



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO  
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)  
FASE GENERAL  
CURSO 2022-2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(4)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

**Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)**

1A.- Hallar la función polinómica  $f(x)$  que verifica que tiene un punto mínimo en  $M(1, 2)$  y su segunda derivada es  $f''(x) = 2x + 3$ . Dar la expresión de  $f(x)$ . (2,5 pts)

**Resolución**

$$f'(x) = \int f''(x) dx = (2x + 3)dx = x^2 + 3x + a. \text{ Como } f \text{ tiene un mínimo en } (1, 2), \text{ entonces } f'(1) = 0.$$

$$\text{Luego, } 1^2 + 3 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow a = -4. \text{ Nos queda } f'(x) = x^2 + 3x - 4$$

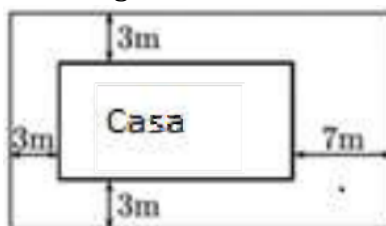
$$f(x) = \int f'(x) dx = (x^2 + 3x - 4)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + b = \frac{2x^3 + 9x^2 - 24x}{6} + b.$$

Como la gráfica de  $f$  pasa por  $(1, 2)$ , entonces  $f(1) = 2$ .

$$\text{Luego, } \frac{2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1}{6} + b = 2 \Rightarrow \frac{-13}{6} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{25}{6}.$$

$$\text{Por tanto, } f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 - 24x}{6} + \frac{25}{6} = \frac{2x^3 + 9x^2 - 24x + 25}{6} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{25}{6}.$$

1B.- Se quiere construir una Casa de la Juventud de  $240 \text{ m}^2$  de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada? (2,5 pts)

**Resolución**

Si  $x$ ,  $y$  son las dimensiones de la Casa de la Juventud, entonces  $xy = 240$ . Luego,  $y = \frac{240}{x}$

Por otra parte, el área de la zona ajardinada es:  $(3 + x + 7)(3 + y + 3) - xy = 6x + 10y + 60$

Se trata de minimizar la función  $f(x) = 6x + 10\frac{240}{x} + 60 = 6x + \frac{2400}{x} + 60$

$f'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2400}{6} = 400$ ; y como  $x$  es positivo, entonces  $x = 20$

$f''(x) = \frac{4800}{x^3}$ ;  $f''(20) = \frac{4800}{20^3} > 0$ . Para  $x = 20$ ,  $y = \frac{240}{20} = 12$  se alcanza el mínimo

Por tanto, las dimensiones de la Casa de la Juventud son  $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$  y el área de la zona ajardinada es

$$f(20) = 6 \cdot 20 + \frac{2400}{20} + 60 = 120 + 120 + 60 = 300 \text{ m}^2$$

**Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**

2A.- Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprobar si la matriz  $M = 2I_3 + B^t$  tiene inversa. Donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3. (0,75 pts)

b) Justificar que existe la matriz  $X$  que verifica la ecuación siguiente:  $2X + C = A - XB^t$ . Calcular razonadamente dicha matriz  $X$ . (1,75 pts)

**Resolución**

$$M = 2I + B^t = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \det M = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

Para b), trasponiendo términos,  $2X + XB^t = A - C \Rightarrow X(2I + B^t) = A - C$ .

Sacando factor común  $X$ , por la izquierda,  $X(2I + B^t) = A - C \Rightarrow XM = A - C$

Multiplicando por  $M^{-1}$ , por la derecha, en los dos miembros obtenemos  $XMM^{-1} = XI = X = (A - C)M^{-1}$ .

$$X = (A - C)M^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\det M} (\text{adj } M)^t$$

$$X = (200 \quad -1 \quad -30220) \frac{1}{1} (2 \quad -4 \quad -1010 \quad -121)^t = (200 \quad -1 \quad -30220) (20 \quad -1 \quad -412)$$

2B.- Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5 €. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las carajacas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. (2,5 pts)

**Resolución**

Sean x, y, z el precio por ración de escaldón, tollos y carajacas.

Según el enunciado,

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 5 & 30x + 20y + 10z = 255 \\ 3z = 2y + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 15 \\ 6x + 4y + 2z = 51 \\ -2y + 3z = 10 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 & 6 & 4 & 2 & 51 & 0 \\ & & & -2 & -4 & -39 & 0 & -2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f2 - 6f1 \\ f3 - f2 \end{matrix}$$

que corresponde al sistema  $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 2y + 4z = 39 \\ 7z = 49 \end{cases}; z = 7; y = \frac{39 - 4 \cdot 7}{2} = 5,5; x = 15 - 5,5 - 7 = 2,5$

Luego, El precio del plato de escaldón es 2,5 €, el de tollos 5,5 euros y el de carajacas 7 €.

**Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**

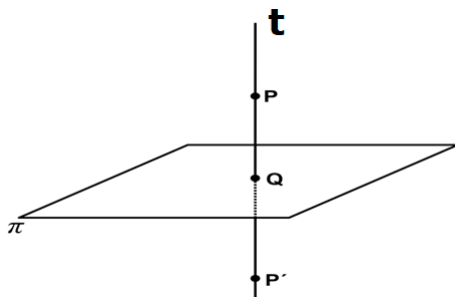
3A.- En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:  $\pi: 2x + 3y - z = 4$

$$r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}; s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de  $(-2, 1, 2)$  respecto de  $\pi$ . (1,25 pts)

**Resolución**

$P(-2, 1, 2) \notin \pi: 2x + 3y - z = 4$  porque no cumple su ecuación  $[2(-2) + 3 \cdot 1 - 2 = -3 \neq 4]$ .



Un vector director de t es el vector normal del plano,  $\vec{d}_t = \vec{n} = (2, 3, -1)$  y  $P \in t \Rightarrow$

$$t: \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 1 + 3k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte, Q, entre el plano y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano,  $2(-2 + 2k) + 3(1 + 3k) - (2 - k) = 4; 14k - 3 = 4; k = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ y = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ z = 2 - \frac{1}{2} \end{cases}; Q(-1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ . Calculamos el simétrico  $P'(a, b, c)$  de

$P(-2, 1, 2)$  usando que Q es el punto

medio del segmento  $PP'$ :

$$\begin{cases} \frac{a-2}{2} = -1, & a - 2 = -2 \Rightarrow a = 0 \\ \frac{b+1}{2} = \frac{5}{2}, & 2b + 2 = 10 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{c+2}{2} = \frac{3}{2}, & 2c + 4 = 6 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

. El punto simétrico es  $P'(0, 4, 1)$

b) Calcular el ángulo que forman r y s. (1,25 pts)

**Resolución**

Como la recta  $r$  está dada como intersección de dos planos, su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los mismos:

$$\vec{d}_r = (1, 1, -1) \times (2, 5, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (6, -3, 3) // (2, -1, 1).$$

Para la recta  $s$ , su vector director es  $\vec{d}_s = (1, 0, 1)$ .

Si  $\alpha$  es el ángulo que forman  $r$  y  $s$ , sabemos que  $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = |\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s| \cdot \cos \alpha$

$$\text{Luego, } \cos \alpha = \frac{\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \frac{2+0+1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{12}} = 30^\circ$$

3B.- En el espacio tridimensional tenemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r: \{x + 2y - 7z = 0 \quad 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad s: \{2x - 7y - 3z = 2 \quad x - y + z = 1$$

a) Estudiar la posición relativa de  $r$  y  $s$ . (1,25 pts)

**Resolución**

Hallemos un punto de  $r$ : hacemos  $z = 0 \Rightarrow \{x + 2y = 0 \quad 2x + 3y = -1$ . Resolviendo,  $y = 1, x = -2 \Rightarrow A(-2, 1, 0) \in r$

Un vector director de  $r$  se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{d}_r = (1, 2, -7) \times (2, 3, -12) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = (-3, -2, -1) // (3, 2, 1)$$

Hallemos un punto de  $s$ : hacemos  $z = 0 \Rightarrow \{2x - 7y = 2 \quad x - y = 1$ . Resolviendo,  $y = -4, x = -3 \Rightarrow B(-3, -4, 0) \in s$

Un vector director de  $s$  se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{d}_s = (2, -7, -3) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-10, -5, 5) // (2, 1, -1)$$

$$\vec{BA} = (0, -2, 0);$$

$$\det \det(\vec{BA}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = \det \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 10 - 1 + 15 = 22 \neq 0$$

Luego, los vectores son l.i. y las rectas se cruzan.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ . (1,25 pts)

**Resolución**

Al ser  $\vec{d}_r = (3, 2, 1)$  y  $\vec{d}_s = (2, 1, -1)$  vectores directores del plano  $\pi$  que se pide, un vector normal

$$\text{de } \pi \text{ es } \vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 5, -1) // (3, -5, 1)$$

Como  $\pi$  pasa por  $A(-2, 1, 0) \in r \Rightarrow \pi: 3(x+2) - 5(y-1) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \pi: 3x - 5y + z + 11 = 0$

**Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)**

4A.- Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años? (1 pto)

**Resolución**

Si  $X$  = número de docentes menores de 30 años, entonces  $X \rightarrow B(15 ; 0,11)$

La ley de probabilidad es  $p_k = p(X = k) = \binom{15}{k} 0,11^k 0,89^{15-k}$ , con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 14, 15$ .

La probabilidad que se pide es  $p(X \geq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] =$

$$1 - \binom{15}{0} 0,11^0 0,89^{15} - \binom{15}{1} 0,11^1 0,89^{14} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,89^{15} - 15 \cdot 0,11 \cdot 0,89^{14} \cong 0,5031 = 50,31\%$$

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años? (1 pto)

**Resolución**

$X$  = número de docentes menores de 30 años.

Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: "Si una v.a.  $X$  sigue una binomial  $B(n, p)$  que cumple:  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  y  $n(1-p) \geq 5$ , entonces, la v.a.  $X$  se puede sustituir por otra v.a.  $X' \rightarrow N(\mu, \sigma)$ , siendo  $\mu$  la media de  $X$ ,  $\mu = np$  y

$\sigma$  la desviación típica,  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ . Es decir,  $X' \rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)})$  "

Aquí,  $n = 200 \geq 30$ ,  $p = 0,11$ ;  $np = 22 \geq 5$  y  $n(1-p) = 200 \cdot 0,89 = 178 \geq 5$ ;  $X \rightarrow B(200 ; 0,11)$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{19,58} \cong 4,425 \quad ; \quad X' \rightarrow N(22; 4,425) \text{ . Tipificando, } Z = \frac{X' - 22}{4,425} \rightarrow N(0, 1) \text{ .}$$

Piden  $p(20 \leq X \leq 30)$ . Como los valores de  $X$ , entre 20 y 30, ambos incluidos, son 20, 21, ..., 29, 30 tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números.

Por ejemplo, tomamos  $(19,5 ; 30,5)$ .

$$\text{Entonces, } p(20 \leq X \leq 30) = p(19,5 \leq X' \leq 30,5) = p\left(\frac{19,5 - 22}{4,425} \leq \frac{X' - 22}{4,425} \leq \frac{30,5 - 22}{4,425}\right) \cong$$

$$\cong p(-0,56 \leq Z \leq 1,92) = p(Z \leq 1,92) - p(Z \geq 0,56) = p(Z \leq 1,92) - 1 + p(Z \leq 0,56) =$$

$$= 0,9726 - 1 + 0,7123 = 0,6849 = 68,49\%$$

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?  
(0,5 ptos)

**Resolución**

$Y$  "número de docentes mayores de 30 años";  $Y \rightarrow B(500 ; 0,89)$ . El número de docentes que cabe esperar que sean mayores de 30 años es la media de  $Y$ ,  $\mu = np = 500 \cdot 0,89 = 445$  docentes

4B.- Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm. (1 pto)

**Resolución**

$$X = \text{estatura} \rightarrow N(168; 8) \Rightarrow Z = \frac{X-168}{8} \rightarrow N(0, 1).$$

$$\text{Se pide } p(X > 156) = p\left(\frac{X-168}{8} > \frac{156-168}{8}\right) = p(Z > -1,5) = p(Z < 1,5) = 0,9332 = 93,32\%$$

b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación. (0,75 pts)

**Resolución**

Como

$$p(X > 182) = p\left(\frac{X-168}{8} > \frac{182-168}{8}\right) = p(Z > 1,75) = 1 - p(Z \leq 1,75) = 1 - 0,9599 = 4,01\%$$

es falsa dicha afirmación, pues sólo el 4,01% medía más de 1,82 metros

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm? (0,75 pts)

**Resolución**

$$\text{Se pide } p(166 < X < 172) = p\left(\frac{166-168}{8} < \frac{X-168}{8} < \frac{172-168}{8}\right) = p(-0,25 < Z < 0,5) =$$

$$= p(Z < 0,5) - p(Z > 0,25) = p(Z < 0,5) - 1 + p(Z \leq 0,25) = 0,6915 - 1 + 0,5987 = 29,02\%$$