

Sistema de referencia

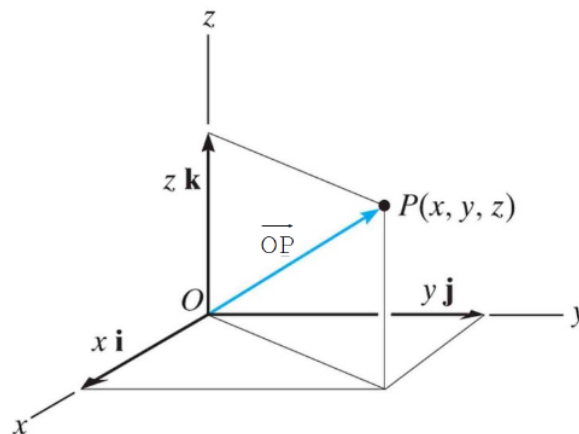
Un sistema de referencia en el espacio es un conjunto formado por un punto de referencia O y la base ortonormal canónica $B = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$. Se representa así: $\mathcal{R} = \{ O ; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \}$

En un sistema de referencia, a cada punto P del espacio se le asigna el vector $\vec{OP} = (x, y, z)$, llamado vector de posición del punto P .

Se definen las coordenadas del punto P como las componentes del vector $\vec{OP}$ (se suele simplificar escribiendo simplemente P).

Es decir: "las componentes del vector de posición de P coinciden con las coordenadas del punto P ".

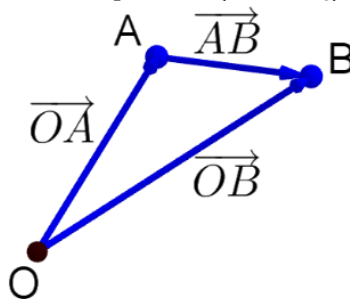
Se representa así: $P(x, y, z)$



Por ejemplo, el vector de posición del punto $P(3, -2, 1)$ es $\vec{OP} = \vec{p} = (3, -2, 1)$

Vector determinado por dos puntos

Sean dos puntos del espacio $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$



Observa que: $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \Rightarrow \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

Luego, para hallar $\vec{AB}$ restamos las coordenadas de B menos las de A

Por ejemplo, si $A(5, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 1)$ entonces $\vec{AB} = (-2 - 5, 4 + 1, 1 - 3) = (-7, 5, -2)$

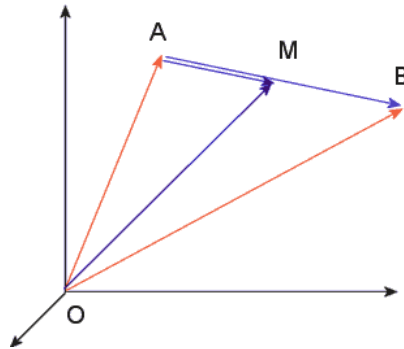
Si $A(2,-1,3)$ y $B(5,4,-4)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (3,5,-7)$

Si $C(3,0,5)$ y $D(6,5,-2)$, entonces $\overrightarrow{CD} = (3,5,-7)$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes

Punto medio de un segmento y división de un segmento en partes proporcionales a números dados.

Sean dos puntos del espacio $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$



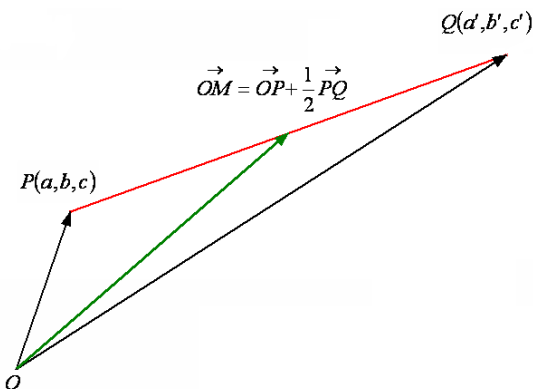
Observa que $\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$

$$\text{Por tanto, } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Luego, las coordenadas del punto medio M son la semisuma de las coordenadas de A y B

Por ejemplo, si $A(5, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 1)$ entonces el punto medio es

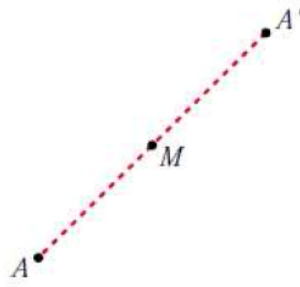
$$M\left(\frac{5-2}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$$



Por un procedimiento similar se pueden obtener los puntos que dividen a un segmento en 3, 4, 5, ..., n partes iguales.

Simétrico de un punto respecto de otro

El punto simétrico de un punto A respecto de un punto M es el punto A' que cumple $\overline{AA'} = 2 \overline{AM}$



Veamos una forma sencilla de obtener el punto simétrico mencionado:

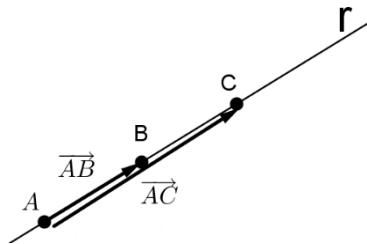
Sean $A(a_1, a_2)$, $M(m_1, m_2)$ y $A'(x, y)$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{x + a_1}{2} \rightarrow x = 2m_1 - a_1 \\ m_2 = \frac{y + a_2}{2} \rightarrow y = 2m_2 - a_2 \end{cases}$$

Como M es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$,

Puntos alineados

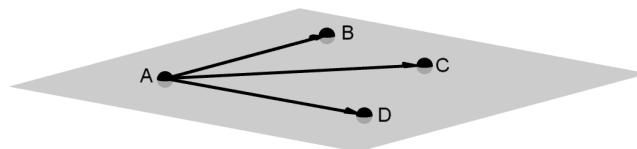
Tres o más puntos del espacio están alineados si están contenidos en la misma recta.



$$A, B \text{ y } C \text{ están alineados} \leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{AC} \leftrightarrow \overline{AB} = k \overline{AC}, \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

Puntos Coplanarios

Cuatro o más puntos del espacio son coplanarios si están contenidos en el mismo plano.

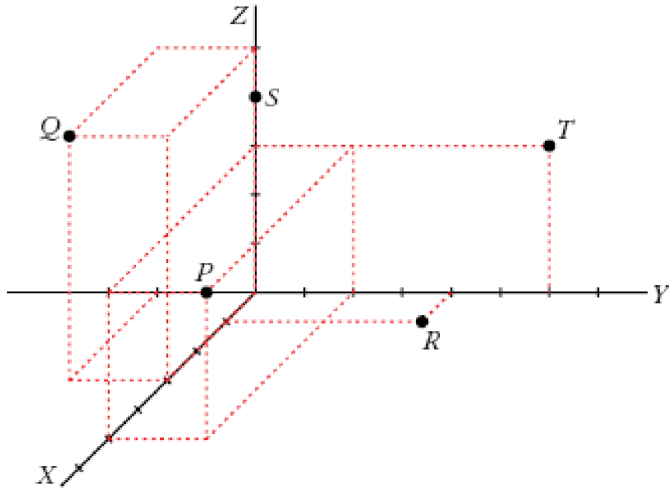


$$A, B, C \text{ y } D \text{ son coplanarios} \leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC} \text{ y } \overline{AD} \text{ son l.d.} \leftrightarrow \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 0$$

Actividades

Representa los siguientes puntos del espacio:

$$P(5, 2, 3) \quad Q(3, -2, 5) \quad R(1, 4, 0) \quad S(0, 0, 4) \quad T(0, 6, 3)$$



Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(2, 5, -3)$ y $B(-2, 5, 9)$

Siendo $A(2, 1, 4)$ y $B(5, 6, 2)$, halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento $\overline{AB}$ en

tres partes iguales. Solución. $P(3, \frac{8}{3}, \frac{10}{3})$, $Q(4, \frac{13}{3}, \frac{8}{3})$.

Dado un tetraedro ABCD, comprueba vectorialmente que los puntos medios de las aristas AB, AC, BD y CD están en un mismo plano.

Averiguar si 5 puntos dados son o no coplanarios

Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

Calcula las coordenadas del vértice D.

Halla los puntos que dividen al segmento $A(7, -5, 1)$, $B(-1, 0, 4)$ en tres partes iguales

Dados los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 5, 7)$. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento

AB en tres partes iguales. Sol.: $P(\frac{1}{3}, 3, \frac{13}{3})$, $Q(\frac{-1}{3}, 4, \frac{17}{3})$

Calcula el simétrico de $A(2, 0, 1)$ respecto del punto $P(4, 2, 3)$

Calcula el simétrico del punto $A(3, -9, 2)$ respecto del punto $B(0, -1, 7)$

Calcula el simétrico del punto $P(2, -5, 1)$ respecto del punto $Q(1, -3, 4)$ Sol.: $P'(0, -1, 7)$

¿Cuál es el trabajo que realiza una fuerza $\vec{F} = (2, 5, 7)$ sobre un cuerpo que se desplaza desde un punto A = (2, -1, 5) hasta un punto B = (-3, 2, 7)? a) $W = 6 \text{ J}$ b) $W = 35 \text{ J}$ c) $W = 19 \text{ J}$

Dados los puntos A = (6, 3, 2) y B = (1, 5, -2), ¿cuáles son las coordenadas de los puntos M, N y P que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales?

Determina a y b para que los puntos A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(a - 2, 7, b) estén alineados.

Calcula los valores de "m" y "n" para que los puntos: P(7, -1, m), Q(8, 6, 3), R(10, n, 9) estén alineados.

Halla m y n para que A(-1, 3, 2), B(2, -1, -1) y C(m - 2, 7, n) estén en la misma recta Sol.: m = -2, n = 5

Dados los puntos A(1, 2, 3), B(0, 1, -2), C(3, 1, 0) y D(m, -1, 4). Se pide:

a) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre una línea? En caso afirmativo, determina dicha recta; en caso negativo, di por qué no están alineados.

b) ¿Existe algún valor de m para el que los cuatro puntos están sobre un plano? En caso afirmativo, determina dicho plano; en caso negativo, di por qué no son coplanarios.

Halla m para que los puntos A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(-2, 1, 3) y D(m, m - 1, 2) sean coplanarios.

Calcula el valor de k para que los puntos A(1, 1, 1), B(-1, 2, 0), C(2, 1, 2) y D(k, -2, 2) sean coplanarios

Sol.: k = 5

Determina la relación que debe existir entre a y b para que los puntos (1, 0, 0); (a, b, 0); (a, 0, b) y (0, a,

b) sean coplanarios. Sol.: $a^2b + ab^2 = ab$

Dados los puntos A(0, 2, 2), B(2, 0, -1) y C(3, 4, 0):

a) Halla los vectores AB, BC y AC.

b) El perímetro del triángulo.

c) El área del triángulo.

d) Los ángulos internos del triángulo.

e) La proyección escalar de AB en BC.

f) La proyección vectorial de AB en BC.

g) Un vector paralelo al vector AC y de magnitud 7.

h) La altura del triángulo.

i) Halla los cosenos directores y los ángulos directores del vector BC.

Dados los puntos A(-1, 5, 3) y B(6, -1, 4). Halla:

Los ángulos directores del vector $\vec{AB}$

El ángulo entre los vectores de posición $\vec{A}$ y $\vec{B}$

La distancia entre los puntos A y B.

¿Forman los puntos A, B y el origen un triángulo rectángulo? Compruébalo

Sean A, B, C tres puntos del espacio tridimensional que verifican $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$

a) Calcular el valor de k en $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

b) Si A(1, 2, -1) B(3, 6, 9) hallar C en a)

¿Cuánto vale la suma: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$? Solución. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Siendo $F = \{k \cdot \overrightarrow{u} / \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ y } k \in [0,1]\}$ y un punto fijo O del espacio. ¿Qué figura forman los extremos de los representantes de origen O? Solución. Segmento OX siendo $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{u}$.

Siendo $F = \{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} / \overrightarrow{OA} \text{ y } \overrightarrow{AB} \text{ linealmente independientes, } t \in \mathbb{R}\}$. ¿Qué figura forman los extremos de los vectores del conjunto F? Solución. Recta AB.

¿Cuál es el conjunto de puntos del espacio determinado por el conjunto F? $F = \{\overrightarrow{x} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v} / \overrightarrow{u} \text{ y } \overrightarrow{v} \text{ linealmente independientes y } a, b \in [0,1]\}$ Solución. Los puntos del paralelogramo que determinan $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$

Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo cuyos vértices son: A(2,3,4), B(2,5,0), C(6,-1,8).

Si $A_m(2,1,0)$, $B_m(3,3,2)$, $C_m(6,2,4)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, calcula las coordenadas de los vértices del triángulo.

Las coordenadas de dos vértices consecutivos del paralelogramo ABCD son A(1,0,0) y B(0,1,0). Las del centro son M(0,0,1). Halla las coordenadas de los vértices C y D. Solución. C(-1,0,2), D(0,-1,2).

¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo A(1,0,0), B(2,-1,0), C(0,0,1) y D(1,-1,1)? Solución. Sí.

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es equipolente al vector $\overrightarrow{MN}$, siendo P(1,0,1), Q(5,7,3) y M(0,1,6). Halla las coordenadas del punto N. Solución. N(4,8,8).

Calcula la suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo A(1,1,1), B(0,2,1), C(-2,1,1) y D(4,7,1). Solución. (5,7,0).

Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) Calcular el valor que toma k en la expresión

$$\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$$

b) Si A(1,2,-1) y B(3,6,9), hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

2013-10 Considera los puntos A(1, 2, 3) y B(-1, 0, 4).

Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

2010-9 Considera los puntos A(1, 2, 1) y B(-1, 0, 3).

Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

2007-1 Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ en tres partes iguales.

2006-4 Considera los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(-2, 3, 1)$.

Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

Halla los puntos que dividen al segmento $A(7, -5, 1)$, $B(-1, 0, 4)$ en tres partes iguales

Dados los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1, 5, 7)$. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento

$$\text{Sol.: } P\left(\frac{1}{3}, 3, \frac{13}{3}\right), Q\left(\frac{-1}{3}, 4, \frac{17}{3}\right)$$

AB en tres partes iguales.

Halla m y n para que $A(-1, 3, 2)$, $B(2, -1, -1)$ y $C(m-2, 7, n)$ estén en la misma recta Sol.: $m=-2, n=5$

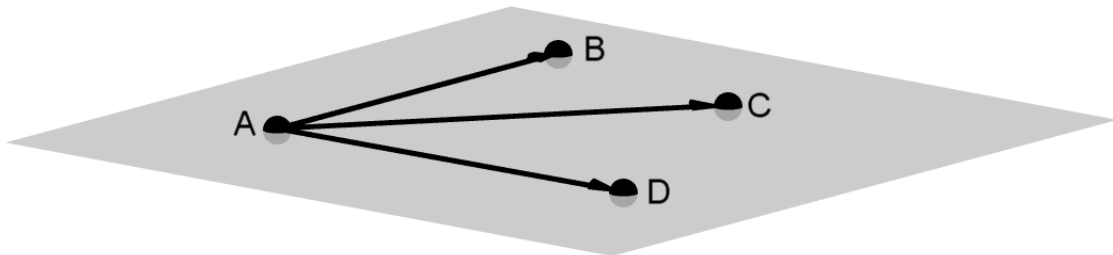
2015-7 Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$.

Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

Resolución

A, B, C y D están en el mismo plano $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son l.d. $\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD} \end{bmatrix} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2) \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1) \quad \overrightarrow{AD} = (2, 0, m-1); \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 4 = 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m=3}$$



2012-7 De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2, -1, 0)$, $B(-2, 1, 0)$ y $C(0, 1, 2)$. Calcula el vértice D .

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1, 0, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(3, 2, -3)$.

Calcula las coordenadas del vértice D .

2011-7 Considera los puntos $A(-1, k, 3)$, $B(k+1, 0, 2)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(2, 0, 1)$.

¿Existe algún valor de k para el que los vectores AB, BC y CD sean linealmente dependientes?

Calcula el valor de k para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ y $D(k, -2, 2)$ sean coplanarios

Sol.: $k=5$
