...,s, j=1,…,n.

z_v – количине залиха материјала v -те врсте, v=1,...,s.

b_i – потребна количина делова i-тог типа коју треба произвести, i=1,…,m,

a_{ijv} – број делова i-тог типа који се добијају из материјала v-те димензије када је искројен по j-тој варијанти сечења, j=1,…,n, i=1,…,m, v=1,...,s.

c_{jv} – количина отпадака која се добије када се јединица материјала v исече по варијанти j, j=1,…,n, v=1,...,s.

h_{jv} – максимална количина материјала v-те димензије која може бити искројена по j-тој варијанти, j=1,…,n, v=1,…,s.

Оптимизација утрошка материјала (модел)

Минимизација укупног отпадка при кројењу (сечењу) (c_{jv})

$$\min f(x) = \sum_{v=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} c_{jv} x_{jv}$$

п.о.

Ограничења везана за расположиве материјале (z_v)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jv} \le z_v, (v = 1, 2, ..., s)$$

Ограничења везана за делове које треба искројити (b_i, a_{ijv})

$$\sum_{v=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ijv} x_{jv} = b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

Ограничења везана за материјале које треба искројити по одређеној варијанти (h_{jv})

$$0 \le x_{jv} \le h_{jv}, (j = 1, 2, ..., n; v = 1, 2, ..., s)$$

Основни ММ планирања исхране (опис проблема)

- Примена ЛП у планирању исхране спада међу прве примене математичког програмирања (Стиглер 1945).
- Најчешће примене су у системима „масовне” исхране људи (нпр. исхрана у војним, студентским, радничким, болничким и сл. ресторанима).
- На основу категоризације психофизичких напрезања људи за које треба направити план исхране, дефинишу се минималне (и/или максималне) потребе за хранљивим састојцима у јединици времена (дневне, седмичне, по оброку...)
- Разни прехрамбени производи садрже одређене градивне, енергетске и заштитне хранљиве састојке у различитим односима.
- Потребно је направити план набавке намирница које ће се користити у формирању јеловника који задовољава СВЕ захтеве, а да укупни трошак набавке намирница буде минималан.

Основни ММ планирања исхране (нотација)

n – број прехрамбених производа (намирница),

m – број хранљивих састојака,

x_j – количина j-те намирнице коју треба укључити у исхрану (набавити) за плански период, $j=1,\dots,n$,

c_j – цена јединице мере j-те намирнице, $j=1,\dots,n$,
(нпр. цена једног јајета је 12 динара)

a_{ij} – садржај i-тог хранљивог састојка у j-тој намирници, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$,
(нпр. 1кг купуса садржи 56 мг витамина Ц)

b_i – минимална количина i-тог хранљивог састојка коју треба унети у планском периоду, $i=1,\dots,m$,

b^*_i – максимална количина i-тог хранљивим састојка коју треба унети у планском периоду, $i=1,\dots,m$.

a_j – минимално дозвољене количине прехрамбеног производа j у планском периоду, $j=1,\dots,n$,

a^*_j – максимално дозвољене количине прехрамбеног производа j у планском периоду, $j=1,\dots,n$,

Основни ММ планирања исхране (модел)

Минимизација трошкова
(c_j)

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

Ограничења везана за границе уноса хранљивих састојака
(b_i, b_i^*, a_{ij})

$$b_i^* \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ограничења везана за количине намирница
(a_j, a_j^*)

$$a_j^* \geq x_j \geq a_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Природна ограничења
(укључена су у друго ограничење)

Избор оптималног асортимана (опис проблема)

- Један од основних модела ЛП.
- Посматрамо (нпр.) производни систем са дефинисаним скупом производа које је могуће произвести, при чему располажемо са више категорија ограничених ресурса (машине, радна снага, сировине, итд.).
- Потребно је одредити колико ког производа производити у неком временском периоду, а да укупна добит од производње буде максимална.

Избор оптималног асортимана (нотација)

n – број производа који се могу производити, j=1,…,n.
m – број типова машина на којима се производи обрађују, i=1,…,m.
q – број категорија радника који учествују у производњи, k=1,…,q.
s – број врста ресурса који се користе за производњу, v=1,…,s.
x_j – количина j-те врсте производа коју треба производити, j=1,…,n,
d_j – добит (приход) по јединици производа j, j=1,…,n.
a_{ij} – време обраде j-тог производа на машини i, j=1,…,n, i=1,…,m.
b_i – капацитет i-те врсте машина (у временским јединицама), i=1,…,m,
c_{kj} – време обраде j-тог производа од стране радника k-те категорије, j=1,…,n, k=1,…,q.
l_k – расположиво време радника k-те категорије k=1,…,q.
g_{vj} – количина v-те сировине потребна за производњу j-тог производа, j=1,…,n, v=1,…,s.
h_v – расположива количина v-те врсте сировине, v=1,…,s,
e_j и z_j – минимална и максимална количина производа j, j=1,…,n (тржишна ограничења).

Избор оптималног асортимана (модел)

Максимизација профита (прихода)
(d_j)

$$(\max) f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

п.о.

Ограничења везана за капацитет машина
(b_i, a_{ij})

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = 1, 2, ..., m)$$

Ограничења везана за капацитет радника
(l_k, c_{kj})

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \le l_k, (k = 1, 2, ..., q)$$

Ограничења везана за расположивост сировина
(h_v, g_{vj})

$$\sum_{j=1}^{n} g_{vj} x_j \le h_v, (v = 1, 2, ..., s)$$

Тржишна ограничења
(e_j, z_j)

$$e_j \le x_j \le z_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

Оптимално проширење капацитета (опис проблема)

- За случај када програми производње имају дугорочан карактер, а стручна радна снага, сировине и материјал за производњу нису ограничени, као један од најактуелнијих проблема за решавање може се појавити оптимално искоришћење ограниченог капацитета машина.
- Задатак који у том случају треба решавати може да се састоји и у изналажењу оптималног проширења капацитета машина, како би се остварио оптимални програм производње.
- Под проширењем капацитета подразумева се набавка нових машина.
- Поред ограничених инвестиционих средстава, други ограничавајући фактор који може да утиче на проширење капацитета односи се на смештајни простор (ограничена расположива радна површина).
- Циљ је да се утврди оптимални асортиман и број нових машина одређеног типа које треба набавити, у циљу максимизације профита умањеног за трошкове амортизације нових машина.

Оптимално проширење капацитета (нотација)

n – број производа који се могу производити, $j=1,\dots,n$.

m – број типова машина чија се набавка разматра, $i=1,\dots,m$.

x_j – количина j-те врсте производа коју треба производити, $j=1,\dots,n$,

y_i – број машина i-те врсте које треба докупити, $i=1,\dots,m$.

d_j – добит (приход) по јединици производа j, $j=1,\dots,n$.

q_i – трошкови амортизације нове машине i-тог типа, $i=1,\dots,m$.

a_{ij} – време обраде j-тог производа на машини i, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$.

b_i – постојећи капацитет i-те врсте машина (у временским јединицама), $i=1,\dots,m$,

a_i – капацитет једне нове машине i-тог типа, $i=1,\dots,m$.

c_i – набавна цена једне нове машине i-тог типа, $i=1,\dots,m$.

C – расположиви буџет за набавку нових машина.

p_i – површина потребна за једну нову машину i-тог типа, $i=1,\dots,m$.

P – расположива површина за смештање нових машина.

Оптимално проширење капацитета (модел)

Максимизација профита (прихода) умањеног за трошкове амортизације
(d_j, q_i)

$$\max f(x,y)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j-\sum_{i=1}^{m} q_i\, y_i$$

п.о.

Ограничења везана за капацитет машина
(b_i, a_i, a_{ij})

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + a_i y_i, (i=1,2,\dots,m)}$$

Ограничења везана за расположиви буџет
(C, c_i)

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \le C$$

Ограничења везана за расположиви простор
(P, p_i)

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i \le P$$

Природна ограничења

$$x_j \ge 0, (j=1,2,\dots,m)$$

$$y_i \ge 0, (i=1,2,\dots,n)$$

Максимизација профита (прихода) умањеног за трошкове амортизације

$$\max f(x,y)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j-\sum_{i=1}^{m} q_i\, y_i$$

п.о.

Ограничења везана за капацитет машина

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - a_i y_i \le b_i, (i=1,2,\dots,m)}$$

Ограничења везана за расположиви буџет

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_i \le C$$

Ограничења везана за расположиви простор

$$\sum_{i=1}^{m} p_i y_i \le P$$

Природна ограничења

$$x_j \ge 0, (j=1,2,\dots,m)$$

$$y_i \ge 0, (i=1,2,\dots,n)$$

Усклађивање програма производње (опис проблема)

- Више предузећа која производе исте производе су се сагласила да ускладе своје програме производње једног броја артикала ради повећања заједничког профита.
- Неке врсте ресурса предузећа деле (нпр. сировине, полупроизводе, итд.), док друге користи свако своје (нпр. машине, производне линије, и сл.).

- Потребно је одредити колико ког артикла производити у сваком од удружених предузећа, водећи рачуна о ограниченим ресурсима, да би укупна добит била максимална.

Усклађивање програма производње (нотација)

p – број предузећа која желе да ускладе своју производњу, $k=1,\ldots,p$.

n – број производа (артикала) који се производе у предузећима, $j=1,\ldots,n$.

m – број типова машина на којима се производи обрађују, $i=1,\ldots,m$.

s – број врста сировина (материјала) који се користе за производњу, $v=1,\ldots,s$.

x_{jk} – количина j-те врсте производа коју треба производити у k-том предузећу, $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,p$.

d_{jk} – добит (приход) по јединици производа j у k-том предузећу, $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,p$.

a_{ik} – расположиви капацитет i-те врсте машине у k-том предузећу, $i=1,\ldots,m$, $k=1,\ldots,p$.

q_{ijk} – време потребно да се у k-том предузећу обради јединица производа j на i-тој машини, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,p$.

b_v – укупна расположива (за сва предузећа) количина v-те врсте сировине/материјала, $v=1,\ldots,s$,

d_{jkv} – количина v-тог материјала потребног да се у k-том предузећу произведе јединица j-тог производа, $j=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,q$, $v=1,\ldots,s$.

c_j – максимална количина j-тог производа која се може пласирати на тржишту, $j=1,\ldots,n$.

Усклађивање програма производње (модел)

Максимизација укупног профита (прихода) свих предузећа (d_{jk})

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} d_{jk} x_{jk}$$

п.о.

Ограничења везана за капацитет машина у сваком од предузећа (a_{ik}, a_{ijk})

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{jk} \le a_{ik}, (i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., p)$$

Ограничења везана расположиву сировину (заједнички ресурс) (v_v, b_{jkv})

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} b_{jkv} x_{jk} \le b_v, (v = 1, 2, ..., s)$$

Тржишна ограничења (c_j)

$$\sum_{k=1}^{p} x_{jk} \le c_j, (j = 1, 2, ..., n)$$

Природна ограничења

$$x_{jk} \ge 0, (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., p)$$

Управљање залихама (опис проблема)

При томе:

- Тражња у сваком периоду мора бити задовољена
- Постоји ограничење ресурса за производњу свих производа
- Трошкови складиштења не морају да буду исти у свим периодима, а ни за сваки производ
- Расположиви ресурси не морају да буду исти у свим периодима

Колико производити сваког производа у сваком кварталу да би укупни трошкови складиштења били минимални?

Управљање залихама (нотација)

n – број производа који се могу производити, j=1,…,n.

s – број једнаких временских интервала, k=1,…,s.

m – број типова машина, i=1,…,m.

x_{jk} – количина j-те врсте производа коју треба произвести у k-том временском периоду, j=1,…,n, k=1,…,s.

p_{jk} – потражња за j-тим артиклом у k-том временском периоду, j=1,…,n, k=1,…,s.

c_{jk} – трошкови складиштења j-тог производа у k-том временском периоду, j=1,…,n, k=1,…,s.

a_{ij} – време потребно за обраду j-тог производа на i-тој машини, i=1,…,m, j=1,…,n.

b_{ik} – капацитет i-те машине у k-том временском периоду, i=1,…,m, k=1,…,s.

Управљање залихама (модел)

Минимизација укупних трошкова складиштења (c_{jk}, p_{jv})

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} c_{jk} \left[\sum_{v=1}^{k} (x_{jv} - p_{jv}) \right]$$

п.о.

Ограничења везана за тражњу (p_{jv})

$$\sum_{v=1}^{k} (x_{jv} - p_{jv}) \geq 0, (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., s)$$

Ограничења везана за капацитете машина (b_{ik}, a_{ij})

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jk} \leq b_{ik}, (i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., s)$$

Природна ограничења

$$x_{jk} \geq 0, (j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., s)$$

Оптимизација производње крмних смеша

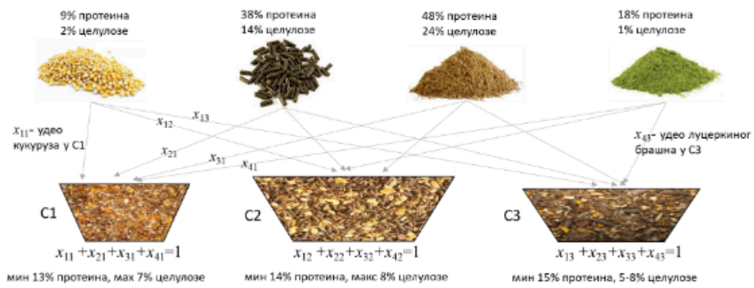
- Крмне смеше - производи добијени мешањем хранива (сировина), служе као потпуна или допунска храна за домаће животиње.
- Свака крмна смеша треба да у прописаним количинама садржи одређене хранљиве компоненте: протеине, суву материју, масти, целулозу, минералне материје, витамине итд.
- Претпоставимо да фабрика строчне хране треба да произведе у планском периоду фиксну количину појединих крмних смеша. Потребно је одредити који однос треба помешати у свакој смеши да би укупни трошкови производње крмних смеша били минимални.

Оптимизација производње крмних смеша

На пример: фарма треба да направи план производње за: 500 кг смеше за почетни тов пилића (C1), 2000 кг смеше за завршни тов пилића (C2) и 800 кг смеше за конзумне носиље (C3). На располагању су следећа 4 основна хранива: кукуруз – 3000 кг, сунцокретова сачма – 1000 кг, месно коштано брашно – 200 кг и луцеркино брашно - 300 кг.

Оптимизација производње крмних смеша

На пример: фарма треба да направи план производње за: 500 кг смеше за почетни тов пилића (C1), 2000 кг смеше за завршни тов пилића (C2) и 800 кг смеше за конзумне носиље (C3). На располагању су следећа 4 основна хранива: кукуруз – 3000 кг, сунцокретова сачма – 1000 кг, месно коштано брашно – 200 кг и луцеркино брашно - 300 кг.



Колика ће бити количина кукуруза у C2?

$2000{\cdot}x_{12}$

Колика ће бити укупно утрошена количина кукуруза?

$500{\cdot}x_{11} + 2000{\cdot}x_{12} + 800{\cdot}x_{13}$

Ако са x_{jk} означимо процентуално учешће (удео) *j*-тог хранива у *k*-тој смеши а са q_k потребну количину *k*-те смеше, како изгледа укупно утрошена количина *j*-тог хранива?

$$\sum_{k=1}^{s} q_k \cdot x_{jk}$$

Оптимизација производње крмних смеша

n - број врста хранива која се користе за справљање крмних смеша, $j=1,\dots,n$.

s - број врста крмних смеша које се производе, $k=1,\dots,s$.

m - број храњивих састојака чије се учешће у крмним смешама контролише, $i=1,\dots,m$.

x_{jk} - процентуално учешће *j*-тог хранива у јединици *k*-те крмне смеше, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,s$.

q_k - планирана производња *k*-те крмне смеше, $k=1,\dots,s$.

c_j - цена *j*-тог хранива, $j=1,\dots,n$.

a_{ij} - садржај *i*-тог храњивог састојка у *j*-том храниву, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

d_{ik}, b_{ik} - доња и горња граница учешћа *i*-тог храњивог састојка у *k*-тој смеши,

z_j - залихе *j*-тог хранива, $j=1,\dots,n$.

u_{jk}, v_{jk} - минимално и максимално процентуално учешће *j*-тог хранива у *k*-тој смеши, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,s$.

Оптимизација производње крмних смеша

Минимизација укупне цене смеша (c_j, q_k)

$$\min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \boxed{(\sum_{k=1}^{s} q_k x_{jk})}$$

Употребљена количина j-тог хранива

п.о.

Ограничења везана за процентуално учешће храњљивих компоненти у свим смешама (d_{ik}, b_{ik}, a_{ij})

$$d_{ik} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jk} \le b_{ik}, (i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, s)$$

Ограничења везана за укупно процентуално учешће храњљивих компоненти у смешама

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jk} = 1, (k = 1, 2, \ldots, s)$$

Ограничења везана за расположиве количине хранива (z_j, q_k)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{s} q_k x_{jk}} \le z_j, (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ограничења везана за процентуално учешће храњљивих компоненти сваког од смеша (u_{jk}, v_{jk})

$$u_{jk} \le x_{jk} \le v_{jk}, (j = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, s)$$

Испитна питања

До сада

2. Општи облик задатка ЛП и његова основна својства
16. Структура математичких модела и њихова веза са реалним системом
17. ММ: Основни ММ планирања исхране
18. ММ: Подела обрадиве површине на културе
19. ММ: Оптималан план сетве на дислоцираним њивама
21. ММ: Избор оптималног асортимана
22. ММ: Оптимизација утрошка материјала
24. ММ: Усклађивање програма производње
25. ММ: Оптимално проширење капацитета

<u>CETVRTA PREZENTACIJA</u>

Размислите

- Да ли је линеарна функција конвексна функција?
  - ДА!
- Да ли је допустива област ограничена линеарним функцијама конвексан скуп?
  - Зависи од облика!

- Зашто је важно то разумети?
  - Зато што у случају када је допустиви скуп конвексан и када је функција циља конвексна, оптимално решење је уједно и глобални оптимум!

Данас

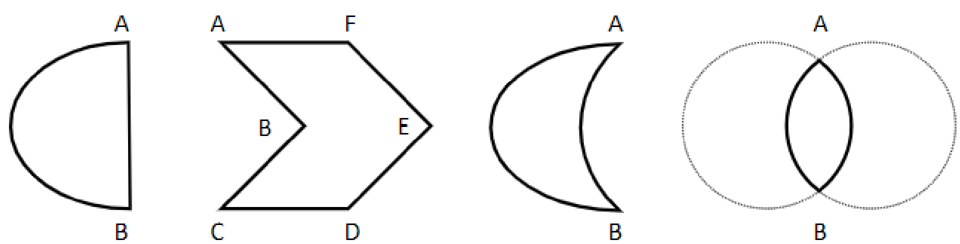
1. Конвексност скупа и функција и дефиниција глобалног и локалног оптимума.
2. Општи облик задатка ЛП и његова основна својства

9. Могући исходи симплекс методе: јединствено оптимално решење и неограничена функција циља (графичка и алгебарска интерпретација).

10. Могући исходи симплекс методе: вишеструко оптимално решење и празна допустива област (графичка и алгебарска интерпретација).

Подсећање

Скуп



Ковексан?	✓	✗	✗	✓
Екстремне тачке?	Темена A, B и лук AB	Темена A, C, D, E, F	Темена A, B и већи лук AB	Темена A, B и лукovi AB

PETA PREZENTACIJA

Налажење бољег суседног базног допустивог решења

Важне напомене!

- База увек има исти број елемената
- Две суседне базе се разликују тачно за једну променљиву
- Ако нека променљива уђе у базу (постане базна), нека друга треба да изађе из базе (постане небазна)

- Како одлучујемо која променљива улази у базу, а која излази из базе?
- У базу улази она небазна променљива која највише доприноси побољшању функције циља!

- Након провере оптималности могућа су два случаја
  - Текуће решење је оптимално – задатак је решен и потребно је прочитати решење (вредности свих променљивих, вредност функције циља)
  - Текуће решење није оптимално – нова пивот трансформација, прелазак у ново базно решење и провера његове оптималности. Овај поступак се понавља све док текуће решење није оптимално

Проширени критеријум уласка променљиве у базу

- Прост критеријум уласка променљиве у базу базира се на највећем ЈЕДИНИЧНОМ прираштају функције циља
- Шта се дешава у случају када имамо два иста највећа јединична прираштаја?
- Користимо проширени критеријум уласка променљиве у базу који се базира на УКУПНОМ прираштају
- Проширени критеријум може увек да се користи, јер у неким ситуацијама смањује број итерација

- Вратимо се на почено решење претходног задатка

Испитна питања

Данас

6. Тест оптималности допустивог базног решења на основу одговарајућег каконског облика проблем ЛП

7. Одређивање новог канонског облика, тј. Налажење бољег суседног базног допустивог решења

<u>SESTA PREZENTACIJA</u>

Неколико особина Методе великог М

- Симплекс метода ће се одвијати у две фазе:
  1. Избацивање вештачких променљивих из базе док се не дође у допустиво базно решење. Број итерација у овој фази једнак је броју вештачких променљивих у почетном канонском моделу
  2. Оптимизација полазног проблема и достизање оптималног решења

- Довољно је увести вештачке променљиве само у она ограничења у којима не постоји нека друга променљива која може бити у почетној бази (код ограничења типа = и ≥).
- Кад вештачка променљива изађе из базе, не може се више вратити, и може се изоставити из даље процедуре

Коначност Симплекс методе

- Ако би у свакој итерацији Симплекс методе, допустиво базно решење било недегенерисано, тада би се у свакој итерацији вредност функције циља строго повећавала (у случају максимизације), односно сва добијена решења би била различита
- С обзиром да је број допустивих базних решења коначан (својство опшег задатка ЛП), метода би кроз коначно много итерација дошла до оптималног решења или до закључка да оно не постоји (било због неограничености функције циља, било због празне допустиве области)

- Ако се у некој итерацији Симплекс методе јави дегенерисано решење, тада постоји опасност да се симплекс метода „заглави“ у дегенерисаном темену
  - Из итерације у итерацију прелази се из дегенерисаног у дегенерисано базно решење, а сва та дегенерисана базна решења представљају исто дегенерисано теме
  - Појава позната као циклирање
- Неке од техника за превазилажење појаве циклирања
  - Блендово правило
  - Лексикографско правило
  - Случајан избор промењљивих

Рачунска сложеност алгоритма

- Рачунска сложеност алгоритма – Укупна број елементарних корака које треба реализовати да би се дошло до решења постављеног проблема
- Број елементарних корака неке процедуре зависи од количине улазних података, од дужине или димензије проблема
- Размотримо неки проблем димензије L и неки алгоритам A који га решава. Нека је E укупан број елементарних корака потребних да алгоритам A реши дати проблем.
- Ако за свако L важи да је $E \leq C \cdot f(L)$, где је C нека константа већа од 0, тада се каже да алгоритам A има сложеност $O(f(L))$

Рачунска сложеност алгоритма

Полиномијални вс. Експоненцијални алгоритми?

- Полиномијални алгоритми
  - Уколико функција $f(L)$ представља полином по L
  - Рачунски ефикасни алгоритми
- Експоненцијални алгоритми
  - Алгоритми код којих број елементарних корака, па самим тим и време решавања проблема, у најгорем случају расте експоненцијално
  - Често не могу у разумном времену да реше проблеме већих димензија

Сложеност проблема

Сложеност проблема једнака је сложености „најбољег“ алгоритма при решавању „најгоре“ варијанте тог проблема

- Према сложености, проблеми се грубо могу поделити у две групе:
  - Лаки проблеми – за решавање ових проблема познати су полиномијални алгоритми. Те проблеме зовемо полиномијални проблеми
  - Тешки проблеми – за решавање ових проблема познати су искључиво експоненцијални алгоритми

Рачунска сложеност Симплекс методе?

- Сложеност је $O(f(L))$, где је $f(L)$ укупан број елементарних корака
- Размотримо проблем са n промењљивих и m ограничења
  - У свакој итерацији симплекс методе изврши се mn аритметичких операција
  - Колико итерација је теоријски могуће? Онолико колико има базних решења, а то је у најгорем случају $\binom{n}{m}$

  $\rightarrow$ Укупан број елементарних корака је $mn\binom{n}{m}$

$\Rightarrow$ Симплекс метода је експоненцијални алгоритам

- Ипак, симплекс метода показује „добро понашање“ у већини реалних ЛП проблема. У пракси је за налажење оптималног решења потребно између m и $3m$ итерација

SEDMA PREZENTACIJA

- Два примера симетричних полазних модела, са истим бројем промењивих и ограничења
- Сложеност решавања није иста
- Да ли постоји начин да се Пример 1 (сва ограничења типа ≥) „трансформише“ тако да му сва ограничења буду типа ≤?
  - Не можемо ограничења да множимо са -1 јер би КСЧ постало негативно!
- Одговор је ДУАЛНИ модел

Трансформација примала у дуал

(симетричан примал)

Примал (симетричан)

$$(\min)\ f(x) = 40x_1 + 50x_2$$

п.о.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq \boxed{180} & \leftarrow y_1 \\ 2x_1 + 7x_2 &\geq 140 & \leftarrow y_2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 90 & \leftarrow y_3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Дуал (симетричан)

$$(\max)\ \phi(y) = \boxed{180y_1 + 140y_2 + 90y_3}$$

Примал	Дуал
x , $f(x)$	y , $\phi(y)$
Минимизација	Максимизација
c, b, A	b, c, A^T
$\geq$	$\leq$

Својство симетрије: Дуал дуала је примал.

Примал (симетричан)

$$(\min)\ f(x) = 40x_1 + 50x_2$$

п.о.

$$3x_1 + 4x_2 \geq 180$$
$$2x_1 + 7x_2 \geq 140$$
$$2x_1 + x_2 \geq 90$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Дуал (симетричан)

$$(\max)\ \phi(y) = 180y_1 + 140y_2 + 90y_3$$

п.о.

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\leq 40 & \leftarrow x_1 \\ 4y_1 + 7y_2 + 1y_3 &\leq 50 & \leftarrow x_2 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Трансформација примала у дуал

(општи облик примала – не нужно симетричан)

Формирање дуала у општем случају

- Модел који није написан у симетричном облику се може на два начина превести у дуал
  - Превођењем најпре у симетрични облик (варијанта 1)
  - Директно из општег облика (варијанта 2)
- Код директног превођења, постоји веза између знака у ограничењима примала и вредности које дуална променљива може да узме
  - Подсетимо се, код варијанте 1, све прималне и дуалне променљиве су ненегативне
  - Код примене варијанте 2, не морају све дуалне променљиве да буду ненегативне!

Правила за формирање дуала у општем случају

Примал	Дуал
x , $f(x)$	y , $\phi(y)$
c, b, A	b, c, A^T
максимизирати $F(x)$ (или $\Phi(y)$)	минимизирати $\Phi(y)$ (или $F(x)$)
Ограничење i примала (или дуала)	Променљива y_i (или x_i)
типа $\leq$	ненегативна
типа $\geq$	непозитивна
типа $=$	неограничена по знаку
Променљива x_j (или y_j)	Ограничење j дуала (или примала)
ненегативна	типа $\geq$
непозитивна	типа $\leq$
неограничена по знаку	типа $=$

Остала својства дуалности

- Слаба дуалност
- Јака дуалност
- Допустивост и оптималност
- Ограниченост и допустивост решења
- Вишеструкост и дегенерисаност

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Слаба дуалност: Ако је x_j допустиво решење примала, а y_i допустиво решење дуала, тада је $f(x) \geq \phi(y)$.

Јака дуалност: Примал има оптимално решење ако и само ако дуал има оптимално решење, при чему су оптималне вредности функција циља ова два проблема једнаке.

Допустивост и оптималност: Ако је x допустиво решење примала које није оптимално и $f(x) = \phi(y)$, тада тачка y није допустиво решење дуала.

Ограниченост и допустивост:	1. Ако је функција циља примала неограничена одозго на његовој допустивој области, тада је допустива област дуала празна. 2. Ако је функција циља дуала неограничена одоздо на његовој допустивој области, тада је допустива област примала празна

Вишеструкост и дегенерисаност:	Ако је оптимално решење примала вишеструко, тада је оптимално решење дуала дегенерисано (и обрнуто).

Економска интерпретација дуалног решења

Ако је примал ММ расподеле ограничене количине ресурса

- Потребно је максимизирати профит
- Постоји ограниченост ресурса

$$(\max) f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, \ldots, m)$$

- Да ли се оптимално решење примала може побољшати?
  - Са расположивом количином ресурса не може
  - Повећањем количине неког ресурса!

- Дуалне променљиве: Обрачунске цене (*shadow prices*)
  - Представљају јединични прираштај функције циља примала при повећању ресурса, али само у количини у којој се не би променила структура оптималног решења дуала
- Ако би се расположива количина *i*-тог ресурса повећала за одређену вредност ε, оптимална вредност функције циља f^* би се повећала за εy_i^*.
- Функција циља дуалног проблема се може тумачити као минимална укупна цена по којој би се исплатило продати расположиве ресурсе уместо да се обави производња