Concours interne de recrutement de professeurs agrégés
Sciences Physiques
Session de 2004
CORRIGÉ

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE RECHERCHE DE PLANÈTES EXTRA-SOLAIRES.

A. Influence de la présence d'une planète sur le mouvement de l'étoile

A.I. Mouvement d'une planète autour d'une étoile.

1.a.
L'étoile est à répartition sphérique de masse donc tout plan passant par E est un plan de symétrie ; $\vec{g}$ est donc porté par l'intersection de ces deux plans : $\vec{g}(P) = g\,\vec{e}_r$

L'invariance par rotation implique que $\vec{g}(P) = g(r)\,\vec{e}_r$. On utilise le théorème de Gauss pour la gravitation, la surface fermée est une sphère de centre E, de rayon r.

$$g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G \iiint_V \rho.d\tau = -4\pi G M$$

$\vec{g}(P) = -(GM/r^2)\,\vec{e}_r$
Tout se passe comme si la masse de l'étoile est concentrée au centre.
1.b.

$= -(mMG/r^2)\,\vec{e}_r$
1.c.

Théorème du moment cinétique en E dans R_E : $d\sigma_E/dt = \mathcal{M}_E = \vec{0}$ (force centrale)

donc $\sigma_E = m\vec{C}$ est un vecteur constant. La trajectoire se situe dans un plan perpendiculaire à $\vec{C}$ et passant par E.
1.d.

$v_P = 2\pi a/T$; $v_p = (2\pi G M/T)^{1/3}$; $a^3 = G MT^2/4\pi^2$

2.
AN : $M_S = 2{,}0\times10^{30}$ kg ; $v_P = 3{,}0\times10^4$ m.s^{-1}

A.II. Référentiel barycentrique.

1. Le référentiel barycentrique est un référentiel dont le repère d'espace de centre I est en translation par rapport au référentiel galiléen (R_{gal}) avec la vitesse (I/R_{gal}). Ce référentiel est en général non-galiléen. Dans le cas où le système étoile- planète est isolé (I/R_{gal}) est constante ; le référentiel (R^*) est alors galiléen.
2.a. $\vec{v}^*_I = \vec{0}$ donc $M\vec{v}^*_E + m\vec{v}^*_P = \vec{0}$

2.b.
L'orbite de l'étoile est circulaire de centre I , homothétique, de rapport –m/M, de celle de la planète.
2.c.
Quand m devient très petit devant M, le mobile réduit de masse μ= mM/(m+M) tend vers la planète de masse m, le rayon de la trajectoire de l'étoile tend vers zéro, on revient au cas précédent où l'étoile est immobile.

$v_P^* = v_P$ $\quad v_E^* = (m/M)\, v_P^*$ $\quad v_E^* = 2\pi\left(\frac{GM}{4\pi^2 T}\right)^{1/3} x \frac{m}{M}$

3.
$m/M = 3{,}01\times10^{-3}$; $m = 7{,}8\times10^{27}$ kg ; $m = 3{,}9\ M_J$

B. Obtention du spectre visible de l'étoile.

B.I. Interférences lumineuses à deux ondes.

1.a.
$I_1 = k\, s_{10}^2/2$
$s^2 = s_{10}^2\cos^2(\omega t+\phi_1)+s_{20}^2\cos^2(\omega t+\phi_2)+2s_{10}\cos(\omega t+\phi_1)s_{20}\cos(\omega t+\phi_2)$
$I = I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\ \langle\cos(\phi)\rangle$
1.b.
On obtient des interférences en M lorsque ϕ = constante dans le temps.
1.c.
Pour des ondes incohérentes la moyenne temporelle de cos ϕ est nulle donc $I = I_1+I_2$.
Les intensités des deux sources s'ajoutent en tout point du champ.
1.d
$I(M) = 2I_0(1+\cos\phi)$

I(M) est une sinusoïde autour de la valeur moyenne $2I_0$ de période 2π.

Pour $\phi = 2p\pi$ avec p entier on a : $I_{Max} = 4I_0$

2.
Définition de la différence de marche : $\delta = (S_2M - S_1M)$
$\delta = [(x+a/2)^2+y^2+D^2]^{1/2} - [(x-a/2)^2+y^2+D^2]^{1/2}$ avec les approximations on obtient : $\delta = ax/D$

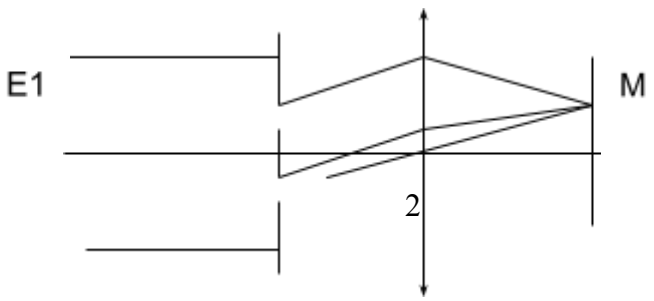
$\phi = 2\pi\,\delta/\lambda$; $I(M) = 2I_0[1+\cos(2\pi\,\delta/\lambda)]$
Au voisinage de O on observe des franges rectilignes brillantes, parallèles à l'axe Oy .
L'interfrange est l'intervalle entre deux points de même éclairement : $i = \lambda D/a$

Application numérique : on mesure 10i (quelques cm), on donne la longueur d'onde(visible) et D(ordre du mètre) puis par exemple on calcule a (quelques dixièmes de mm).

Dispositifs expérimentaux : miroirs de Fresnel éclairés par une source ponctuelle ; miroir de Lloyd ; bilentille de Billet ; Michelson éclairé par une source ponctuelle, trous d'Young.

B.II. Mesure de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double.

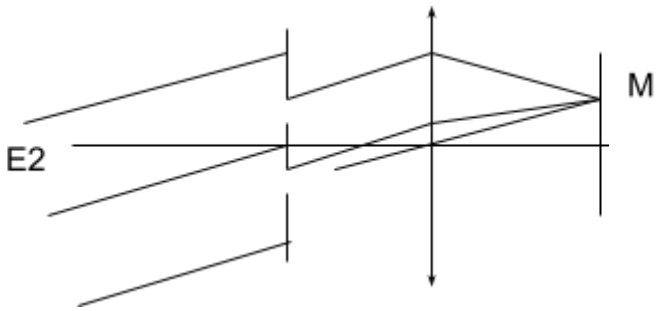
1.



2.
Dans les conditions de Gauss, la lentille est stigmatique pour des couples de points conjugués. Le chemin optique est identique pour tous rayons passant par un point A et son image A'.
3.
Dans les conditions de Gauss sin θ = tan θ = θ en radians d'où

$\delta = a\theta = ax/f'$ $I_1(x)= 2I_0(1+ \cos 2\pi x/i)$ avec $i = \lambda f'/a$

4.



Il y a une différence de marche avant les trous: $\delta' = \pm a\,\alpha$

$I_2(x)=2I_0(1+ \cos 2\,\pi/\lambda(ax/f' \pm a\,\alpha)$. On obtient la même figure d'interférence que précédemment mais décalée d'une quantité $x_0 = \pm\,\alpha\, f'$.

5. $I = I_1(x)+I_2(x)$. La première disparition ou brouillage des franges s'effectue pour $x_0 = i/2$ soit $\alpha = \lambda/2a_1$

AN $\alpha = 9{,}68.10^{-7}$radian =0.20 seconde d'arc.

B.III. Fentes de Young et influence de la diffraction.

1. Les fentes sont parallèles à O'Y donc on a une superposition des figures d'interférences. Les franges sont plus lumineuses. L'interfrange est inchangée.

2.a.

$$A = a_0 \int_{-b/2}^{+b/2} h \exp(-i2\pi x \sin\theta)/\lambda dx$$

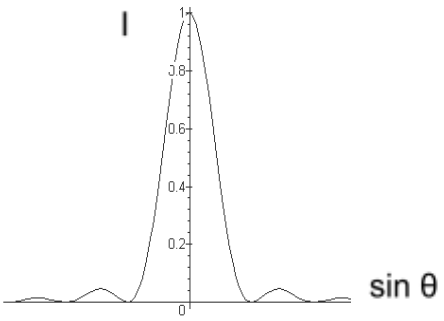
$$A = a_0\, h\, b\, \frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{(\pi b \sin\theta/\lambda)}$$

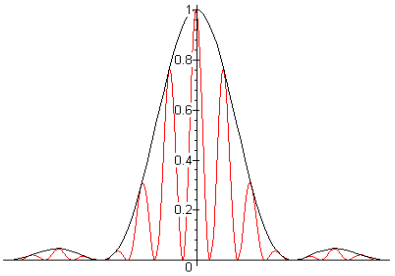
2.b. $I = A\,A^* = I_o \left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{(\pi b \sin\theta/\lambda)}\right]^2$

2.c.
Premier minimum : $(\pi b \sin\theta)/\lambda = \pi$; $\sin\theta = \lambda/b$

2d.

$I = 2I_0 \left[\frac{\sin(\pi x/3{,}5i)}{(\pi x/3{,}5i)}\right]^2 (1+\cos 2\pi x/i)$ on observe 7 franges brillantes dans la tache centrale.





B.IV. Réseau

B.IV.1. Étude d'un réseau plan par transmission :

1.a. La différence de marche entre deux faisceaux successifs est $\delta = a(\sin\theta_k - \sin\theta_i)$

$\delta = k\lambda$ avec $a = 10^{-3}/n$

1.b. $\theta_i=0$; $\sin\theta_k = k\lambda/a$; $-1<\sin\theta_k<1$;

On observe complètement les ordres : -2, -1, 0, 1, 2

On observe un recouvrement à partir du deuxième ordre :

Pour le rouge de l'ordre 2 : $\theta_2=79,5°$ et pour le violet de l'ordre 3 : $\theta_3=54°$

B.IV.2. Pouvoir de résolution.

2.a.

$a\cos\theta_k\, d\theta_k = kd\lambda$

2.b.

La largeur du faisceau est $b = L\cos\theta_k = Na\cos\theta_k$

La demi largeur du faisceau de diffraction est $d\theta = \lambda/b = \lambda/Na\cos\theta_k$

2.c.

Critère de Rayleigh : $d\theta_k = d\theta$; $nkd\lambda = \lambda/Na\cos\theta_k$; $R = kN$

N est le nombre de traits utiles : $N=L/a = nL$

Pour avoir un bon pouvoir de résolution : k élevé et N le plus grand possible.

2.d.

Dans ce type de réseau les spectres sont dans la tache de diffraction d'un trait, le maximum d'intensité est pour l'ordre zéro, les ordres suivants sont moins lumineux. D'autres réseaux de type échelette permettent d'obtenir le maximum d'intensité dans un ordre élevé.

C. Déplacement Doppler des raies émises par l'étoile.

C.I. Effet Doppler.

1. $t_1\, c = x_E - V_0\, t_1$

2. La durée est t_2-t ; $c(t_2-t) = x_E + tV_E - V_0t_2$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1+\frac{V_E}{c}}{1+\frac{V_0}{c}}\, t\ ;$$

$$T' = \frac{1+\frac{V_E}{c}}{1+\frac{V_0}{c}}\, T$$; pour $V_E = V_0$ on a $T=T'$

4. $T' = (1+\frac{V_E - V_O}{c})T$; $\Delta T/T$ ne dépend que de la vitesse relative de l'étoile par rapport à l'observateur, ce résultat est lié à la relativité restreinte où la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel galiléen.
5. $\Delta T/T = \beta = \Delta\lambda/\lambda$ on a la même relation qu'à la question précédente .

6. $V = 1{,}1\times10^6$ m.s^{-1}. L'amas s'éloigne $\Delta\lambda>0$
L'univers est en expansion.

C.II. Découverte d'une planète extrasolaire orbitant autour de τBootis.

1.a.
$\Delta\lambda/\lambda$ dépend du temps car :

- la vitesse de l'observateur par rapport au référentiel héliocentrique dépend du temps : mouvement diurne et annuel de la terre.
- $(\vec{V}_E)_R = (\vec{V}_I + \vec{V}^*_E)_R$ La vitesse radiale du centre d'inertie varie lentement, la vitesse radiale de l'étoile dans le référentiel barycentrique varie avec la période de rotation de la planète.

On les différencie par leur période.

1.b.

$\Delta\lambda/\lambda = (v^*_E/c)\cos(2\pi t/T+\phi)$

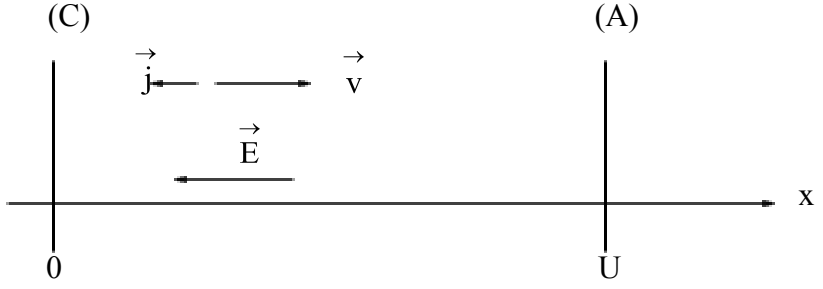
1.c.

$R = \lambda/\Delta\lambda = (1/10)(c/V^*_E) = 6{,}4\times10^4$
Il faut un spectroscope à très fort pouvoir de résolution, on utilise un système associant un réseau et un prisme dit à « dispersion croisée » où R peut atteindre 15×10^4
2.
$v_{RM} = v^*_E \sin i$
On peut obtenir la période de la planète, mais on mesure par cette méthode « m×sini » seulement.

ONDES GUIDÉES DANS LE DOMAINE CENTIMETRIQUE

D. Production des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences

D.I.1.



$$\begin{cases} \vec{j} = -ne\vec{v} = \rho\vec{v} \\ \dfrac{1}{2}m.v^2 = eV \\ \Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{j} = -\frac{I}{S}.\vec{e}_x \Rightarrow j = -\frac{I}{S}$$

D.I.2. $v = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$ et $\rho = -\dfrac{I}{Sv}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2V}{dx^2} - \dfrac{I}{\varepsilon_0 S}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}.V^{-1/2} = 0$

$V=Kx^p \Rightarrow$ $p(p-1)Kx^{p-2} - \dfrac{I}{\varepsilon_0 S}.\sqrt{\dfrac{m}{2e}} \times \dfrac{1}{\sqrt{K}}.x^{-p/2} = 0$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{4}{3} \quad \text{et} \qquad K = \left(\frac{9}{4}\frac{I}{\varepsilon_0 S}.\sqrt{\frac{m}{2e}}\right)^{2/3}$$

D.I.3. On fait x = a $\Rightarrow \quad I = \dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{2e}{m}}.\dfrac{\varepsilon_0 S}{a^2}.U^{3/2}$

$$\frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}.\varepsilon_0 = 2{,}35\times10^{-6}\,\text{SI} \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}232\ \text{A}$$

D.I.4. $v = \sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$ or $V \alpha x^{4/3}$ $\Rightarrow$ $v \alpha x^{2/3}$ $\Rightarrow$ $v = v_A.\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}$

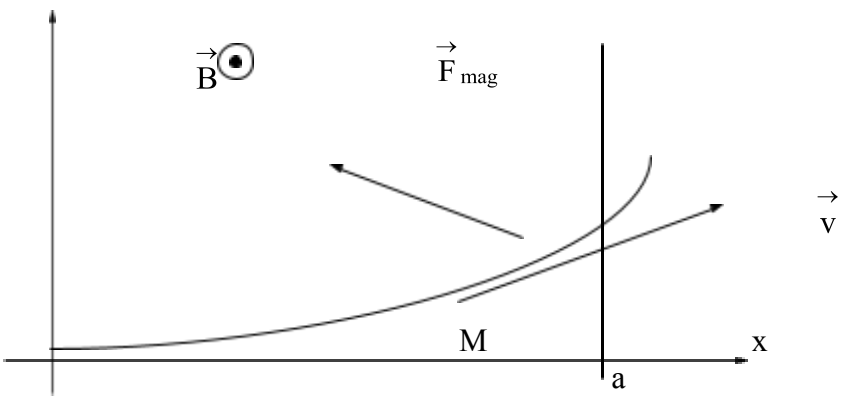
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_A}{a^{\frac{2}{3}}}x^{\frac{2}{3}} \qquad x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{v_A}{a^{\frac{2}{3}}}dt \qquad 3x^{\frac{1}{3}} = \frac{v_A}{a^{\frac{2}{3}}}t \Rightarrow 3a^{\frac{1}{3}} = \frac{v_A}{a^{\frac{2}{3}}}T \Rightarrow$$

$$T = 3\frac{a}{v_A} = 3a\sqrt{\frac{m}{2eU}} = 0{,}64\times10^{-9}\,\text{s}.$$

$f = \dfrac{1}{T} \sim$ GHz.

D.I.5. Diode à vide : antique phanotron d'EDISON.

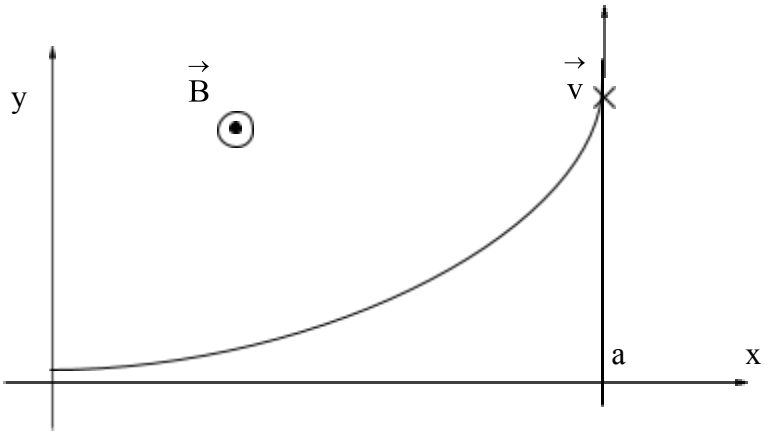
D.II.1.



$U<U_C$

D II 2

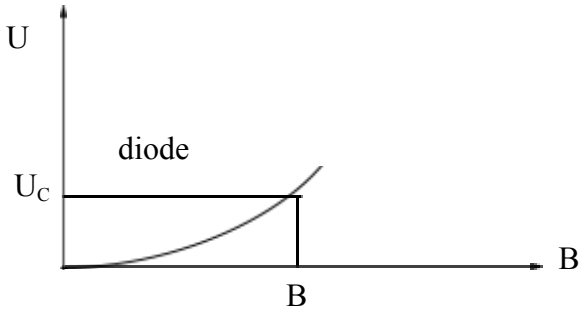
$U = U_C$



$$m\vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{eU}{ma} - e\dfrac{B}{m}\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = e\dfrac{B}{m}\dot{x} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \dot{y} = e\dfrac{B}{m}x$; $x = a$, $\dot{x} = 0 \Rightarrow v_A = \dfrac{eB}{m}a$ Or, $v_A = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$.

On égale les 2 expressions de v_A : $U_C = \dfrac{ea^2}{2m}B^2 = 8{,}89\times10^{11}B^2.a^2$: parabole de coupure.



U = 3 kV donne B = 0,015 T.
Un tel champ peut être créé par un aimant.

D.II.3. Oscillations à la fréquence $f \approx \dfrac{1}{T}$.
Naissance d'oscillations : c'est utile (c'est ce qu'on cherche à faire).

E. Guide d'onde rectangulaire et cavité.

E.I.1. Aluminium très bon conducteur ; ce n'est pas le cas de l'alumine, la pellicule d'or évite l'oxydation de l'aluminium.

E.I.2. Conditions aux limites (champ nul en certains points quel que soit le temps) impossibles à satisfaire par une onde plane

E.I.3.a. Comme $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$, $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = E(y)\exp i(\omega t - kz)\vec{e}_x$

- $\underline{\vec{E}} = \vec{0} \Rightarrow E''(y) + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E(y) = 0$

Solutions sinusoïdales puisque $\frac{\omega^2}{c^2}-k^2 > 0 \Rightarrow E(y) = A_1 \cos\alpha y + A_2 \sin\alpha y$.

E.I.3.b. Voir cours : champ électrique normal. En y = 0 ou y = b : $\vec{E} = \vec{E}_{\text{tan gentiel}} = \vec{0} \Rightarrow E(0)$

$E(b) = 0$.

$E(0) = E(b) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ et $\alpha.b = n\pi$.

Modes : $\underline{\vec{E}} = E_0^n \sin\left(n\frac{\pi}{b}y\right)\exp i(\omega t - kz)\vec{e}_x \qquad \vec{E} = E_0^n \sin\left(n\frac{\pi}{b}y\right)\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(n\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1 \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

E.I.3.c. x = 0 ou x = a, $\vec{E} \perp \text{parois} \quad \Rightarrow \quad \exists \text{ ch arg es surfaciques}$.

E.I.4.a. $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = kE_0 \sin\frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\pi}{b}E_0 \cos\frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{B}\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{k}{\omega}E_0 \sin\frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \\ B_z = \frac{\pi}{b\omega}E_0 \cos\frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

E.I.4.b. Voir cours. $B_y(0) = B_y(b) = 0$ continuité ; $B_z \neq 0 \Rightarrow \exists$ courants surfaciques.

NB (non demandé) : l'onde est TE car le champ électrique est perpendiculaire à Oz, direction de propagation.

Ce n'est pas une TM car le champ magnétique ne l'est pas : $\Rightarrow \exists\ B_z \neq 0$

E.I.5. $k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_c = \frac{\pi}{b}c$

$$f_c = \frac{c}{2b} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_c} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c}{2f_c} = 12{,}2 \text{ cm}$$

E.I.6.a. $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\Pi} \begin{cases} 0 \\ -\frac{\pi}{\mu_0 b\omega}(E_0)^2 \sin\frac{\pi y}{b}\cos\frac{\pi y}{b}\cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz) \\ \frac{k}{\mu_0\omega}(E_0)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)\cos^2(\omega t - kz) \end{cases}$

E.I.6.b. $<\vec{\Pi}>\begin{cases}0\\0\\\dfrac{k}{2\mu_0\omega}(E_0)^2\sin^2\dfrac{\pi y}{b}\end{cases}$ $<\Pi_z> \neq 0 \Rightarrow$ propagation de l'énergie selon Oz.

E.I.6.c. $P_m = \iint <\Pi z>\, dxdy = \dfrac{k}{2\mu_0\omega}(E_0)^2 a\int_0^b \sin^2\left(\dfrac{\pi}{b}y\right)dy = \dfrac{kab}{4\mu_0\omega}(E_0)^2$

$E_0 = 14600\ V.m^{-1}$

E.II.1. De même, comme $\vec{E} = E_x\vec{e}_x,\quad \operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x(y,z) = f(y)\times h(z)$

- $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f''(y)g(z) + f(y)g''(z) + \dfrac{\omega^2}{c^2}f(y)g(z) = 0$

$\left[\dfrac{f''}{f}\right](y) + \left[\dfrac{g''}{g}\right](z) = -\dfrac{\omega^2}{c^2} = \text{cons tan te}$ donc $\dfrac{f''(y)}{f(y)} = \alpha$ et $\dfrac{g''(z)}{g'z)} = \beta$.

f et g sont des exponentielles ou des fonctions sinusoïdales.

E.II.2. $\omega^2>0$. Par ailleurs, les conditions aux limites font qu'il ne peut s'agir que de fonctions sinusoïdales. Le champ électrique dans le métal conducteur supposé parfait est nul. Comme la composante tangentielle du champ électrique est continue, on en déduit :
f(0) = f(B) =g(0) = g(C) = 0 donc f(y) de la forme sin k_2y avec $k_2B = \pm\pi$ et g(z) de la forme sin k_3z avec $k_3C = m\pi$:

Modes ($\pm$, m) : $k_2 = \dfrac{\pm\pi}{B},\ k_3 = \dfrac{m\pi}{C}$ et $\omega^2 = c^2\left[\dfrac{\pm^2\pi^2}{B^2} + \dfrac{m^2\pi^2}{C^2}\right]$

E.II.3. Un mode : il peut y avoir des nœuds où le champ est nul et où il n'y a pas de cuisson.

F. « Modélisation d'une substance à réchauffer »

F.I. $q = -e \Rightarrow \vec{j} = nq\vec{v} \Rightarrow \vec{j}.\vec{E} = n\vec{v}\left(q.\vec{E}\right) = n\left(\vec{F}_{el}.\vec{v}\right) = nP_{el}$ soit $\dfrac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E}$

F.II. $\dfrac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \sigma.E^2 + \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}.\vec{E}.$ Si $\vec{P}$ est en phase avec $\vec{E}$, $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ est en quadrature et $<\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}.\vec{E}>= 0.$ Seul l'effet JOULE contribue à la dépense de puissance moyenne.

F.III.1 $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon' - 1 - i\varepsilon'')\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 E_0\left[(\varepsilon'-1)\cos\omega t + \varepsilon''\sin\omega t\right]\vec{e}$

F.III.2. $\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \omega\varepsilon_0 E_0\left[-(\varepsilon'-1)\sin\omega t + \varepsilon''\cos\omega t\right]\vec{e}$

$$\Rightarrow \frac{dP_{el}}{d\tau} = \omega\varepsilon_0 E_0^2\left[-(\varepsilon'-1)\sin\omega t\times\cos\omega t+\varepsilon''\cos^2\omega t\right] \Rightarrow \left\langle \frac{dP_{el}}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\varepsilon'' E_0^2 \neq 0 .$$

F.III.3. $E_0 = 1880$ V.m^{-1}.