УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя оргкомитета
III (областного) этапа республиканской
олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилёвского облисполкома
_____________ С. В. Леонова
ноября 2011 года

Задания для II этапа республиканской олимпиады по математике

19 ноября 2011 года

9 класс

1. Доказать, что при любых значениях a и b неравенство $\left(a^3+a^2b\right)x^2+b^2x-a+b\geq 0$ имеет решения.

2. Словами *АЛЕКСАНДРА* и *МИХАИЛ* зашифрованы некоторые два натуральных числа, при этом каждая буква обозначает некоторую цифру. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры. Известно, что среди различных букв, составляющих эти слова, найдутся ровно две буквы, которые обозначают одну и ту же цифру. Определить эту пару различных букв, которые обозначают одну и ту же цифру и найти эту цифру, если суммы цифр чисел *АЛЕКСАНДРА* и *МИХАИЛ* равны соответственно 57 и 41.

3. Решить уравнение: $\dfrac{x^3+\sqrt{3}(x-2)(x+1)-2x-3}{\sqrt{2}x-\sqrt{3}-1}=0$.

4. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 попарно касаются друг друга. В треугольник $O_1O_2O_3$ вписана окружность ω. К окружности ω проведены три касательные. Первая касательная проходит параллельно отрезку O_2O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_1O_3 в точках A_1 и B_1 соответственно. Вторая касательная проходит параллельно отрезку O_1O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_2O_3 в точках A_2 и B_2 соответственно. Третья касательная проходит параллельно отрезку O_1O_2 и пересекает отрезки O_1O_3 и O_2O_3 в точках A_3 и B_3 соответственно. Найти радиусы окружностей, если периметры треугольников $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$, $A_3O_3B_3$ равны 12, 14, 16 соответственно.

5. На протяжении учебного года Антон участвовал в математическом Интернет-марафоне. По условиям марафона Антон получал задачи одну за другой, на каждую из которых он высылал ответы. За первый *правильно* данный ответ (независимо от номера задачи) Антон получал 1 балл, за второй – 2 балла, за третий – 3 балла и т.д. Однако, за первый *неправильно* данный ответ (независимо от номера задачи) с него снимался 1 балл, за второй неверный ответ – 2 балла, за третью ошибку снималось 3 балла и т. д. Какое наименьшее количество задач мог прорешать Антон (верно или неверно), если в итоге он набрал 505 баллов?

Пользоваться калькулятором не разрешается

Время работы: 4,5 часа

Указания к решению

9 класс

1.Доказательство

Если a^3+a^2b =0, то неравенство становится линейным. Если при этом $b\neq 0$, то это линейное неравенство, очевидно, имеет решения. Если *b*=0, то *a*=0 и неравенство примет вид: $0\geq 0$, а, значит, имеет бесконечное множество решений.

Пусть теперь $a^3+a^2b\neq 0$. Рассмотрим квадратичную функцию: $y=\left(a^3+a^2b\right)x^2+b^2x-a+b$. (1)

Найдем дискриминант правой части: $D=b^4-4(a^3+a^2b)(b-a)=b^4-4a^2(a+b)(b-a)$ = $b^4-4a^2(b^2-a^2)=b^4-4a^2b^2+4a^4=\left(b^2-2a^2\right)^2\geq 0$. Т. к. $D\geq 0$, то квадратичная функция (1) имеет нули, и исходное неравенство имеет решения. Что и требовалось доказать.

2.Решение

Имеем: *А+Л+Е+К+С+А+Н+Д+Р+А* = 57, (1)

М+И+Х+А+И+Л = 41. (2)

В этих словах встречаются 11 букв: *А, Л, Е, К, С, Н, Д, Р, М, И, Х* которым соответствуют 10 цифр от 0 до 9, причем каким-то двум буквам соответствует одна и та же цифра. Тогда

А+Л+ Е+К+С+Н+Д+Р+М+И+Х= 0+1+2+…+9+*x* = 45+*x*, (3)

где *x* – однозначное число, которое обозначает повторяющаяся цифра.

Сложим (1) и (2): *А+Л+Е+К+С+А+Н+Д+Р+А+ М+И+Х+А+И+Л* = 98 (4)

Вычтем (3) из (4):

А+Л+Е+К+С+А+Н+Д+Р+А+ М+И+Х+А+И+Л– (А+Л+ Е+К+С+Н+Д+Р+М+И+Х)= 98–(45+*x*)

А+А+А+И+Л = 98–45–*x*

3А+*И+Л+x* = 53. (5)

Так как *И+Л+x* $\leq$ 9+9+9=27, то 3*А* $\geq$ 53–27, 3*А* $\geq$ 26, *А* $\geq$ 26/3, *А*=9.

Тогда (5) примет вид 3·9+*И+Л+x* = 53, *И+Л+x* = 26. Но 26 = 9+9+8. Отсюда возможны ситуации:

И=Л=9 – невозможно, так как уже *А*=9, а повторяющихся букв только две.

И=x=9, *Л=8*;

Л=x=9, *И=8*.

Последние два случая удовлетворяют условию задачи.

Ответ: *А=И*=9 или *А=Л*=9.

3. Решение

После несложных преобразований получим: $\dfrac{x^3+\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x-2x-2\sqrt{3}-3}{\sqrt{2}x-(\sqrt{3}+1)}=0$.

Далее: $x^2\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-2\left(x+\sqrt{3}\right)=0$, где $x\neq\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. (1)

$\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}-2\right)=0$.

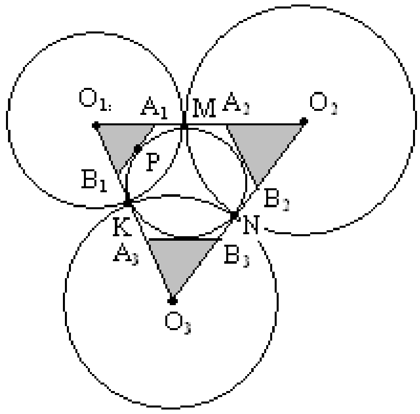
$x+\sqrt{3}=0$ или $x^2-\sqrt{3}-2=0$

$x=-\sqrt{3}$ или $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Заметим, однако, что $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, что противоречит условию (1). Поэтому имеем два ответа: $x=-\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ответ: $x=-\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. Решение.



Пусть окружности попарно касаются в точках К, М, N. Поскольку $O_1K=O_1M=R_1$, $O_2M=O_2N=R_2$, $O_3N=O_3K=R_3$, то окружность, вписанная в треугольник $O_1O_2O_3$, касается его сторон в точках К, М, N.

Пусть окружность ω касается стороны A_1B_1 в точке P. Рассмотрим окружность с центром O_1. $O_1K=O_1M=R_1$.

Но $O_1K=O_1B_1+B_1K$. Заметим, что $B_1K=B_1P$, тогда $O_1K=O_1B_1+B_1K=$ $=O_1B_1+B_1P$. Аналогично, $O_1M=O_1A_1+A_1P$.

Тогда O_1K+ $O_1M=$ $O_1B_1+B_1P+$ $O_1A_1+A_1P=$ O_1B_1+ $O_1A_1+A_1P+B_1P$ $=$ $=O_1B_1+$ $O_1A_1+A_1B_1$ $=$ $P(\Delta O_1A_1B_1)$. $2R_1$ $=$ $P(\Delta O_1A_1B_1)=12$.

Отсюда $R_1=6$.

Аналогично получаем: $2R_2=P(\Delta O_2A_2B_2)=14$ и $R_2=7$;

$2R_3=P(\Delta O_3A_3B_3)=16$ и $R_2=8$.

Ответ: 6, 7, 8

5.Решение

Пусть Антон верно решил *m* задач, а неверно *n* задач. Тогда всего он решал *m*+*n* задач.

Подсчитаем количество баллов Антона:

$1+2+...+m-(1+2+...+n)=505$, $\dfrac{1+m}{2}\cdot m-\dfrac{1+n}{2}\cdot n=505$.

$\dfrac{m+m^2-n-n^2}{2}=505$; $\dfrac{m^2-n^2+m-n}{2}=505$; $\dfrac{(m-n)(m+n)+m-n}{2}=505$;

$(m-n)(m+n+1)=1010$.

Ясно, что $m-n<m+n+1$. Число 1010 имеет следующее разложение на простые множители $1010=2\cdot 5\cdot 101$. Поэтому 1010 можно представить в виде произведения двух натуральных множителей так, чтобы второй множитель был больше первого, следующими способами: $1010=1\cdot 1010=2\cdot 505=5\cdot 202=10\cdot 101$. При этом, как следует из условия задачи, второй множитель должен принять как можно меньшее значение. Поэтому $m+n+1=101$, $m+n=100$. Таким образом Антон должен был прорешать не менее 100 задач.

Ответ: 100.