

-MECANIQUE-**I. Etude sommaire****1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur**

$$1-a) \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

$$1-b) \quad \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -\omega^2 < 0 \quad \text{et} \quad x(t) = x_0 \exp(-\lambda t) [\cos(\omega t) + (\lambda/\omega)\sin(\omega t)]$$

$$1-c) \quad \omega = 3\pi/2 = 4,71239 \approx 4,712 \text{ rad/s}; \quad \lambda = 0,02397 \text{ s}^{-1}; \quad \beta = 4,79 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}; \quad k = 2,22 \text{ N/m}; \\ \omega_0 = 4,71245 \approx \omega \text{ rad/s}.$$

2. Mesure d'une accélération

$$2-a) \quad \text{Soit } x' = OE + EG = OE + l_0 + x. \text{ Alors : } V(G) = \dot{x}' - d(OE)/dt = \dot{x} \quad \text{et} \quad m \ddot{x}' = -kx - \beta \dot{x} \\ \text{donne} \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$2-b) \quad x(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi) \quad \text{avec} \quad X_0 = a\omega^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]^{-1/2} \quad \text{et} \\ \psi = \arg[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\lambda\omega] = \pi + \arg[(\omega^2 - \omega_0^2) + 2i\lambda\omega] \quad \text{car} \quad (\omega^2 - \omega_0^2) > 0.$$

$$2-c) \quad y = u^2 [(1 - u^2)^2 + Au^2]^{-1/2} \quad \text{où} \quad A = 4\lambda^2/\omega_0^2. \quad \text{Résonance pour } dy/du = 0, \text{ soit pour} \\ u^2 = 2/[2 - A] \quad \text{possible si } A < 2.$$

Avec $u \approx 1,5$ on lit (sans grande précision) $y \approx 1,5$ d'où $a \approx 0,13 \text{ cm}$.

Rem : avec les valeurs numériques du 1), je trouve une résonance beaucoup plus fine et $u = 1,485$ et $y = 1,829$ et $a = 0,11 \text{ cm}$.

$$2-d) \quad P = \beta \dot{x} \dot{x}' = \beta \omega^2 X_0^2 [\sin^2(\omega t + \psi) + (1/y) \sin(\omega t + \psi) \sin(\omega t)] \quad \text{et} \\ \langle P \rangle = (1/2) \beta \omega^2 X_0^2 [1 + (1/y) \cos(\psi)].$$

II. Amélioration du dispositif**1. On suppose que le mouvement a lieu sans glissement**

$$1-a) \quad \dot{x} = a \dot{\theta}$$

$$1-b) \quad E_c = (1/2)m \dot{x}^2 + (1/2)J \dot{\theta}^2 = (3/4)m \dot{x}^2$$

$$1-c) \quad P_{\text{int}} = 0 \quad (\text{solide}); \quad P_{\text{contact en Gy}} = 0 \quad (\text{liaison parfaite}); \quad P_{\text{contact sur le plan}} = 0 \quad (\text{pas de} \\ \text{glissement}); \quad P_{\text{pesant}} = 0 \quad (z_G = \text{cst}); \quad \text{donc} \quad (3/4)m \dot{x}^2 + (1/2)kx^2 = \text{cst} \quad \text{et} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \\ \omega^2 = (2/3)\omega_0^2. \quad \text{Puis : } x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

1-d) Soit $\ddot{z} = R_z - mg = 0$ et $\ddot{x} = R_x - kx$ d'où $R_z = mg$ et $R_x = (1/3)kx$ et le glissement n'apparaît pas tant que $|R_x| < f|R_z|$ soit $x < x_1 = 3fg/\omega_0^2 =$

2. On se place dans le cas où $x_0 > x_1$ et on étudie la première phase de glissement

2-a) $|R_x| = f|R_z|$ et $R_x \cdot v_g < 0$.

2-b) Ici $\ddot{x} = fmg - kx$ (car $v_g < 0$ au début, voir le 2-e) d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = (1/3)x_1\omega_0^2$ et $x(t) = x_1/3 + (x_0 - x_1/3)\cos(\omega_0 t)$

2-c) $J\ddot{\theta} = -aR_x$ d'où $\ddot{\theta} = -(2/3)x_1\omega_0^2/a$

2-d) $v_g = \dot{x} - a\dot{\theta} = (2/3)x_1\omega_0^2 t - \omega_0(x_0 - x_1/3)\sin(\omega_0 t)$

2-e) Si $\omega_0 t \ll 1$: $v_g \approx (x_1 - x_0)\omega_0^2 t < 0$. Le point I de la roue en contact avec le plan n'a pas de vitesse initiale et, comme G part vers la gauche, I glisse vers la gauche, d'où $R_x > 0$.

2-f) $v_g = 0$ quand $(2/3)x_1\omega_0 t_1 = (x_0 - x_1/3)\sin(\omega_0 t_1)$ qui donne $0 < \omega_0 t_1 < \pi$.

III. Accélération radiale d'un satellite

1. 1-a) $v_0 = \sqrt{gR^2/r_0}$

1-b) $T_0 = 2\pi r_0 \sqrt{r_0/(gR^2)}$. $r_0 = 26\,673\text{ km}$; $v_0 = 3879\text{ m/s}$; $\omega_0 = 1,45 \cdot 10^{-4}\text{ rad/s}$

2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel R_s

2-a) $md\ddot{x}/dt = \text{axe } Ox) - m\omega_1^2 x \hat{x} - 2m\omega_0 \hat{x} \wedge \dot{x} + m\omega_0^2(r_0 + x) \hat{x} - [mgR^2/(r_0 + x)^2] \hat{x}$ soit, sur x
 $\ddot{x} = -\omega_1^2 x + \omega_0^2(r_0 + x) - [gR^2/(r_0 + x)^2]$

2-b) $\ddot{x} + \omega_1^2 x = \omega_0^2[(r_0 + x) - r_0(1 + x/r_0)^{-2}] \approx 3x\omega_0^2$ ou $\ddot{x} + [\omega_1^2 - 3\omega_0^2]x \approx 0$

2-c) $[\omega_1^2 - 3\omega_0^2] = \omega_1^2 [1 - 7 \cdot 10^{-5}] > 0$ et $\approx \omega_1^2$.

2-d) L'équation devient : $\ddot{x} + [\omega_1^2 - 3\omega_0^2]x \approx -a_x(\text{satellite}/R_g)$ dont la solution particulière est proportionnelle à a_x (si a_x est cst).

-THERMODYNAMIQUE-

1. Etude de différentes transformations subies par un gaz parfait**1.1** Pour O_2 : $n_o R = 2/3$ et pour N_2 : $n_l R = 1/2$.

(a) $m_o = P_o^o V_o^o / (r_o T_o^o) = 2,56 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ et $m_l = P_l^l V_l^l / (r_l T_l^l) = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

(b) Isochore ; $T_o^o = 600 \text{ K}$; $d_o^o = 0,20 \text{ m}$; $P_o^o = P_o^o T_o^o / T_a^o = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

(c) Monobare ; $T_l^l = 600 \text{ K}$; $d_o^l = d_l^l T_l^l / T_l^l = 0,30 \text{ m}$; $P_l^l = 10^5 \text{ Pa}$.

(d) $W_{A \rightarrow B}^o = 0$; $W_{A \rightarrow B}^l = -10^5 10^{-2} (0,3 - 0,15) = -150 \text{ J}$.

(e) $n C_v = n R / (\gamma - 1)$ d'où : $Q_{A \rightarrow B}^o = \Delta U_{A \rightarrow B}^o - W_{A \rightarrow B}^o = n_o R (T_o^o - T_o^l) / (\gamma - 1) = 500 \text{ J}$
 $Q_{A \rightarrow B}^l = \Delta U_{A \rightarrow B}^l - W_{A \rightarrow B}^l = n_l R (T_l^l - T_l^o) / (\gamma - 1) - W_{A \rightarrow B}^l = 525 \text{ J}$.

(f) $\delta Q = dU - \delta W = n C_v dT + P dV$ d'où $dS = n C_v dT / T + n R dV / V$ et $\Delta S_{A \rightarrow B}^o = \int_A^B n_o C_v^o dT / T = 1,155 \text{ J/K}$

(g) $\Delta S_{A \rightarrow B}^l = \int_A^B n_l C_v^l dT / T + \int_A^B n_l R dV / V = 1,213 \text{ J/K}$

(h) $S_{A \rightarrow B}^p = \Delta S_{A \rightarrow B}^o + \Delta S_{A \rightarrow B}^l - S_{A \rightarrow B}^{0e} - S_{A \rightarrow B}^{1e}$
 $= \Delta S_{A \rightarrow B}^o + \Delta S_{A \rightarrow B}^l - (500 + 525) / 600 = 0,660 \text{ J/K}$

1.2

(a) $T_o^c = T_l^c = 600 \text{ K}$; $P_o^c = P_l^c$.

(b) $d_o^c + d_l^c = d_o^l + d_l^l = 0,50 \text{ m}$ et $d_o^c / n_o = d_l^c / n_l$ d'où
 $d_o^c = 0,286 \text{ m}$ et $d_l^c = 0,214 \text{ m}$ puis $P_o^c = P_l^c = 1,40 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

(c) $\Delta S_{BC} = \Delta S_{BC}^o + \Delta S_{BC}^l = n_o R \ln(d_o^c / d_o^o) + n_l R \ln(d_l^c / d_l^l)$
 $= 0,0694 \text{ J/K}$.

(d) $W_{BC} = 0$ (π_l immobile) et $\Delta U_{BC} = 0$ (même T) d'où $Q_{BC} = 0$. Donc
 $S^e = Q_{BC} / 600 = 0$ et $S_{B \rightarrow C}^p = \Delta S_{BC}$.

2. Gaz parfait et mélange liquide-vapeur**2.1 Travail préparatoire**

2.1.1 $v_g = RT / (p_{\text{sat}} M_E)$

2.1.2 $v_l = 1/1000$ et $v_g = 373 R / (10^5 M_E) = 1,72 \gg v_l$.

2.1.3 (a) Cours. On ajoutera le point N (T_o , p_{sat})(b) IJ : $\Delta h = l_v(T_o)$; JK : $\Delta h = c_{p,v}(T - T_o)$; KL : $\Delta h = 0$; LM : $\Delta h = -l_v(T)$; MI
remplacé par MN+NI : $\Delta h = c_{p,l}(T_o - T) + 0$ (h ne dépend que de T pour le liquide).(c) Cycle donc $\Delta h_{\text{tot}} = 0$ donc : $l_v(T) = a + bT$ avec $a = l_v(T_o) + (c_{p,l} - c_{p,v})T_o$ et
 $b = c_{p,v} - c_{p,l}$.

(d) Si on se rapproche du point critique, la vapeur ne peut plus être assimilée à un gaz parfait et les propriétés du liquide se rapprochent de celles de la vapeur.

$$2.1.4 \quad dp/dT = l_v(T)/[T(v_g - v_l)] \approx l_v(T)/[Tv_g] \approx pM_E(a+bT)/(RT^2) \quad d'où$$

$$dp/p \approx aM_E dT/(RT^2) + bM_E dT/(RT) \quad d'où$$

$$\ln(p/p_0) \approx (aM_E/R)[1/T_0 - 1/T] + (bM_E/R)\ln(T/T_0).$$

$$2.1.5 \quad \text{Ici, } \ln(T/T_0) = \ln[1+(T-T_0)/T_0] \approx (T-T_0)/T_0 \quad d'où \quad \ln(p/p_0) \approx (M_E/RT_0^2)[T - T_0][a+bT_0].$$

2.2 Transformation au contact d'un thermostat

$$2.2.1 \quad (a) \quad \text{eau=liq+vap donc :} \quad p_\alpha = p_0 \exp[(M_E l_v(T_0)/RT_0^2)(T - T_0)] = 1,277 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$(b) \quad m_A = p_\alpha S d_\alpha^1 M_A / (RT_\alpha) = 1,172 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$(c) \quad m_{E,v} = p_\alpha S (d_\alpha^0 - d_{\alpha,l}^0) M_E / (RT_\alpha) = 0,7131 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad \text{et} \quad m_{E,l} = S d_{\alpha,l}^0 \rho_l = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$d'où \quad m_E = 20,71 \cdot 10^{-3} \text{ kg.}$$

$$(d) \quad x_\alpha = 0,00344.$$

$$2.2.2. \quad (a) \quad \text{On aurait : } Sp_\beta (d_\beta^1 + d_\beta^0) = (m_A/M_A + m_E/M_E) RT_\beta \quad d'où$$

$$p_\beta = 1,93 \cdot 10^6 > p_{\text{sat}}(390) = 1,809 \cdot 10^5.$$

$$(b) \quad \text{On aurait : } d_\beta^0 = m_E / (Sp_\beta) = 20,71 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad d'où \quad d_\beta^1 = 0,2 - d_\beta^0 \quad \text{puis}$$

$$p_\beta = m_A RT_\beta / (M_A S d_\beta^1) = 6,619 \cdot 10^4 < p_{\text{sat}}(390) = 1,809 \cdot 10^5.$$

$$(c) \quad p_\beta = p_{\text{sat}}(390) = 1,809 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

(d)

$$(e) \quad d_\beta^1 = m_A RT_\beta / (M_A S p_\beta) = 0,0724 \text{ m} \quad d'où \quad d_\beta^0 = 0,1276 \text{ m.}$$

(f)

$$(g) \quad m_{E,v} / (S d_{\beta,v}^0) = p_\beta M_E / (RT_\beta) = 1,0048 \text{ kg/m}^3.$$

(h)

$$(i) \quad d_\beta^0 = d_{\beta,l}^0 + d_{\beta,v}^0 \quad \text{et} \quad m_E = d_{\beta,l}^0 S \rho_l + d_{\beta,v}^0 S p_\beta M_E / (RT_\beta) \quad d'où \quad d_{\beta,l}^0 = 0,001945 \text{ m}$$

$$\text{et} \quad d_{\beta,v}^0 = 0,1256 \text{ m.}$$

$$(j) \quad m'_{E,l} = 0,01945 \quad \text{et} \quad m'_{E,v} = 0,001262 \quad d'où \quad x_\beta = 0,061.$$

(k)

$$(l) \quad \Delta S_{\alpha\beta}(\text{air}) = m_A c_{v,A} \ln(T_\beta/T_\alpha) + (m_A/M_A) R \ln(d_\beta^1/d_\alpha^1)$$

$$= 0,0218 - 0,1084 = -0,0866 \text{ J/K}$$

Pour l'eau, on peut considérer que :

$$m'_{E,l} \text{ eau liquide passe de } T_\alpha \text{ à } T_\beta : \Delta S = m'_{E,l} c_{p,l} \ln(T_\beta/T_\alpha) = 2,112 \text{ J/K ;}$$

$(m_{E,l} - m'_{E,l})$ eau passe de liquide à vapeur à T_α et p_α :

$$\Delta S = (m_{E,l} - m'_{E,l}) l_v(T_\alpha)/T_\alpha = 3,213 \text{ J/K} \quad \text{car} \quad l_v(T_\alpha) = 2222 \text{ kJ/kg ;}$$

$m'_{E,v}$ eau vapeur passe de (T_α, p_α) à (T_β, p_β) :

$$\Delta S = m'_{E,v} c_{p,v} \ln(T_\beta/T_\alpha) - (m'_{E,v}/M_E) R \ln(p_\beta/p_\alpha) = 0,053 - 0,203 = -0,150 \text{ J/K.}$$

$$D'où \quad \Delta S_{\alpha\beta}(\text{eau}) = 5,175 \text{ J/K} \quad \text{et} \quad \Delta S_{\alpha\beta} = 5,088 \text{ J/K}.$$