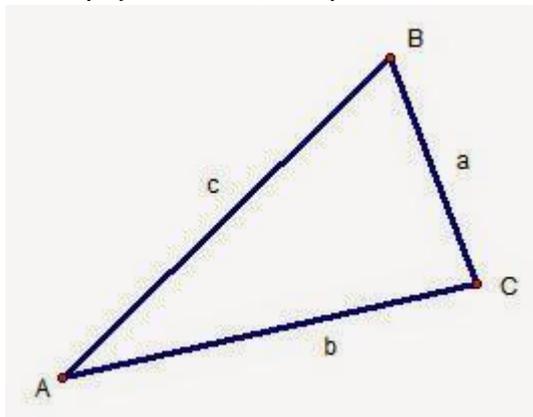


23. Треугольники

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами.

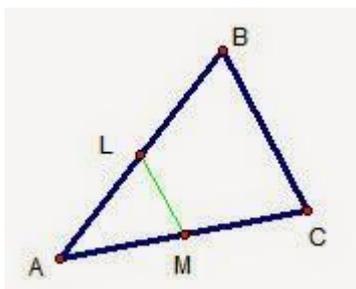


Свойства треугольников

1. Сумма углов треугольника 180° .
2. Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны: $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон: LM - средняя линия треугольника.

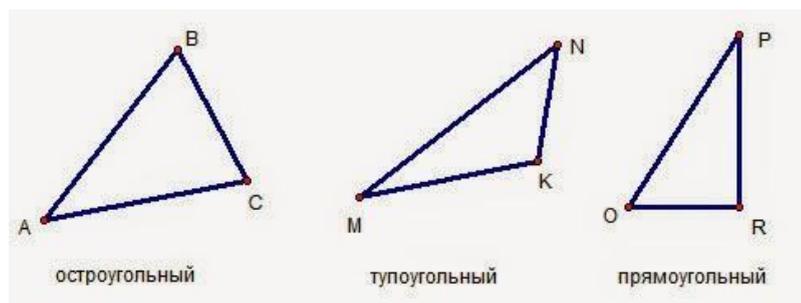
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны: $LM \parallel BC$, $BC=2LM$.



Виды треугольников

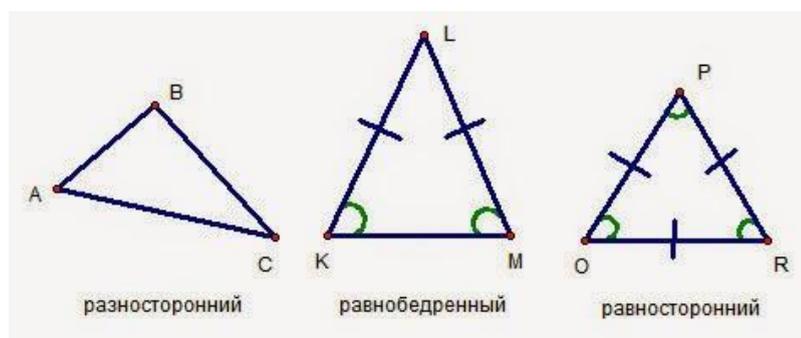
Виды треугольников (по углам):

- Остроугольный (все углы острые),
- Тупоугольный (один из углов тупой),
- Прямоугольный (один из углов прямой).



Виды треугольников (по сторонам):

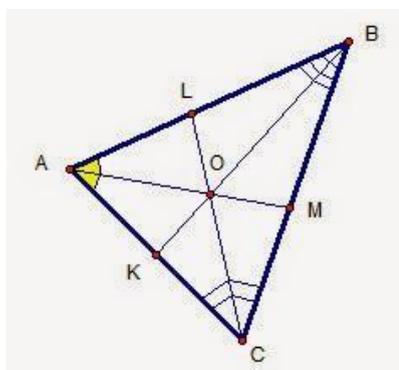
- Разносторонний (стороны не равны между собой),
- Равнобедренный (две стороны равны),
- Равносторонний (три стороны равны между собой).



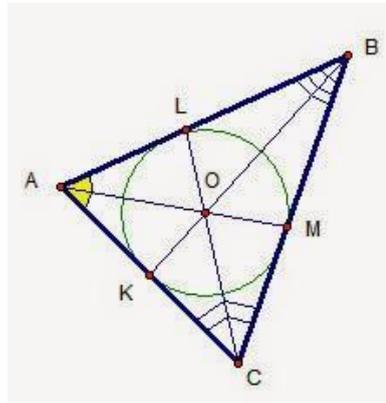
Биссектрисы, медианы, высоты треугольников

Биссектриса

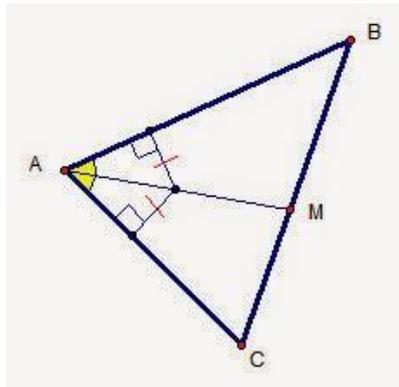
Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне этого треугольника.



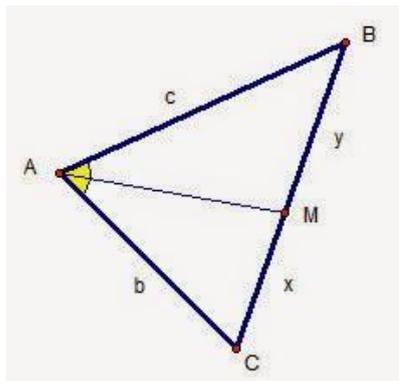
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.



Биссектриса угла – это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

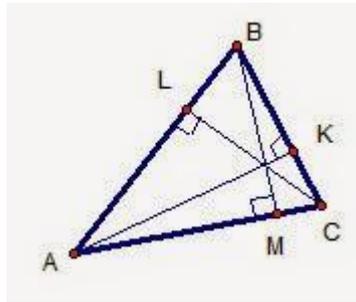


Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $b : c = x : y$.



Высота

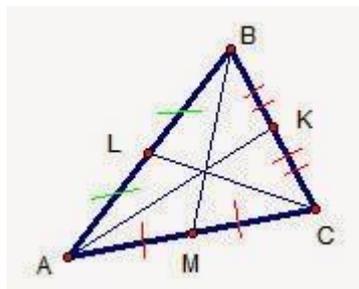
Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



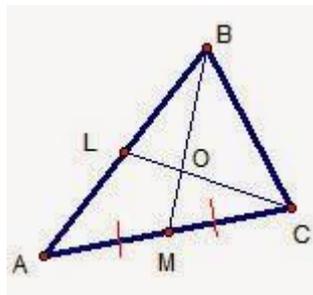
В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.

Медиана

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны этого треугольника.



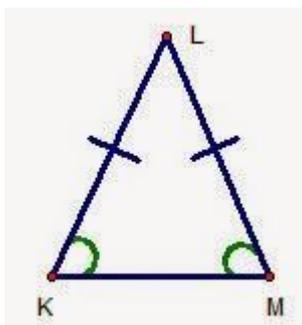
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1 начиная от вершины треугольника: $CO=2OL$, $BO=2OM$.



Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади: $S_{ABM} = S_{BCM}$.

Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

Равнобедренный треугольник

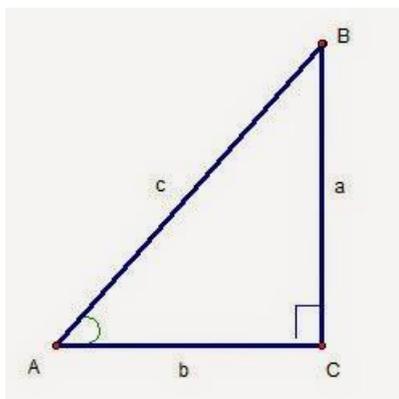


Две равные стороны называются боковыми сторонами, третья - основанием: KL и LM - боковые стороны ($KL=LM$), KM - основание.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle K = \angle M$.

Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой и высотой.

Прямоугольный треугольник



Стороны треугольника, образующие прямой угол, называются катетами, сторона, лежащая против угла в 90° , называется гипотенузой: AC, BC - катеты, AB - гипотенуза.

Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Синус угла - отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin \alpha = a:c$.

Косинус угла - отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos \alpha = b:c$.

Тангенс угла - отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $\operatorname{tg} \alpha = a:b = \sin \alpha : \cos \alpha$.

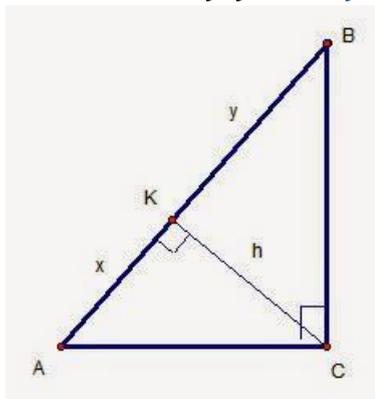
Котангенс угла - отношение прилежащего катета к противолежащему катету: $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha : \sin \alpha$.

Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной окружности.

Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности: $R = c:2$.

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности: $r = (a+b-c):2$.

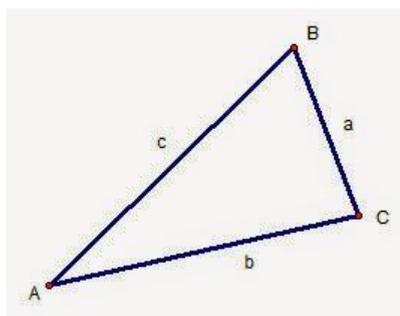
Квадрат высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника равен произведению проекций высоты на гипотенузу: $h^2=x*y$.



Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} ah,$$

h - высота, проведенная к стороне a.

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma,$$

a, b - стороны треугольника, γ - угол между ними.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p - полупериметр, a, b, c - стороны треугольника.

$S=pr$, p - полупериметр, r - радиус вписанной окружности

$S=abc : (4R)$, R - радиус описанной окружности

В прямоугольном треугольнике

$S=0,5ab$, где a, b - катеты треугольника

В равностороннем треугольнике

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10 см, один из углов равен 45. Найдите второй катет.

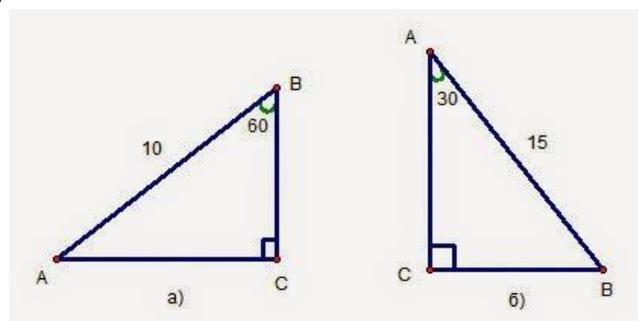
б) В прямоугольном треугольнике катеты равны. Найдите все углы треугольника.

Решение:

а) В прямоугольном треугольнике 90° и 45° , следовательно, третий угол $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Треугольник равнобедренный, т.к. два угла равны, тогда и катеты равны, т.е. второй катет равен 10 см.

Ответ: 10 см

2. Найдите величину катета AC:



Решение:

а) Треугольник ABC прямоугольный и $A = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.
 $BC = AB : 2 = 10 : 2 = 5$ см (катет лежит против угла в 30°).

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 25 = 75, AC = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $5\sqrt{3}$

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника со сторонами:

а) 6 см, 6 см, 8 см; б) 10 см, 10 см, 12 см.

Решение:

а) по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{6+6+8}{2} = 10 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = 8\sqrt{5}$$

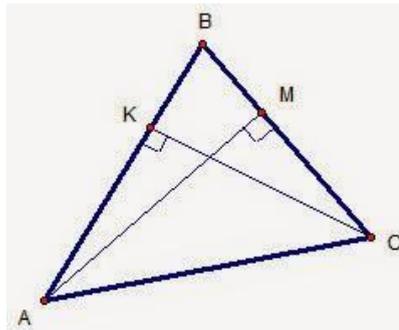
Ответ: $8\sqrt{5}$

4. а) В треугольнике ABC сторона AB равна 10 см, расстояние от точки C до прямой AB равно 6 см, сторона BC равна 14 см. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) В треугольнике ABC расстояние от точки A до прямой BC равно 5 см, расстояние от точки C до прямой AB равно 7 см. Найдите сторону BC, если известно, что сторона AB равна 12 см.

Решение:

а)



Дано: ABC - треугольник;

$d(C, AB) = 6$ см;

$AB = 10$ см; $BC = 14$ см

Найти: $d(A, BC)$

Решение:

1) Найдем площадь треугольника ABC:

$$S = CK \cdot AB : 2 = 10 \cdot 6 : 2 = 30 \text{ см}^2$$

2) Зная площадь треугольника ABC и сторону BC, найдем высоту AM, проведенную к этой стороне:

$$S = BC \cdot AM : 2; AM = 30 : 14 \cdot 2 = 30/7 = 4 \frac{2}{7} \text{ см}$$

Ответ: $4 \frac{2}{7}$ см

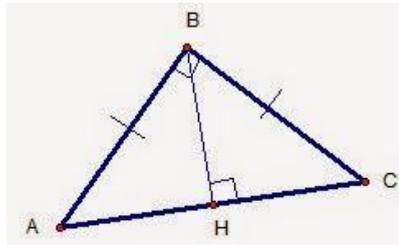
5. а) В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе равна 4 см. Найдите площадь треугольника.

б) В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см.

Найдите площадь треугольника.

Решение:

а)



Дано: ABC - равнобедренный прямоугольный треугольник;
 $BH=4$ см
Найти: S - ?

Решение:

1) Т.к. треугольник ABC - равнобедренный, то высота BH , проведенная к основанию является и медианой: $AH=HC$.

2) Квадрат высоты, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе равен произведению ее проекций на гипотенузу: $BH^2=AH*HC$; $16=AH^2$

$AH=4$ см

3) $AC=2AH=8$ см

4) $S=BH*AC:2=4*8:2=16$ см²

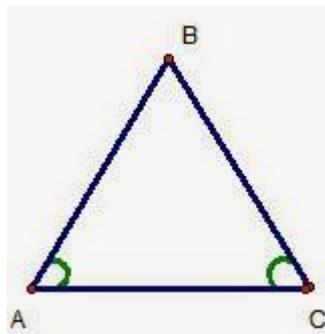
Ответ: 16 см²

6. а) Периметр треугольника ABC равен 30 см. $\angle A=\angle C$ и AB больше AC на 3 см. Найдите стороны треугольника.

б) Периметр треугольника ABC равен 36 см. $\angle A=\angle C$ и $AB : AC$ как $3:2$. Найдите стороны треугольника.

Решение:

а)



Дано:

ABC - треугольник;

$P=30$ см;

$\angle A=\angle C$;

$AB=AC+3$ см.

Найти: AB, BC, AC

Решение:

1) Т.к. $\angle A=\angle C$, то треугольник ABC - равнобедренный и $AB=BC$.

2) Пусть x - основание треугольника ABC , тогда боковая сторона равна $(x+3)$.

$P=AB+BC+AC=x+x+3+x+3$; $3x+6=30$, $3x=24$, $x=8$ см - сторона AC .

$AB=BC=8+3=11$ см

Ответ: 8 см, 11 см, 11 см

7. а) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 6 см, а сумма второго катета и гипотенузы равна 18 см. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 1,5 см, а разность гипотенузы и второго катета равна 0,5 см. Найдите площадь треугольника.

Решение:

а) 1) Пусть катет равен x см, тогда гипотенуза равна $(18 - x)$ см.

По теореме Пифагора:

$$6^2 + x^2 = (18 - x)^2$$

$$36 + x^2 = 324 - 36x + x^2$$

$$36x = 288$$

$x = 8$ (см) - катет прямоугольного треугольника

$$2) S = 6 \cdot 8 : 2 = 24 \text{ см}^2$$

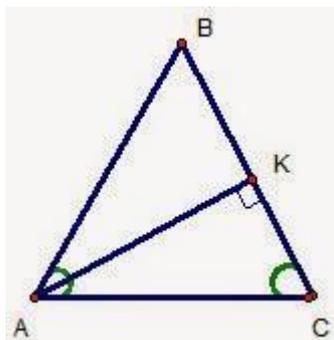
Ответ: 24 см^2

8. а) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки, равные 5 см и 4 см, считая от вершины треугольника. Найдите площадь треугольника.

б) В треугольнике ABC AK - высота, BK=CK=5 см. Найдите площадь треугольника, если AB=12 см.

Решение:

а)



Дано: ABC - равнобедренный треугольник;

AK - высота к боковой стороне;

BK = 5 см; KC = 4 см

Найти: S - ?

Решение:

1) Т.к. треугольник ABC - равнобедренный, то $AB = BC = BK + KC = 5 + 4 = 9$ см.

2) Треугольник ABK - прямоугольный, зная гипотенузу AB и катет BK, найдем катет AK:

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 81 - 25 = 56$$

$$AK = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \text{ см}$$

$$S = \frac{AK \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{14} \cdot 9}{2} = 9\sqrt{14} \text{ см}^2$$

Ответ: $9\sqrt{14} \text{ см}^2$

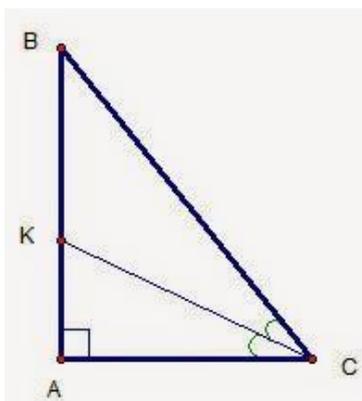
9. а) В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 см и 9 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную к большему катету.

б) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 6 см, а гипотенуза равна

10 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную к меньшему катету.

Решение:

а)



Дано: ABC - прямоугольный треугольник;

$AB=12$ см; $AC=9$ см;

CK - биссектриса

Найти: CK -?

Решение:

1) По теореме Пифагора найдем гипотенузу: $BC^2=AB^2+AC^2=144+81=225$, $BC=15$ см.

2) Т.к. CK - биссектриса, то $AC:BC=AK:KB$.

Пусть $KB=x$, тогда $AK=12-x$.

$9:15=(12-x):x$,

$9x=15(12-x)$,

$8x=60$,

$x=7,5$ см - KB .

3) $AK=12-7,5=4,5$ см

4) Треугольник AKC - прямоугольный, по теореме Пифагора найдем KC :

$KC^2=AK^2+AC^2=101,25$

$$KC = \sqrt{101,25} \text{ см}$$

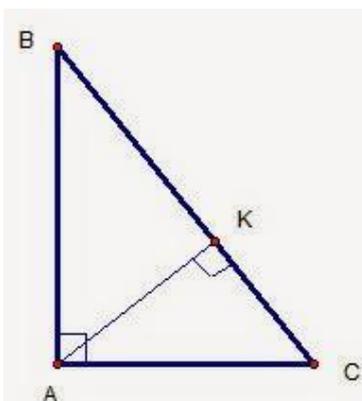
Ответ: $\sqrt{101,25}$ см

10. а) В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 25 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 9 см и 16 см. Найдите площадь треугольника.

Решение:

а)



Дано:
ABC - прямоугольный треугольник;
AK - высота;
BK=25 см; KC=4 см
Найти: S - ?

Решение:

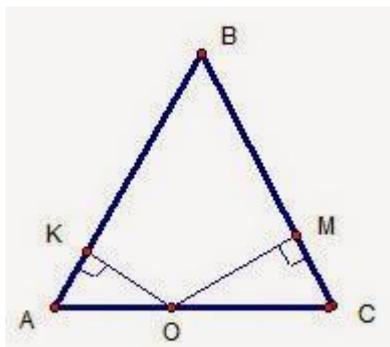
- 1) Квадрат высоты, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе равен произведению ее проекций на гипотенузу: $AK^2=BK*KC$; $AK^2=25*4=100$, $AK=10$ см
 - 2) $BC=BK+KC=25+4=29$ см
 - 3) $S=AK*BC:2=10*29:2=145$ см²
- Ответ: 145 см²

11. а) В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 6 см, площадь треугольника равна 24 см². Найдите сумму расстояний от точки на основании треугольника до его боковых сторон.

б) В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 12 см, площадь треугольника равна 56 см². Найдите сумму расстояний от точки на основании треугольника до его боковых сторон.

Решение:

а)



Дано: ABC- равнобедренный треугольник;
 $AB=BC=6$ см;
 $S=24$ см²
O - точка на основании треугольника ABC
Найти: $d(O, AB)+d(O, BC)$

Решение:

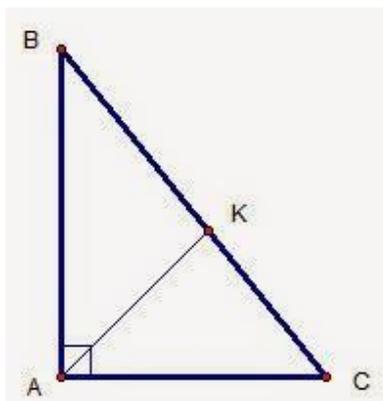
- 1) Найдём площадь треугольника ABO:
 $S=OK*AB:2=OK*6:2=3OK$;
 - 2) Найдём площадь треугольника BCO:
 $S=OM*BC:2=OM*6:2=3OM$;
 - 3) Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABO и BCO:
 $24=3OK+3OM$,
 $OK+OM=24:3=8$ см
- Ответ: 8 см

12. а) В прямоугольном треугольнике катеты равны 9 см и 12 см. Найдите биссектрису, проведенную к гипотенузе.

б) В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 см и 4 см. Найдите биссектрису, проведенную к гипотенузе.

Решение:

а)



Дано: ABC- прямоугольный треугольник;

AB=12 см; AC=9 см;

AK - биссектриса

Найти: AK - ?

Решение:

1) Найдем гипотенузу треугольника ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$, BC=15 см.

2) По свойству биссектрисы треугольника:

AC:AB=KC:VK.

Пусть KC= x см, тогда VK=15-x см

$9:12 = x:(15-x)$,

$12x = 135 - 9x$,

$21x = 135$,

$x = 45/7$.

3) Найдем AK по теореме косинусов:

$\cos C = AC:BC = 9/15 = 3/5$

$AK^2 = AC^2 + KC^2 - 2AC \cdot KC \cdot \cos C = 677$.

$$AK = \sqrt{677} \text{ см}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{677} \text{ см}$$

13. а) Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 7 см, 5 см, 4 см.

б) Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 10 см, 12 см, 8 см.

Решение:

а)

1) Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{7+4+5}{2} = 8 \text{ см}$$

$$S = \sqrt{8(8-7)(8-5)(8-4)} = 4\sqrt{6}$$

2) Наибольшая высота проведена к меньшей стороне, следовательно высота проведена к стороне, равной 4 см. Зная площадь треугольника и сторону, к которой высота проведена, найдем высоту:

$$S = h \cdot 4 : 2,$$

$$4\sqrt{6} = h * 2, \quad h = 2\sqrt{6} \text{ см}$$

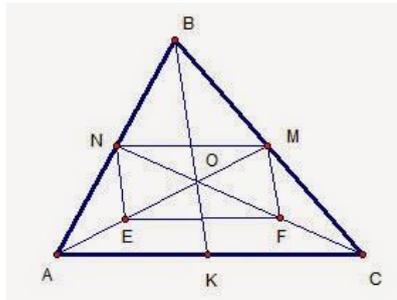
Ответ: $2\sqrt{6}$ см

14. а) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Решение:

а)



Дано: ABC - треугольник;

AM, BK, CN - медианы

Доказать: медианы пересекаются в одной точке

Доказательство:

1) Докажем, что медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, начиная от вершины:

Пусть точка E - середина AO , точка F - середина CO .

Рассмотрим четырехугольник $ENMF$, его стороны NM и EF параллельны и равны, т.к. являются средними линиями треугольников ABC и AOC с общим основанием AC .

Тогда $ENMF$ - параллелограмм, следовательно, $MO=EO$, $NO=OF$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам). Т.к. $AE=EO=OM$, то $AO:MO=2:1$, аналогично $CO:ON=2:1$.

2) Докажем, что и медиана BK проходит через точку O :

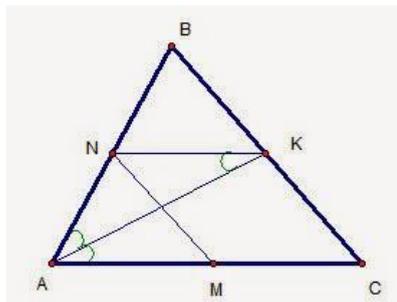
Пусть медианы BK и AM пересекаются в точке H . Тогда $BH:HK=2:1$ и $AH:HM=2:1$, но, тогда точки O и H делят медиану AM в отношении $2:1$, следовательно, они совпадают и медиана BK проходит через точку O .

15. а) AK - биссектриса треугольника ABC . $NK \parallel AC$, $NM \parallel BC$, K лежит на BC , M лежит на AC , N лежит на AB и $AN=5$ см, $NB=3$ см, $BK=4$ см. Найти MC .

б) AK - биссектриса треугольника ABC . $NK \parallel AC$, $NM \parallel BC$, K лежит на BC , M лежит на AC , N лежит на AB и $AN=6$ см, $CK=8$ см, $BK=7$ см. Найти MC .

Решение:

а)



Дано: ABC - треугольник;
 AK - биссектриса;
 $NK \parallel AC$, $NM \parallel BC$;
 $AN=5$ см, $NB=3$ см, $BK=4$ см
 Найти: MC - ?

Решение:

1) Рассмотрим треугольник ANK :

$\angle KAC = \angle AKN$ как внутренние накрест лежащий при параллельных прямых NK и AC и секущей AK . По условию AK биссектриса и $\angle BAK = \angle KAC$, следовательно $\angle BAK = \angle AKN$ и треугольник ANK - равнобедренный и $AN = NK = 5$ см.

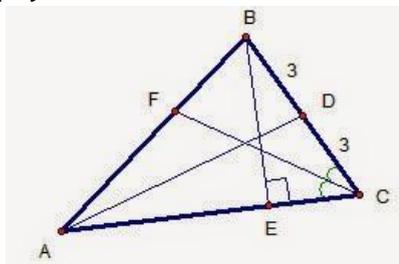
2) Рассмотрим четырехугольник $MNKC$:

$MNKC$ - параллелограмм, т.к. $NK \parallel MC$ и $NM \parallel KC$, следовательно $NK = MC = 5$ см

Ответ: 5 см

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Укажите медиану данного треугольника.



2. Определите, из какого набора отрезков можно построить треугольник:

а) 10 см, 2 см, 5 см; б) 9 см, 9 см, 12 см; в) 3 см, 4 см, 5 см.

3. Найдите площадь треугольника со сторонами 5 см, 7 см, 8 см.

4. Найдите сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 8 см.

5. Острые углы в прямоугольном треугольнике относятся как 1:2. Найдите угол, лежащий напротив меньшего катета.

6. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Площадь треугольника AOC равна 64 см, где O - середина AM . Найдите площадь треугольника ABC .

7. Найдите сторону треугольника BC , если AC равно 12 см, $AB=6$ см, а биссектриса внешнего угла при вершине A пересекается со стороной CB в точке K и $BK=8$ см.

8. В равнобедренном треугольнике, высота, проведенная к боковой стороне делит ее на отрезки 8 и 6 см, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

9. Внутри равностороннего треугольника взята точка K . Доказать, что сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника постоянная величина.

10. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK к сторонам треугольника. $AK=9$ см, $KB=2$ см, $BM=3$ см. Найдите величину MC .