Занятие №   Группа ХКМ 1/1   Дата: 27.02.2024

Тип занятия: комбинированное занятие

Тема занятия: «Степенная функция, ее свойства»

Цель занятия:

Деятельностная:

– формирование у учащихся умений оперировать понятиями корень n-ой степени, умение сознательно и рационально использовать свойства корня при решении различных задач.

Содержательная:

– сформировать представление о корне n-ой степени, свойствах корня при решении различных задач;

– расширить знания учеников за счет включения новых определений: корень n-ой степени из действительного числа, арифметический корень квадратный, иррациональное число;

– познакомиться с задачами на использование свойства корня.

Оборудование занятия: доска, учебник.

План занятия:

1. Понятие корня n-ой степени из действительного числа.

- арифметический корень квадратный;
- корень четной степени из неотрицательного числа;
- корень нечетной степени из отрицательного числа.

2. Свойства корня n-ой степени.

3. Разбор типовых задач.

Ход занятия

1. Понятие корня n-ой степени из действительного числа.

Арифметический корень квадратный

На данном занятии мы рассмотрим понятие корня n-ной степени из действительного числа, дадим строгие определения и решим различные примеры на практическое применение данной конструкции.

Мы довольно долго не знали, что такое корень n-ой степени из действительного числа, и умели обходиться без этого понятия, но потом появились случаи, в которых обойтись без него уже невозможно.

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пример 1: $x^2 = 1$

Решение:

Способ 1, аналитический. Перенесем все члены в левую часть уравнения так, чтобы справа остался 0: $x^2 - 1 = 0$. Далее разложим на множители: $(x + 1)(x - 1)=0$.

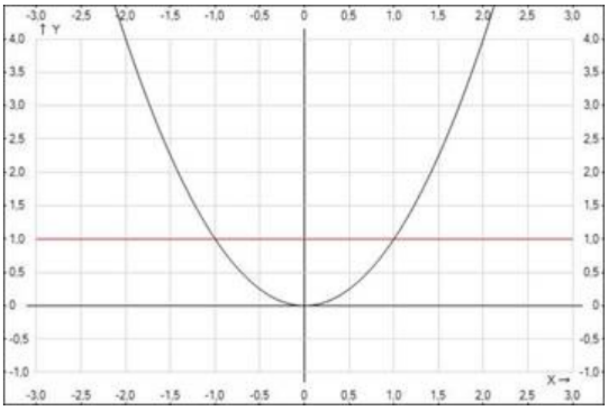
Каждый множитель приравниваем к нулю:

$$\left[\begin{array}{l}(x+1)=0\\(x-1)=0\end{array}\right.$$

Получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Способ 2, графический. Построим кривую $y=x^2$ и прямую $y=1$. Получим и в точках пересечения графиков.



Ответ: $x=1$, $x=-1$.

Для решения этой задачи нам не потребовалось никаких новых методов.

Пример 2: $x^2 = 4$

Решение:

Способ 1. $x^2 - 4 = 0$. Разложим на множители: $(x + 2)(x - 2)=0$. Каждый множитель приравниваем к нулю:

$$\left[\begin{array}{l}(x+2)=0\\(x-2)=0\end{array}\right.$$

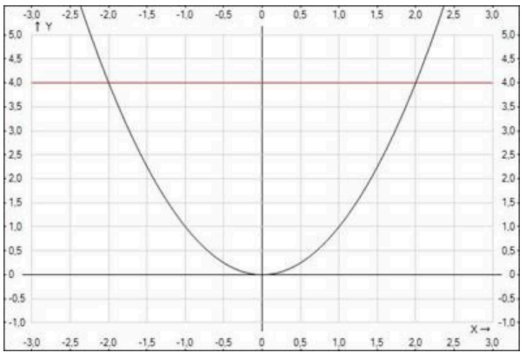
Получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$$

Способ 2, графический. Построим график для системы, где первое уравнение – левая часть заданного выражения ($y=x^2$), второе – правая ($y=4$):

$$\left[\begin{array}{l}y=x^2\\y=4\end{array}\right.$$

Ответами будут точки пересечения графиков, т. е. ч=2 и х=–2.



Ответ: $x=2$, $x=-2$.

После решения двух задач нужды в новом слове не обнаружено.

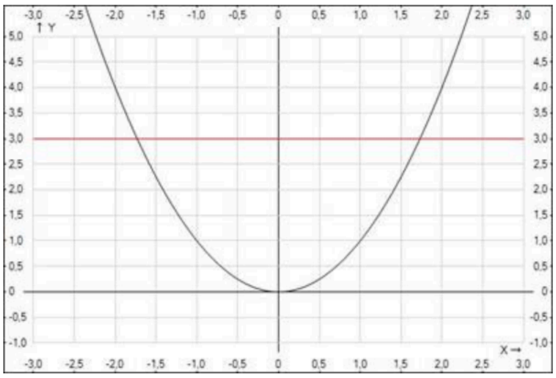
Пример 3: $x^2=3$

Решение:

Способ 1, аналитический. $x^2-3=0$. Пытаемся разложить на множители, но ничего не выходит. Попробуем другой способ.

Способ 2, графический. Построим график для системы, где первое уравнение – левая часть заданного выражения ($y=x^2$), второе – правая ($y=3$):

$$\left[\begin{array}{l}y=x^2\\y=3\end{array}\right.$$



Видим, что графики пересекаются, а значит, ответы все же есть. Назовем их корень квадратный из 3 и минус корень квадратный из 3:

$$\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Ответ: x=√3, x= –√3.

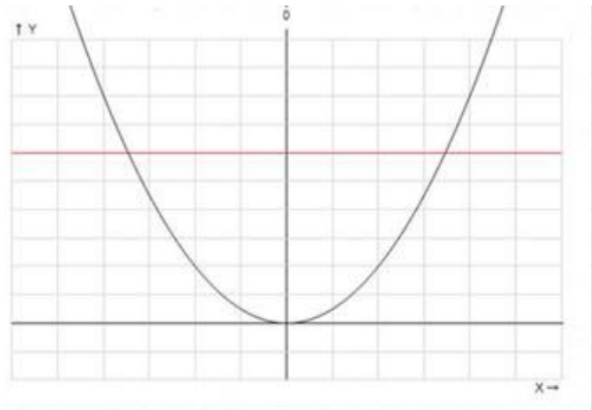
Определение:

Квадратный корень из трех – это иррациональное число, приближенное к десятичной дроби (√3≈1,7). Так как √3>0, в дальнейшем будем считать его арифметическим корнем.

Понятие и определение корня четной степени из неотрицательного числа

Теперь нам нужно определить корень n-ой степени из действительного числа. Рассмотрим еще один пример.

Пример 4*:* $x^n = a$, где a≥0, n=2,4,6, …



Уравнение имеет 2 корня: $x = \sqrt[n]{a}$ и $x = -\sqrt[n]{a}$.

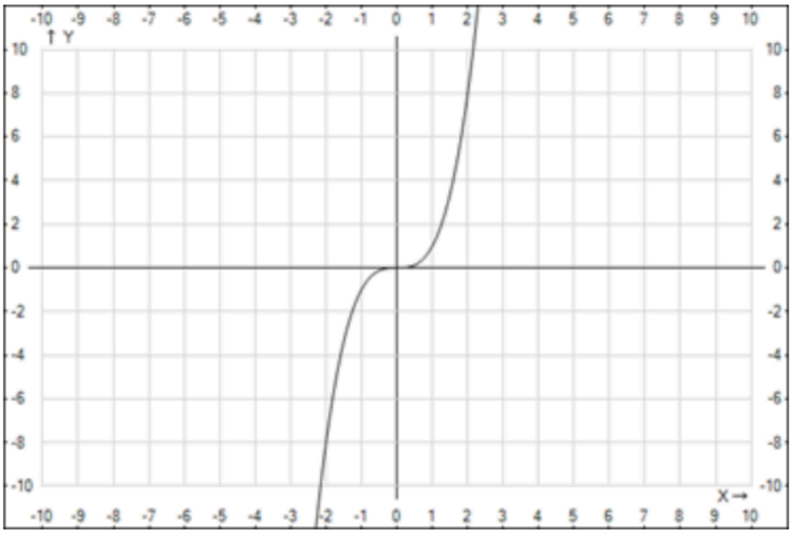
Определение:

Корнем n-ой степени из неотрицательного числа *a* называют такое неотрицательное число, которое при возведении в степень *n* дает в результате число *a*. Т. е. если $x = \sqrt[n]{a}$, то $x^n = a$. Из этого следует тождество $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Напомним, что у любой функции, в том числе и у данной, есть 2 задачи: прямая (по данному x найти y) и обратная (по данному y, в данном случае равному a, найти x). Если значение a положительное и n четное, то значение y достигается при двух значениях аргумента – положительном и отрицательном. Положительное значение аргумента называется корнем n-ной степени из a, или арифметическим корнем n-ной степени из a.

Понятие и определение корня нечетной степени из отрицательного числа

Перейдем к нечетным степеням. Начнем с $n = 3$.



Свойства функции $y = x^3$ отличаются от предыдущих. Напомним, что функция нечетная, график ее симметричен относительно начала координат; она принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а значит, любое свое значение *y* принимает при единственном значении *x*. Например, $x^3 = 1, x = 1$; $x^3 = 2, x = \sqrt[3]{2}$; $x^3 = 8, x = 2$; $x^3 = -8, x = -2$; $x^3 = -5, x = -\sqrt[3]{5}$. По графику функции находим решения.

Итак, уравнение $x^3 = a$ имеет единственный корень. Если этот корень неотрицательный, он называется арифметическим корнем, в противном случае – минус арифметическим корнем.

Если n – любое нечетное число, график функции x^n имеет тот же вид и те же свойства, что и x^3: функция нечетная, график симметричен относительно начала координат, область значений от $-\infty$ до $+\infty$, любое значение, в том числе и отрицательное, функция принимает при единственном значении аргумента.

Определение:

Корнем нечетной степени из отрицательного числа a при n=3,5,… называют такое отрицательное число, которое, будучи возведено в степень n, дает в результате число a. Например, $\sqrt[5]{(-1)}=1$ т. к. $(-1)^5=-1$; $\sqrt[5]{(-32)}=-2$ т. к. $(-2)^5=-32$.

Понятие корня n-ой степени из действительного числа позволяет уверенно решать степенные уравнения.

2. Свойства корня n-ой степени.

Обзор свойств корня n-й степени из неотрицательного числа.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, при $a \geq 0, b \geq 0, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 1);*

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при $a \geq 0, b > 0, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 2);*

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, при $a \geq 0, k = 1, 2, 3 \ldots, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 3);*

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, при $a \geq 0, k = 2, 3, 4 \ldots, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 4).*

Из теоремы 4 есть важное следствие: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$

Следует избегать типичных ошибок, обратим на них внимание:

$\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$, например $\sqrt[3]{8+27}=\sqrt[3]{35}\neq\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}=2+3=5$.

Пример 5: вычислить: $\sqrt[3]{125*8}=\sqrt[3]{125}*\sqrt[3]{8}=5*2=10$

Теорема удобна тем, что не нужно выполнять трудоемкое умножение, а иногда, наоборот, раскладывать большие числа на множители.

Пример 6: вычислить: $\sqrt[4]{625*16}=\sqrt[4]{625}*\sqrt[4]{16}=5*2=10$

Теорема 1 допускает обобщение, например, для произведения трех сомножителей.

Пример 7: вычислить: $\sqrt{100*25*16}=\sqrt{100}*\sqrt{25}*\sqrt{16}=10*5*4=200$

Пример 8: вычислить: $\sqrt[3]{1000*8*27}=\sqrt[3]{1000}*\sqrt[3]{8}*\sqrt[3]{27}=10*2*3=60$

Пример 9: вычислить: $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}=1{,}25$

Пример 10: вычислить: $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{4}{3}$

Пример 11: вычислить: $(\sqrt{3})^4=\sqrt{3^4}=\sqrt{81}=9$

Пример 12: $(\sqrt[3]{2})^6=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{2^3*2^3}=2*2=4$

Пример 13: вычислить: $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

С другой стороны $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$

Пример 14: $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[10]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2$

Пример 15: вычислить: $\sqrt[5]{8}*\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8*4}=\sqrt[5]{32}=2$

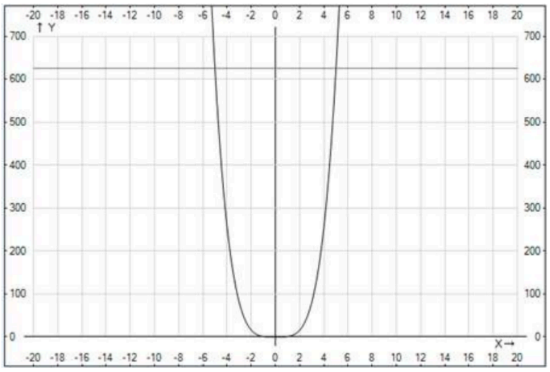
Пример 16: $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{5*16+1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$

Пример 17: $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[8]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$

Пример 18: решить уравнение $x^4=625$;

Решение. $x=\pm\sqrt[4]{625}=\pm5$ т. к. степень функции четная

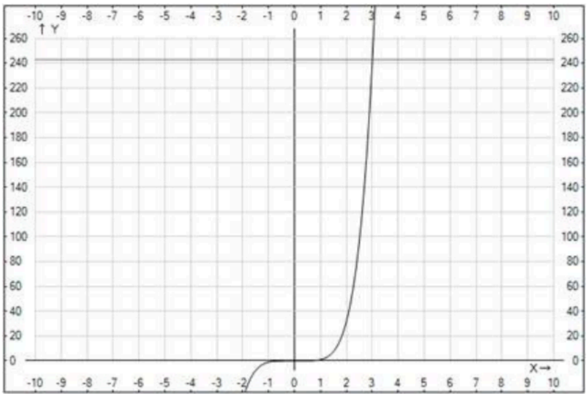
Ответ. $x=\pm5$.



Пример 19: решить уравнение $x^5 = 243$;

Решение. $x = \sqrt[5]{243} = 3$ т. к. степень функции нечетная;

Ответ. $x = 3$.



Вопросы для закрепления:

1. С каким математическим понятием мы работали сегодня – корень n–ой степени
2. Что мы применяли для вычислений корня n–ой степени – свойства
3. Сколько корней имеет уравнение x^n=a, если n – нечетное число – один корень
4. Сколько корней имеет уравнение x^n=a, если n –четное число – зависит от а:

если а – отрицательное, то

если а = 0, то

если а – положительное, то

Для самостоятельного решения:

1. Вычислить: $\sqrt[4]{0,0625}$; $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{0,008}$; $\sqrt{\frac{1}{25}}$
2. Вычислить: $(\sqrt{3})^6$; $(\sqrt{3})^7$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt[3]{8^2}$; $(\sqrt[4]{2})^8$
3. Вычислить: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[2]{1024}}$; $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[7]{a^5}}}$; $\sqrt{\sqrt[6]{\sqrt{b^4}}}$

Домашнее задание:

1. Законспектировать основные теоретические сведения.
2. Ответить на вопросы для закрепления

3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463

§6 с. 39-46, №119 (3,4), №125 (3)

Выполненную работу необходимо сфотографировать и отправить на почтовый ящик pushistaV@yandex.ru, Бережная Валерия Александровна (VK)

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСЫВАЕМ РАБОТУ НА ПОЛЯХ + в сообщении указываем дату/группу/ФИО