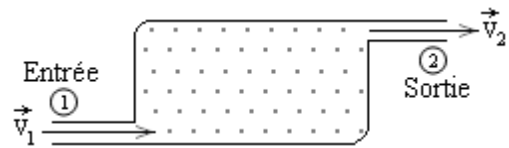


TD de Thermodynamique II**Série n° 3****Exercice 3.1 : Ecoulement d'un fluide**

Dans un volume de contrôle Σ , un fluide pénètre en **1** à la vitesse v_1 et à l'altitude z_1 et ressort en **2** à la vitesse v_2 et à l'altitude z_2 (figure ci-contre).

Entre les instants t et $t + dt$, une masse dm_1 de fluide entre dans le volume de contrôle Σ et une masse dm_2 en ressort.



Le système, délimité par la frontière Σ , reçoit de l'extérieur une énergie chaleur δQ_e et une énergie travail δW_e autre que le travail des forces de pression.

- 1) Déterminer la variation d'énergie interne totale entre les instants t et $t + dt$.
- 2) En déduire qu'en régime permanent, et si le système ne reçoit de l'extérieur ni chaleur ni travail, on a :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

- 3) Déduire la vitesse v d'écoulement d'un gaz parfait à la sortie d'un mince tube horizontal, si la vitesse du gaz à l'entrée de Σ est négligeable, et ses températures sont $T_1 = 300$ K à l'entrée et $T_2 = 295$ K à la sortie.

Données : Masse molaire du gaz : $M = 28$ g.mol⁻¹ ; Rapport des chaleurs spécifiques : $\gamma = c_p/c_v = 7/5$;
Constante universelle des gaz parfaits : $R = 8,314$ J.mol⁻¹.K⁻¹.

Exercice 3.2 : Chaleur latente de vaporisation

Un cylindre muni d'un piston susceptible de se déplacer sans frottement contient une mole de vapeur d'eau à l'état surchauffée. Les parois du cylindre sont conductrices d'énergie chaleur et sont placées dans un bain thermostaté dont on peut régler la température. La vapeur d'eau pourra être assimilée à un gaz parfait jusqu'à l'état de saturation.

- 1) La température étant maintenue constante à $T_0 = 300$ K, on comprime la vapeur de manière réversible et isotherme du volume $V_0 = 3$ m³ au volume $V_1 = 0,63$ m³. La vapeur se trouve alors partiellement liquéfiée et la pression est $P_1 = 1300$ Pa.

a- Calculer le volume V'' où apparaît la première gouttelette de liquide.

b- Déterminer l'énergie travail mise en jeu lors de la compression de la vapeur

c- Le volume massique de l'eau liquide est $v = 1$ cm³.g⁻¹, calculer en mole, la quantité de vapeur d'eau dans l'état P_1, V_1 .

- 2) Le volume étant fixé à V_1 , on élève la température de T_0 à T . La chaleur latente de vaporisation de l'eau est

supposée fonction linéaire de la température : $\ell = aT + b$ ($a = -48,66 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $b = 56587 \text{ J.mol}^{-1}$)

a- En négligeant le volume molaire de l'eau liquide devant celui de la vapeur, montrer que la pression de

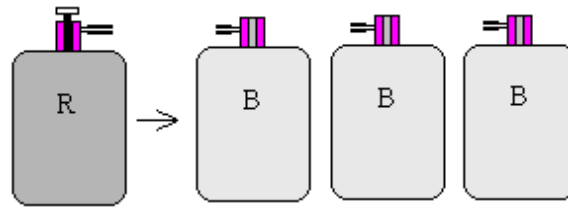
vapeur saturante est liée à la température par la relation :
$$\ln P_s = A - \frac{B}{T} + C \ln T$$

b- Trouver une relation donnant la température T_2 à laquelle la phase liquide disparaît (on calculera une valeur approchée de T_2 en posant $T_2 = T_0 + \delta T$ et en considérant $\delta T \ll T_0$).

Exercice 3.3 : Remplissage de bouteilles de gaz

Un réservoir métallique indéformable de volume $V_0 = 20 \text{ l}$ contient une masse $m_0 = 12 \text{ kg}$ de Fréon 12 (CF_2Cl_2) à la température $T_0 = 10^\circ\text{C}$.

1) Déterminer l'état thermodynamique (P_0, v_0, T_0, h_0) du Fréon 12 en ce point M_0 .



Comme indiqué sur la figure, le réservoir R sert pour remplir en vapeur de Fréon 12 saturée, une par une, des bouteilles de même volume V_0 et contenant initialement du Fréon 12 à la température T_0 et sous une pression $P_b = 1 \text{ bar}$ chacune. Ces remplissages se font à la même température T_0 pour une ouverture du robinet r jusqu'à équilibre de pression.

2) Déterminer l'état thermodynamique (P_1, v_1, h_1) du fluide dans le réservoir après le remplissage d'une bouteille. Calculer la masse de Fréon 12 restant dans R.

3) Calculer le nombre maximum n de bouteilles à remplir en vapeur de Fréon 12 saturée.

4) Déterminer l'état thermodynamique (P_2, v_2, h_2) du fluide dans le réservoir R après le remplissage des n bouteilles. Calculer la masse de Fréon 12 restant dans le réservoir.

5) Le réservoir R est ensuite mis en communication, encore une fois, avec une autre bouteille identique aux précédentes, déterminer l'état thermodynamique (P_3, v_3) du fluide dans le réservoir R.

6) Déterminer qualitativement, sur le diagramme P - v , la position des points M_0, M_2 et M_3 représentatifs des états du fluide.

La vapeur de Fréon 12 peut être assimilée à un gaz parfait.

On donne : masse molaire du Fréon 12 : $M = 121 \text{ g.mol}^{-1}$;

constante molaire universelle des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Etat de saturation du Fréon 12 à $T = 10^\circ\text{C}$:

T ($^\circ\text{C}$)	P (bar)	v' ($\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$)	v'' ($\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$)	h' (kJ.kg^{-1})	h'' (kJ.kg^{-1})
10	4,23	$7,34.10^{-4}$	$4,2.10^{-2}$	428	578

Corrigé

Exercice 3.1 :

1. L'application du premier principe de la thermodynamique (ou principe de conservation de l'énergie) au fluide (système ouvert) contenu dans le volume de contrôle Σ , s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Energie } dE_1 & & \text{Chaleur } Q_e \text{ et} & & \text{Energie } dE_2 & & \text{Energie } dE \\ \text{qui pénètre} & + & \text{travail } W_e \text{ reçus} & = & \text{qui quitte} & + & \text{accumulée à} \\ \text{dans } \Sigma \text{ en (1)} & & \text{du milieu extérieur} & & \Sigma \text{ en (2)} & & \text{l'intérieur de } \Sigma \end{array}$$

L'énergie accumulée à l'intérieur de Σ entre les instants t et $t + dt$ est donc donnée par la relation-bilan :

$$dE = dE_1 - dE_2 + \delta W_e + \delta Q_e \quad (1)$$

avec :

$$dE_1 = \underbrace{u_1 dm_1}_{\substack{\text{énerg} \\ e \\ \text{interne}}} + \underbrace{\frac{1}{2} dm_1 v_1^2}_{\substack{\text{énerg} \\ e \\ \text{cinétiq} \\ ue}} + \underbrace{g z_1 dm_1}_{\substack{\text{énerg} \\ e \\ \text{potentielle}}} + \underbrace{p_1 v_1 dm_1}_{\substack{\text{travail des} \\ \text{forces de} \\ \text{pression}}} \quad (2)$$

De même :

$$dE_2 = u_2 dm_2 + \frac{1}{2} dm_2 v_2^2 + g z_2 dm_2 + p_2 v_2 dm_2 \quad (3)$$

La relation (1) s'écrit donc, compte tenu de (2) et (3), et en introduisant les enthalpies massiques

$$h_1 = u_1 + p_1 v_1 \text{ et } h_2 = u_2 + p_2 v_2 :$$

$$dE = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 \right) dm_1 - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \right) dm_2 + \delta W_e + \delta Q_e \quad (4)$$

2. En régime permanent :

- le débit massique du fluide est constant $\rightarrow dm_1 = dm_2 = dm$;
- il ne peut donc y avoir d'accumulation d'énergie $\rightarrow dE = 0$;
- le fluide ne reçoit de l'extérieur ni chaleur ni travail $\rightarrow \delta W_e = 0$ et $\delta Q_e = 0$.

$$0 = \left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 \right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \right) \right] dm$$

La relation (4) se simplifie alors :

soit :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \quad (5)$$

Au cours de cet écoulement permanent, il y a donc conservation de la quantité : $h + \frac{v^2}{2} + g z = \text{cte}$.

3. Puisque la tuyère est horizontale ($z_1 = z_2$), et puisque $v_1 \approx 0$, la relation (5) s'écrit : $h_1 = h_2 + \frac{v^2}{2}$

Donc la vitesse d'éjection du gaz est : $v = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$.

Si T_∞ est la température moyenne du milieu extérieur et h_∞ son enthalpie massique moyenne, on a :

à l'entrée 1 : $\Delta h_1 = h_1 - h_\infty = c_p (T_1 - T_\infty)$

et à la sortie 2 : $\Delta h_2 = h_\infty - h_2 = c_p (T_\infty - T_2)$

d'où : $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = h_1 - h_2 = c_p (T_1 - T_2)$.

La chaleur massique à pression constante $c_p = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{R}{M}$: $\rightarrow h_1 - h_2 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{R}{M} (T_1 - T_2)$

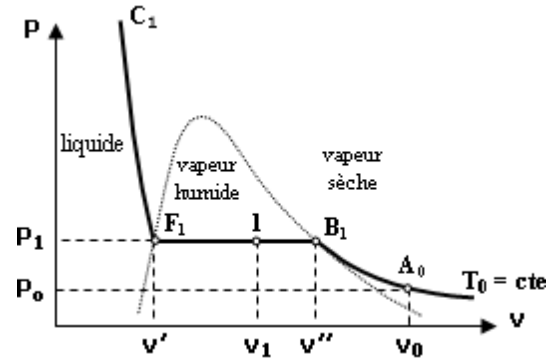
Donc : $v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M} (T_1 - T_2)}$ A.N. : $v = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{7}{5}}{\frac{7}{5}-1} \frac{8,314}{28 \cdot 10^{-3}} (300 - 295)} = 102 \text{ m/s}$

Exercice 3.2 :

1.a. Au point A_0 l'eau se trouve à l'état vapeur. La première goutte de liquide apparaît en B_1 à l'état de vapeur saturée. Comme la vapeur d'eau pourra être assimilée à un gaz parfait jusqu'à l'état de saturation, on a :

$$P_0 V_0 = P_1 V'' = nRT_0$$

Soit : $V'' = \frac{nRT_0}{P_1} = \frac{1 \times 8,314 \times 300}{1300} = 1,92 \text{ m}^3$



$$W_{01} = - \int_{v_0}^{v_1} P dv = - \int_{v_0}^{v''} P dv - \int_{v''}^{v_1} P dv = -nRT_0 \ln\left(\frac{V''}{V_0}\right) - P_1 (V_1 - V'') = 2790 \text{ J}$$

1.b.

1.c. Quantité de vapeur à l'état (P_1, V_1)

En 1, la masse de vapeur est m''_1 , le titre du mélange en vapeur est : $x = \frac{m''_1}{m} = \frac{V_1 - V'}{V'' - V'} = \frac{V_1 - Mv'}{V'' - Mv'}$

Puisqu'en général, le volume de l'eau liquide V' est faible devant le volume de la vapeur comprimée V_1 ($V' \ll V_1$), et devant le volume de la vapeur d'eau V'' ($V' \ll V''$) :

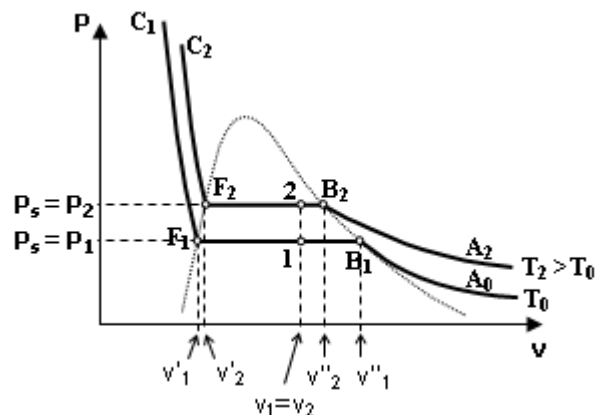
$$\rightarrow x = \frac{m''_1}{m} \approx \frac{V_1}{V''} = \frac{0,63}{1,92} = 0,328$$

2.a.

A partir de l'état du liquide saturé (point F), l'eau s'évapore progressivement jusqu'à l'état de vapeur saturée (point B). La chaleur latente de vaporisation de l'eau à la température T est donnée par :

$$L_{\text{vap}} = m \cdot \Delta s_{\text{vap}} = T \cdot \Delta S = T \cdot (S_B - S_F) \text{ (J)}$$

S_B et S_F sont les entropies (J.K^{-1}) respectivement de la vapeur et du liquide à l'état saturé.



Le long de la courbe de saturation $A_1B_1F_1C_1$, la température est $T_0 = \text{cte}$.

Le long du palier B_1-F_1 : la pression de saturation $P_s = P_1 = \text{cte}$, l'énergie libre de Gibbs : $G_1 = G_{B1} = G_{F1} = \text{cte}$, et sa différentielle : $dG_1 = V dP_s - S dT = 0$.

De même, long de la courbe de saturation $A_2B_2F_2C_2$, la température $T_2 = \text{cte}$.

Le long du palier B_2-F_2 : la pression de saturation $P_2 = P_1 + dP_s = \text{cte}$, l'énergie libre de Gibbs : $G_2 = G_1 + dG_1 = \text{cte} \Rightarrow G_{B1} + dG_{B1} = G_{F1} + dG_{F1} = \text{cte}$

$$\Rightarrow dG_{B1} = dG_{F1} \Rightarrow V_{B1} dP_s - S_{B1} dT = V_{F1} dP_s - S_{F1} dT \Rightarrow \frac{dP_s}{dT} = \frac{S_{B1} - S_{F1}}{V_{B1} - V_{F1}}$$

A la température T, la chaleur latente de vaporisation est donnée par :

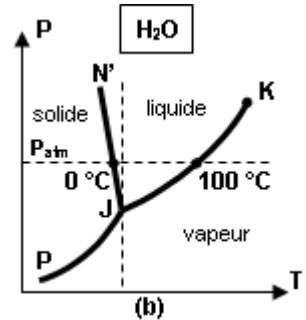
$$L_{vap} = m \cdot \Delta S_1 = T \cdot \Delta S_1 = T \cdot (S_{B1} - S_{F1}) \Rightarrow \frac{dP_s}{dT} = \frac{S_{B1} - S_{F1}}{V_{B1} - V_{F1}} = \frac{L_{vap}}{T(V_{B1} - V_{F1})}$$

$$\Rightarrow L_{vap} \approx T(V_{B1} - V_{F1}) \frac{dP_s}{dT} \quad \text{Formule de Clausius Clapeyron}$$

Le rapport $\frac{dP_s}{dT}$ représente le coefficient angulaire de la courbe d'équilibre liquide-vapeur (branche JK sur le diagramme P-T).

Le volume du liquide $V_{F1} = V'$ est négligeable devant le volume de la vapeur $V_{B1} = V''$:

$$\Rightarrow L_{vap} \approx T(V_{B1}) \frac{dP_s}{dT}$$



Le fluide étant assimilé à un gaz parfait : $P_1 V_{B1} = nR T \Rightarrow V_{B1} = \frac{nR T}{P_1}$

$$\Rightarrow L_{vap} = \frac{nR T^2}{P_s} \frac{dP_s}{dT} \Rightarrow \frac{dP_s}{P_s} = \frac{L_{vap}}{nR T^2} dT$$

La chaleur latente de vaporisation de l'eau est supposée fonction linéaire de la température :

$$L_{vap} = a T + b : \Rightarrow \frac{dP_s}{P_s} = \frac{L_{vap}}{nR T^2} dT = \frac{aT + b}{nR T^2} dT = \left(\frac{a}{nR T} + \frac{b}{nR T^2} \right) dT$$

$$\Rightarrow \frac{dP_s}{P_s} = \left(\frac{a}{nR T} + \frac{b}{nR T^2} \right) dT \Rightarrow \ln P_s = \frac{a}{nR} \ln T - \frac{b}{nR T} + \text{cte}$$

$$\text{Soit : } \ln P_s = C \ln T - \frac{B}{T} + A \quad \text{avec : } C = \frac{a}{nR} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{nR}$$

$$\mathbf{2.b.} \quad \text{Le long du palier } B_1-F_1 : P_s = P_1 \text{ et } T = T_0 \Rightarrow \ln P_1 = C \ln T_0 - B/T_0 + A$$

$$\text{Le long du palier } B_2-F_2 : P_s = P_2 \text{ et } T = T_2 \Rightarrow \ln P_2 = C \ln T_2 - B/T_2 + A$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P_2}{P_1} = C \ln \frac{T_2}{T_0} - B \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} \right)$$

D'autre part, au point B_1 : $P_1 V'' = nRT_0$, et au point B_2 : $P_2 V_1 = nRT_2$

$$\text{Soit : } \frac{P_2}{P_1} = \frac{V'' T_2}{V_1 T_0} \approx \frac{T_2}{x \cdot T_0} \Rightarrow (1 - C) \ln \frac{T_2}{T_0} = \ln x - B \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$T_2 = T_0 + \delta T \text{ et } \delta T \ll T_0 \Rightarrow$$

$$\ln \frac{T_2}{T_0} = \ln \left(1 + \frac{\delta T}{T_0} \right) = \frac{\delta T}{T_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta T}{T_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta T}{T_0} \right)^3 + \dots \approx \frac{\delta T}{T_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} \right) \approx \frac{-\delta T}{T_0^2}$$

$$\delta T = \frac{T_0 \cdot \ln x}{1 - C - \frac{B}{T_0}}$$

$\Rightarrow$

$$A.N. : \quad C = \frac{a}{nR} = -\frac{48,66}{1,8,314} = -5,853 \quad B = \frac{b}{nR} = \frac{56587}{1,8,314} = 6806,2 \text{ K}$$

$$\delta T = \frac{300 \cdot \ln 0,328}{1 + 5,853 - \frac{6806,2}{300}} = 21,12 \text{ K}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\delta T}{T_o} = \frac{21,12}{300} \approx 0,07 \ll 1$$

Soit : $\Rightarrow$ ce qui justifie l'hypothèse faite pour linéariser la résolution à savoir : $\delta T \ll T_o$.

Exercice 3.3 :

1°) Etat thermodynamique (P_o , v_o , T_o , h_o) :

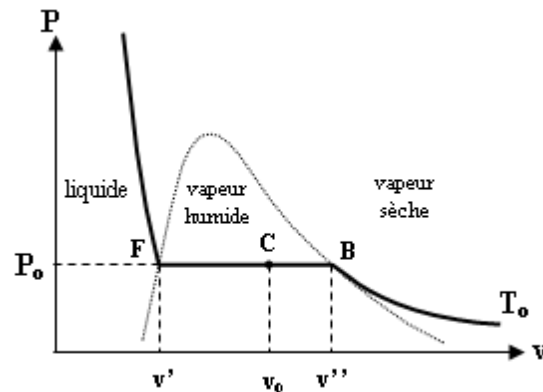
$$V_o = m_o v_o \quad \Rightarrow$$

$$v_o = \frac{V_o}{m_o} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{12} = 1,667 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

D'après le tableau, à la température

$$T_o = 10^\circ \text{C} = 283,15 \text{ K}$$

- le volume massique de la phase liquide est :
 $v' = 7,34 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$,
- le volume massique de la phase vapeur est :
 $v'' = 0,042 \text{ m}^3/\text{kg}$.



Le volume massique v_o est donc compris entre v' et v'' , le système se présente donc sous forme de vapeur humide, et $P_o = P_s(T_o) = 4,23 \text{ bar}$.

$$x = \frac{m''}{m} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} = \frac{v_o - v'}{v'' - v'}$$

En désignant par le titre du mélange en vapeur,

- le volume massique moyen v_o s'écrit : $v_o = v' + (v'' - v') \cdot x$;

Et par similitude :

- l'enthalpie massique moyenne h_o s'écrit : $h_o = h' + (h'' - h') \cdot x$;
- l'énergie interne massique moyenne u_o s'écrit : $u_o = u' + (u'' - u') \cdot x$;
- l'entropie massique moyenne s_o s'écrit : $s_o = s' + (s'' - s') \cdot x$;

$$x = \frac{v_o - v'}{v'' - v'} = \frac{1,667 \cdot 10^{-3} - 7,34 \cdot 10^{-4}}{4,2 \cdot 10^{-2} - 7,34 \cdot 10^{-4}} = 0,02254$$

avec

$$\Rightarrow h_o = 428 + (578 - 428) \cdot 0,02254 = 431,381 \text{ J/g}$$

2°) Etat du système après remplissage d'une bouteille :

Le volume d'une bouteille est $V_b = 20 \text{ l}$.

La pression du gaz contenu initialement dans la bouteille est : $P_b = 1 \text{ bar}$.

La constante massique du gaz parfait est : $r = \frac{R}{M} = 0,0687 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

$$m_b = \frac{P_b V_b}{r \cdot T_o} = 102,8 \text{ g}$$

La masse de Fréon contenu initialement dans la bouteille est :

Le remplissage se fait à la température constante T_o jusqu'à l'équilibre de pression

$$\Rightarrow P_1 = P_s(T_o) = 4,23 \text{ bar}$$

Après remplissage, la masse de vapeur saturée contenue dans la 1^{ère} bouteille remplie est :

$$m'_b = \frac{P_1 \cdot V_b}{r \cdot T_o} = 434,84 \text{ g}$$

la masse de Fréon (vapeur) qui est passée dans la bouteille est : $m' = m'_b - m_b = 332,04 \text{ g}$,

et la masse de Fréon 12 restant dans le réservoir est donc $m_1 = m_o - m' = 11,668 \text{ kg}$

$$v_1 = \frac{V_o}{m_1} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{11,668} = 1,714 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

Le nouveau volume massique du réservoir R est donc :

$$x_1 = \frac{v_1 - v'}{v'' - v'} = 0,02375$$

Le nouveau titre du mélange en vapeur est :

L'enthalpie massique moyenne est : $h_1 = h' + (h'' - h') \cdot x_1 = 431,563 \text{ J/g}$

3°) Le nombre maximum de bouteilles à remplir :

Soit N le nombre maximum de bouteilles à remplir avec de la vapeur saturée.

La masse totale de Fréon 12 contenue dans le réservoir + les N bouteilles à remplir est :

$$m_t = m_o + N \cdot m_b$$

Et le volume total sera : $V_t = V_b + N \cdot V_b = (N+1) \cdot V_b$

La vapeur étant assimilée à un gaz parfait :

$$\Rightarrow P_s \cdot V_t = (N+1) \cdot P_s \cdot V_b = (m_o + N \cdot m_b) \cdot r \cdot T_o$$

$$N = \frac{m_o \cdot r \cdot T_o - P_s \cdot V_b}{P_s \cdot V_b - m_b \cdot r \cdot T_o} = 34,83$$

Soit :

$$\Rightarrow \text{le nombre maximum de bouteilles à remplir est } n = 34.$$

4°) Etat du système en 2 :

Les 34 bouteilles contenaient initialement une masse totale de $m_{34b} = 34 \times 102,8 = 3,4952 \text{ kg}$

Après remplissage, les 34 bouteilles contiennent une masse : $m'_{34b} = 34 \times 434,84 = 14,785 \text{ kg}$. La

masse de gaz ayant servi pour le remplissage est : $m'_2 = m'_{34b} - m_{34b} = 11,29 \text{ kg}$

La masse de Fréon 12 restant dans le réservoir est donc : $m_2 = m_o - m'_2 = 0,71 \text{ kg} = 710 \text{ g}$

$$v_2 = \frac{V_o}{m_2} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{0,710} = 28,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

Le nouveau volume massique du réservoir R est donc :

$$x_2 = \frac{v_2 - v'}{v'' - v'} = 0,665$$

Le nouveau titre du mélange en vapeur est :

$$\Rightarrow \text{le mélange contient } 66,5 \% \text{ de vapeur, contre } 33,5 \% \text{ de liquide.}$$

L'état du système en 2 est donc :

$$P_2 = P_s = 4,23 \text{ bar}$$

$$T_2 = T_o = 283,15 \text{ K}$$

$$v_2 = 0,0282 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$h_2 = h' + (h'' - h') \cdot x_2 = 527,75 \text{ J/g.}$$

5°) Remplissage d'une bouteille supplémentaire :

Volume totale = volume du réservoir + volume de la bouteille supplémentaire $\Rightarrow V_3 = 2 \cdot V_b$.

Masse totale : $m_3 = m_2 + m_b = 710 + 102,8 = 812,8 \text{ g}$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{V_3}{m_3} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,8128} = 49,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

Le volume massique v_3 est supérieur au volume massique de la vapeur saturée v'' , le point 3 représentatif du système se trouve donc dans le domaine de la vapeur sèche, et :

$$P_3 = \frac{m_3 \cdot R \cdot T_0}{V_3} = 3,95 \text{ bar}$$

6°) Représentation graphique :

