

1.- (prueba ordinaria) Se consideran las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a & -3 & a & -1 & 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

a) Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

Resolución $\det A = a^2 - a - 4a + 12 - 2 - a^2 + 3a = -2a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = 5$. Para $a \neq 5$ A tiene inversa

b) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $XA - B = CA$.

Resolución

Trasponiendo términos, $XA = B + CA$. Como existe A^{-1} , Multiplicando por A^{-1} , por la derecha, en los dos miembros: $XAA^{-1} = XI = X = (B + CA)A^{-1} = BA^{-1} + CAA^{-1}$. Es decir, $X = BA^{-1} + C$

Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -2 \cdot 1 + 10 = 8$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A^t) = \frac{1}{8} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1} + C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

c) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación $BA + DC^tB$

Resolución

$B_{1 \times 3}$, $A_{3 \times 3} \Rightarrow$ se puede hacer BA y, además, $(BA)_{1 \times 3}$

$D_{m \times n}$, $C_{3 \times 1}^t$, $B_{1 \times 3} \Rightarrow n = 3$, para que se pueda hacer el producto ; y $m = 1$, para que DC^tB sea de

orden 1×3 y así poder hacer la suma $BA + DC^tB$. Conclusión: la dimensión de la matriz D es 1×3

2.- (prueba extraordinaria) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2X + A^4 = A$

Resolución

Trasponiendo términos en la ecuación, $A^2X = A - A^4 \Rightarrow AAX = A - AAA^2$; $\det A = -1 - 8 = -9 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ y también $\exists (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$. Multiplicando en los dos miembros de la ecuación, por la izquierda, por $(A^2)^{-1}$, queda: $(A^2)^{-1}AAX = (A^2)^{-1}(A - AAA^2) \Rightarrow A^{-1}A^{-1}AAX = A^{-1}A^{-1}A - A^{-1}A^{-1}AAA^2$

Como $A^{-1}A = I$ y la matriz I es el elemento neutro de la multiplicación de matrices, queda $X = A^{-1} - A^2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & -4 & 1 & -2 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & -4 & 1 & -2 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{-8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-40}{9} & \frac{40}{9} \end{pmatrix}$$

3.- Se consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1}AP = J$.

Resolución

Multiplico por P , por la izquierda, y por P^{-1} , por la derecha, en ambos miembros: $PP^{-1}APP^{-1} = PJP^{-1}$

Queda $IAI = PJP^{-1}$. Es decir, $A = PJP^{-1}$. Observa que $\det P = -1 - 1 = -2 \neq 0$

$$\exists P^{-1} = \frac{1}{\det P} (\text{adj } P^t) = \frac{1}{-2} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 0 & -4 & 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Compruebe que $A^3 = PJ^3P^{-1}$.

Resolución

$$A = PJ^3P^{-1} \Rightarrow A^2 = AA = PJ^3P^{-1}PJ^3P^{-1} = PJ^6P^{-1} = PJ^2P^{-1} \Rightarrow A^3 = A^2A = PJ^2P^{-1}PJ^3P^{-1} = PJ^5P^{-1} = PJ^3P^{-1}$$

4.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la siguiente ecuación $ABXC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Sea $D = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y llamando $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ queda $DXC = F$.

$$\det D = -1 \neq 0, \exists D^{-1} = \frac{1}{\det D} (\text{adj } D^t) = \frac{1}{-1} \text{adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 1 + 6 - 3 - 3 = 1 \neq 0,$$

$$\exists C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\text{adj } C^t) = \frac{1}{1} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

En la ecuación $DXC = F$ multiplico los dos miembros por D^{-1} , por la izquierda, y por C^{-1} , por la derecha, y

queda $D^{-1}DXCC^{-1} = D^{-1}FC^{-1}$. Queda $IXI = D^{-1}FC^{-1}$. Es decir, $X = D^{-1}FC^{-1}$.

Sustituyendo,

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Halle las dimensiones de las matrices D y E para que tenga sentido la igualdad $AD = EB$

Resolución

Recuerda que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A_{2 \times 3}$ y $D_{m \times n}$. Para poder hacer AD debe ser $m = 3$ y quedaría $(AD)_{2 \times n}$

$E_{p \times q}$ y $B_{3 \times 2}$. Para poder hacer EB debe ser $q = 3$ y quedaría $(EB)_{p \times 2}$

Como $(AD)_{2 \times n} = (EB)_{p \times 2}$ debe ser $p = 2$, $n = 2$

Resumiendo, $m = 3$, $n = 2$; $p = 2$, $q = 3 \Rightarrow D$ es 3×2 , $D_{3 \times 2}$ y E es 2×3 , $E_{2 \times 3}$

5.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones $2X - Y = 4A$; $X + Y = B$

Resolución

Sumando las ecuaciones, $3X = 4A + B$,

$$X = \frac{1}{3}(4A + B) = \frac{1}{3}[4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejando Y de la 2ª ecuación, $Y = B - X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcule la matriz C^{2024} .

Resolución

$$C^2 = CC = (1 \ 0 \ 1 \ 1)(1 \ 0 \ 1 \ 1) = (1 \ 0 \ 2 \ 1) \ ; \ C^3 = C^2C = (1 \ 0 \ 2 \ 1)(1 \ 0 \ 1 \ 1) = (1 \ 0 \ 3 \ 1) \ ; \dots$$

En general, $C^n = (1 \ 0 \ n \ 1)$ y en particular $C^{2024} = (1 \ 0 \ 2024 \ 1)$

c) Si D es una matriz de dimensión 2×3 , razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t B + DD^t$$

$$DB^t + A$$

$$D^t A^t + D$$

Resolución

$A_{2 \times 2}^t$ y $B_{2 \times 2} \Rightarrow$ se puede hacer $A^t B$ porque el nº de filas de B coincide con el de columnas de B^t .

Además, $(A^t B)_{2 \times 2}$

$D_{2 \times 3}$ y $D_{3 \times 2}^t \Rightarrow$ se puede hacer DD^t porque el nº de filas de D^t coincide con el de columnas de D .

Además, $(DD^t)_{2 \times 2}$

Por tanto, se puede realizar $(A^t B)_{2 \times 2} + (DD^t)_{2 \times 2}$ por ser matrices de la misma dimensión

$D_{2 \times 3}$ y $B_{2 \times 2}^t \Rightarrow$ NO se puede hacer DB^t porque el nº de filas de B^t NO coincide con el de columnas de D .

Por tanto, NO se puede realizar $DB^t + A$

$D_{3 \times 2}^t$ y $A_{2 \times 2}^t \Rightarrow$ se puede hacer $D^t A^t$ porque el nº de filas de A^t coincide con el de columnas de D^t .

Además, $(D^t A^t)_{3 \times 2}$

Por tanto, NO se puede realizar $(D^t A^t)_{3 \times 2} + D_{2 \times 3}$ por ser matrices de DISTINTA dimensión

6.- Se consideran las matrices $M = (1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$ $N = (3 \ 2 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 7 \ 4 \ 0)$

$$V = (5 - a^2 \ a - 1 \ a^2)$$

siendo a un número real.

a) Halle el valor de a para que se verifique que $M^t V = (5 \ 1 \ 5)^t$.

Resolución

$$(1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^t (5 - a^2 \ a - 1 \ a^2) = (5 \ 1 \ 5)^t \Rightarrow (1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1) (5 - a^2 \ a - 1 \ a^2) = (5 \ 1 \ 5) \Rightarrow (5 - a^2 + 2a - 2 + a^2 \ a - 1 + a^2 \ 5 - a^2 + a^2) = (5 \ 1 \ 5)$$

Operando e igualando elementos,

$$\{2a + 3 = 5 \ a^2 + a - 1 = 1 \ 5 = 5 \Rightarrow \{a = 1 \ a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{2}, a = 1, a = -2$$

Por tanto, debe ser $a = 1$

b) Calcule M^{-1} y resuelva la ecuación matricial $XM - I_3 = N$.

Resolución

$$\det M = 1 + 2 - 1 - 1 = 1 \neq 0,$$

$$\exists M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\text{adj } M^t) = \frac{1}{1} \text{adj}(1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1) = (1 \ 1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 1)$$

Trasponiendo términos en la ecuación, $XM = I_3 + N$. Multiplico por M^{-1} , por la derecha, en ambos miembros: $XMM^{-1} = XI = X = (I_3 + N)M^{-1} \Rightarrow$

$$X = [(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) + (3 \ 2 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 7 \ 4 \ 0)](1 \ 1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 1)$$

La solución de la ecuación es

$$X = (4 \ 2 \ 2 \ 5 \ 3 \ 1 \ 7 \ 4 \ 1)(1 \ 1 \ -1 \ -2 \ 0 \ 2 \ 1 \ -1 \ 1) \Rightarrow X = (2 \ 2 \ 2 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 6 \ 2)$$

c) Razone si las operaciones $2VN^t$ y $(N + M^t)V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

Resolución

$(2V)_{3 \times 1}$ y $N_{3 \times 3}^t \Rightarrow$ NO se puede realizar $2VN^t$ porque el nº de filas de N^t NO coincide con el de columnas de $2V$.

$N_{3 \times 3}$ y $M_{3 \times 3}^t \Rightarrow$ se puede realizar $N + M^t$ por ser matrices de la misma dimensión y $(N + M^t)_{3 \times 3}$

$(N + M^t)_{3 \times 3}$ y $V_{3 \times 1} \Rightarrow$ se puede hacer $(N + M^t)V$ porque el nº de filas de V coincide con el de columnas de $(N + M^t)$. Además, $[(N + M^t)V]_{3 \times 1}$