

Dans le cadre du développement durable, on encourage la création de petites unités de production électrique à partir d'énergies renouvelables. On se propose ici d'étudier quelques dispositifs de petite ou moyenne puissance, destinés à alimenter des sites isolés.

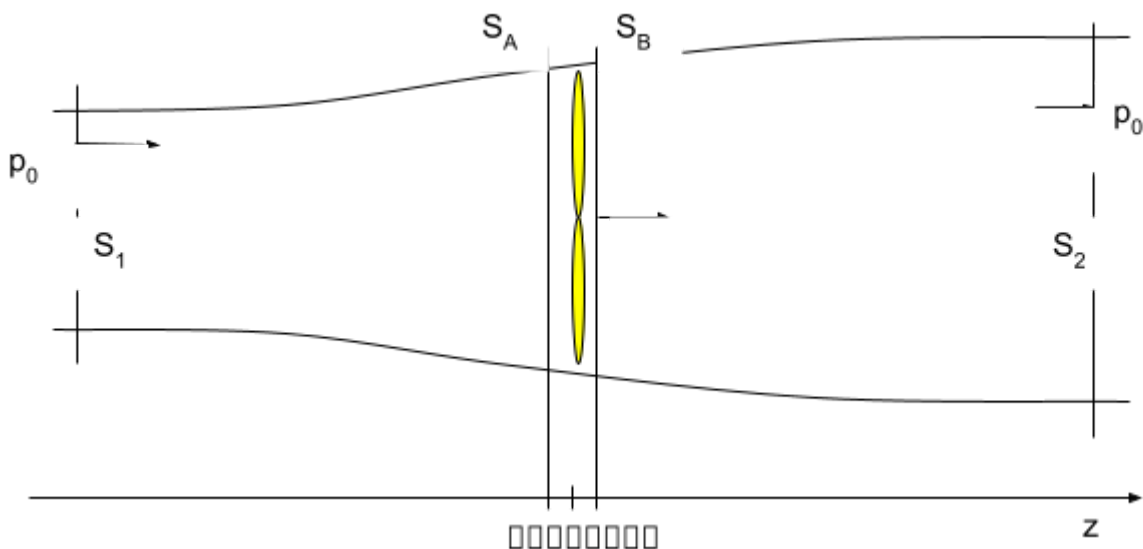
On commence par la modélisation d'une unité de production d'énergie électrique pour un site isolé de puissance nominale 400 W à partir de l'énergie éolienne, la deuxième partie porte sur l'étude d'une unité de production électrique «dish-stirling» et la troisième partie étudie la production d'électricité par des cellules photovoltaïques pour l'alimentation d'une unité domestique.

A- Etude de l'éolienne

I- Fonctionnement de l'hélice

On modélise le mouvement de l'air autour de l'hélice en faisant les hypothèses suivantes :

- on effectue l'étude dans un référentiel R lié au sol et supposé galiléen,
- l'air est considéré comme un fluide parfait, homogène et incompressible de masse volumique μ ,
- on suppose le mouvement de l'air stationnaire et à symétrie de révolution autour de l'axe de rotation de l'hélice,
- la pression, à grande distance de l'hélice, est uniforme et égale à la pression atmosphérique notée p_0 ,



- la pression garde la même valeur sur une section droite du tube de courant du champ des vitesses,
- les sections S_A et S_B du tube de courant sont égales à S et on note la pression p_A sur S_A et p_B sur S_B ,
- on néglige les effets de la pesanteur,
- l'écoulement étant turbulent au niveau de l'hélice, on admet pour simplifier que la vitesse $\vec{V}$ de l'air est la même en $z = -\epsilon$, en $z = 0$ et en $z = +\epsilon$.

A.I.1. Ecrire la conservation du débit massique D_M à travers diverses sections droites du tube de courant et en déduire deux relations entre S_1 , S_2 , S , v_1 , v_2 et v ; v_1 , v_2 et v représentent respectivement les modules des vecteurs vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}$.

A.I.2. En utilisant le théorème de Bernoulli entre les sections S_1 et S_A d'une part et entre les sections S_B et S_2 d'autre part, déduire l'expression de la pression p_A en fonction de p_0 , μ , v_1 et v , puis celle de p_B en fonction de p_0 , μ , v_2 et v .

A.I.3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement pour le fluide compris entre les sections S_A et S_B , établir que la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur l'hélice s'écrit $\vec{F} = \frac{\mu S}{2}(v_1^2 - v_2^2)\vec{e}_z$ où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe des z . Commenter cette expression.

A.I.4. A l'aide d'un bilan pour le fluide compris entre les sections S_1 et S_2 , établir une autre relation entre $\vec{F}$, D_M , v_1 , v_2 et $\vec{e}_z$.

A.I.5. En déduire que la vitesse v de l'air au niveau de l'éolienne s'écrit : $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

A.I.6. Evaluer la puissance P reçue par l'hélice. On exprimera cette puissance P en

fonction des grandeurs μ , S , v_1 et $x = \frac{v_2}{v_1}$.

A.I.7. Loi de Betz : la vitesse de l'air après l'éolienne ne pouvant pas s'annuler, il existe une puissance maximale P_{Max} que l'on peut extraire de la circulation d'air. Pour quelle valeur de x , la puissance P est-elle maximale ? Donner la valeur de P_{Max} .

A.I.8. Tracer l'allure des courbes vitesse $v(z)$ et pression $p(z)$ sur le même graphique. Commenter ce tracé.

A.I.9. Le rendement de l'éolienne est défini comme le rapport de la puissance P fournie par l'air à l'hélice sur le débit d'énergie cinétique en amont de l'éolienne :

$$r_{eth} = \frac{P}{E_C}$$

Calculer le débit d'énergie cinétique E_C à travers une section droite de surface S où la vitesse est v_1 . En déduire le rendement théorique de l'éolienne r_{eth} en fonction de x .

A.I.10. Applications numériques : $\mu = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$; $v_1 = 12 \text{ m.s}^{-1}$; $S = 1,4 \text{ m}^2$. Calculer P_{Max} et le rendement associé r_{eth} .

A.I.11. En fait, à cause des turbulences au niveau des pales, le rendement est plus

faible et la puissance peut s'écrire : $P_{réel} = \frac{1}{2} C_p \mu S v_1^3$, où C_p est le coefficient de performance. Il dépend de la géométrie, de l'inclinaison des pales et de la vitesse du

vent. Montrer que C_p admet une valeur maximale à cause de la loi de Betz. Calculer numériquement C_p pour une puissance réelle $P_{\text{réel}} = 400 \text{ W}$.

L'axe de l'éolienne entraîne une génératrice qui fournit du courant électrique avec un rendement proche de l'unité.

II- Fonctionnement de la génératrice

On schématise la génératrice par un cadre rectangulaire C_1 sur lequel on a enroulé N spires. Ce cadre tourne dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e}_y$ autour d'un axe Δ vertical que l'on prend comme axe Oz . On note $\vec{n}_1$ le vecteur normal, ce qui oriente le sens de parcours du cadre. On note θ l'angle orienté $\theta = (\vec{e}_x, \vec{n}_1)$. Le cadre est entraîné par l'axe de l'éolienne et tourne à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$.

A.II.1. Etablir l'expression du flux ϕ_1 du champ magnétique à travers une spire de C_1 en fonction de S_c surface du cadre, B et θ .

A.II.2. Il apparaît aux extrémités de l'enroulement des N spires de C_1 , une force électromotrice e_1 que l'on exprimera en fonction de S_c , N , B , θ et $\dot{\theta}$.

A.II.3. L'enroulement de résistance et d'inductance propre négligeable, est connecté à une résistance R . Représenter le circuit électrique équivalent ; on prendra soin de faire apparaître l'orientation du circuit et le sens de la f.e.m. et du courant i_1 qui le parcourt. Donner l'expression de i_1 .

A.II.4. Un second cadre identique C_2 , solidaire du premier et s'en déduisant par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$, complète le dispositif. On notera $\vec{n}_2$ le vecteur normal à ce second cadre. Les deux cadres sont isolés électriquement l'un de l'autre. Exprimer la f.e.m. e_2 qui apparaît aux bornes de C_2 .

A.II.5. Le cadre C_2 est connecté à une résistance R de même valeur que celle connectée à C_1 . Etablir l'expression de l'intensité i_2 circulant dans le deuxième circuit.

On cherche maintenant à établir l'équation mécanique de la partie tournante de la génératrice. On rappelle que le moment des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit baignant dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme vaut : $\vec{\Gamma}_1 = \vec{M}_1 \wedge \vec{B}$ où $\vec{M}_1 = N i_1 S_c \vec{n}_1$ est le moment magnétique du cadre C_1 . On notera J le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ , de l'ensemble des deux cadres et de l'axe de l'hélice dont ils sont solidaires. On supposera que les liaisons avec l'axe sont parfaites.

A.II.6. Calculer le moment $\vec{\Gamma}_1$ des forces de Laplace que subit le cadre C_1 et le moment $\vec{\Gamma}_2$ des forces de Laplace que subit le cadre C_2 . On écrira les expressions en fonction de N , S_c , B , R , θ et $\dot{\theta}$.

A.II.7. Par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ , trouver une équation différentielle en θ reliant les moments calculés en **A.II.6.** et le moment $\vec{\Gamma}_M = \Gamma_M \vec{e}_z$ des actions exercées par l'hélice sur la partie tournante.

A.II.8. En régime permanent, la vitesse angulaire Ω est constante, ainsi que le moment Γ_M . Exprimer Ω en fonction de R , Γ_M , N , S_c et B . En déduire la puissance mécanique P_m fournie par l'hélice à la génératrice.

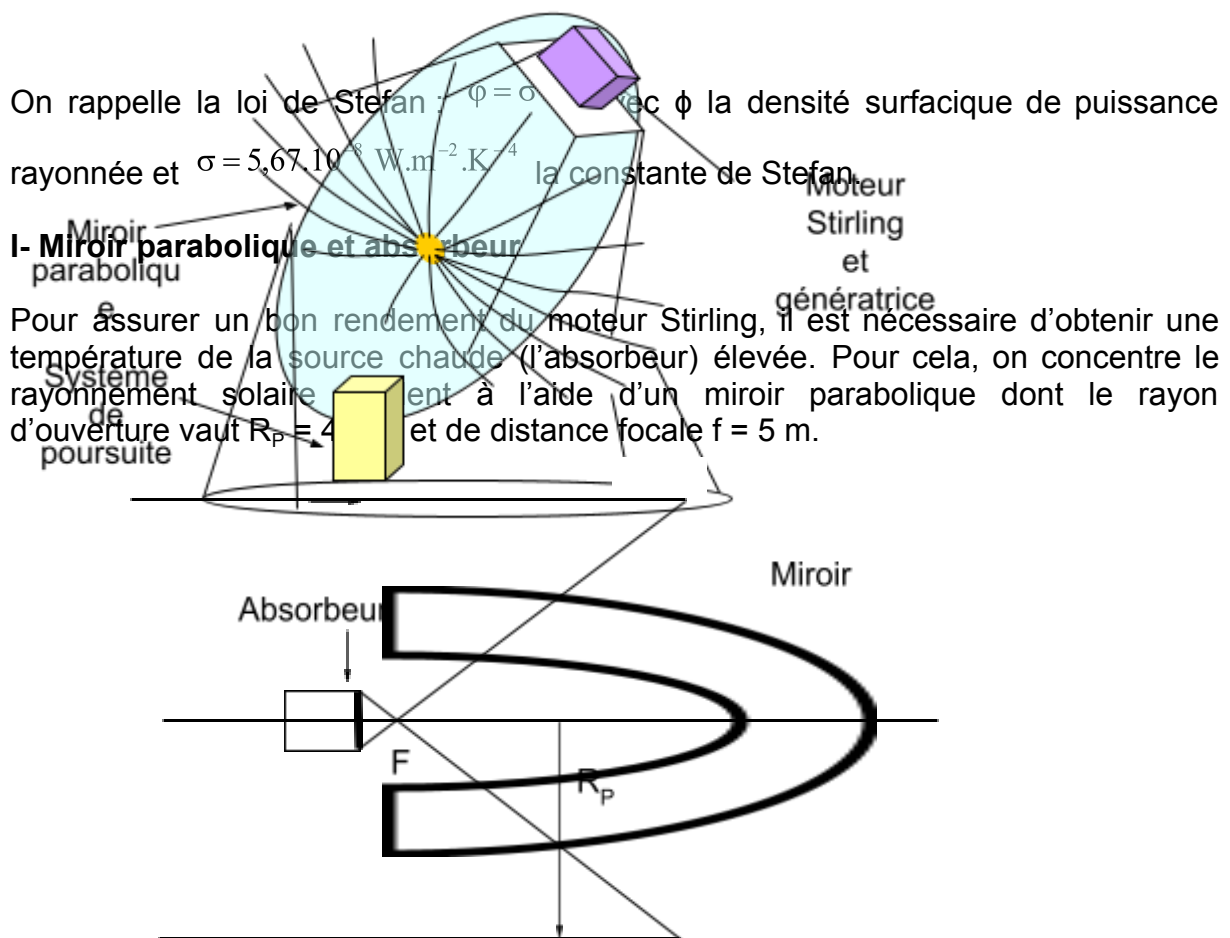
A.II.9. Déterminer, en régime permanent, la puissance moyenne électrique P_e dissipée dans les deux résistances R . Conclure.

A.II.10. La puissance P_e fournie par la génératrice est de 400 W pour une vitesse de rotation $\Omega = 750 \text{ tr.min}^{-1}$. Evaluer numériquement le moment Γ_M .

B- Unité de production électrique solaire « dish-stirling »

Une unité de production standard « dish-stirling » se compose :

- d'un miroir parabolique qui concentre le rayonnement solaire sur un absorbeur que l'on représentera par un disque circulaire placé perpendiculairement à l'axe optique du miroir,
- d'un moteur Stirling dont la source chaude est l'absorbeur ; le moteur est refroidi à l'air ou à l'eau,
- d'une génératrice entraînée par le moteur,
- d'un système de poursuite pour orienter l'axe du miroir vers le Soleil en permanence.



B.I.1. Donner la définition optique du foyer d'un miroir parabolique. On modélise, pour simplifier, le miroir parabolique par un miroir sphérique que l'on suppose utilisé dans le cadre de l'approximation de Gauss. Rappeler les conditions de l'approximation de Gauss et préciser alors la position du foyer.

B.I.2. On assimile le miroir parabolique à un miroir sphérique. Le Soleil étant vu sous un diamètre apparent $\alpha = 30$ minutes d'arc, dessiner l'image du Soleil par le miroir. On fera apparaître sur le tracé, la construction de l'image de deux points diamétralement opposés du bord du disque solaire. Calculer numériquement le diamètre d de l'image.

B.I.3. Quelle est la puissance P_0 du rayonnement solaire capté par le miroir pour un éclairement $E = 800 \text{ W.m}^{-2}$? Faire l'application numérique.

B.I.4. Pour des raisons de tenue thermique, l'éclairement du matériau constituant l'absorbeur est limité par un facteur de concentration en puissance $F_C = 2500$. Calculer le rayon R_a de l'absorbeur en fonction de R_p et F_C . Faire l'application numérique.

B.I.5. A quelle distance a du foyer faut-il placer l'absorbeur pour qu'il soit entièrement éclairé ? Effectuer l'application numérique.

B.I.6. D'une part, l'absorbeur réfléchit 18 % du rayonnement qu'il reçoit et d'autre part, il se comporte comme un corps noir du point de vue de l'émission ; c'est-à-dire qu'il vérifie la loi de Stefan. En dernier lieu, il transmet une puissance P_t au moteur Stirling. La température de fonctionnement du système étant de $T_a = 1040 \text{ K}$, calculer numériquement la puissance P_t transmise au moteur Stirling.

II- Le moteur Stirling

Le moteur Stirling est un moteur étanche à gaz interne et à source de chaleur externe. Les n moles du gaz interne (air, hélium ou hydrogène) subissent un cycle de transformations que l'on supposera réversibles :

AB détente isotherme à $T_c = 900 \text{ K}$,

BC refroidissement isochore à volume $V = V_1$ dans un régénérateur qui stocke la chaleur échangée,

CD compression isotherme à $T_f = 300 \text{ K}$,

DA réchauffement isochore à volume $V = V_2$ dans le régénérateur qui lui restitue l'énergie stockée pendant la transformation **BC**.

Le gaz sera assimilé à un gaz parfait. On donne la constante $R = 8,314 \text{ SI}$.

B.II.1. Ecrire l'équation d'état du gaz et en déduire les unités de la constante R .

B.II.2. Dans un diagramme de Watt représentant la pression en fonction du volume, dessiner le cycle décrit par le gaz.

B.II.3. Exprimer, en fonction des données les quantités de chaleur échangées au cours des quatre transformations Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} et Q_{DA} en précisant leur signe. On note C_v la capacité thermique molaire à volume constant du gaz.

B.II.4. En utilisant le premier principe, calculer le travail W fourni par le gaz au cours

d'un cycle en fonction de n , R , T_c , T_f et du rapport volumétrique $a = \frac{V_1}{V_2}$. On donne $a = 2,3$; $n = 0,40 \text{ mol}$; calculer numériquement W et Q_{AB} .

B.II.5. Définir le rendement théorique r_{TH} du moteur et le calculer. Pour quelle raison ce rendement n'est-il jamais atteint ?

B.II.6. Le diagramme de Watt du moteur Stirling réel nous donne $W = -790 \text{ J}$ et $Q_{AB} = 2180 \text{ J}$. Calculer le rendement réel du moteur.

B.II.7. Le moteur effectue 1080 cycles par minute, en déduire la puissance du moteur. Quelle est la puissance fournie par l'absorbeur au moteur ? Comparer cette valeur à la puissance P_t calculée au **B.I.6**.

C- Unité de cellules photovoltaïques

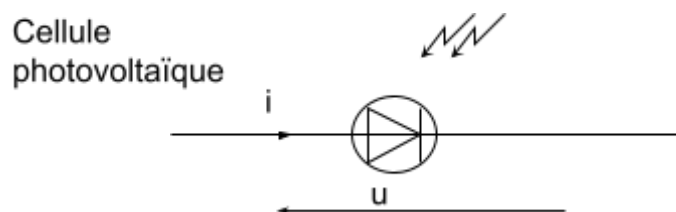
Une autre utilisation de l'énergie solaire est la production d'énergie électrique par des cellules photovoltaïques. Cette partie étudie le fonctionnement d'un ensemble de cellules pouvant venir en complément des dispositifs déjà étudiés. L'énergie pourra être stockée dans des batteries d'accumulateurs et restituée à une installation domestique par l'intermédiaire d'un onduleur.

I- Cellules photovoltaïques

Le comportement d'une cellule photovoltaïque est bien représenté par la fonction caractéristique

$$i = I_s \left(\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1 \right) - \alpha S E$$

avec $I_s = 0,10 \text{ nA}$; $U_0 = 25,8 \cdot 10^{-3} \text{ V}$; $S = 12 \text{ cm}^2$ et $\alpha = 0,35 \text{ A.W}^{-1}$ où α est le coefficient représentant les pertes, S la surface de la cellule et E l'éclairement solaire.



C.I.1. Lorsque le flux solaire est maximal, l'éclairement vaut $E_1 = 800 \text{ W.m}^{-2}$; par ciel voilé l'éclairement vaut $E_2 = 300 \text{ W.m}^{-2}$ et par temps gris, $E_3 = 100 \text{ W.m}^{-2}$. Calculer la tension aux bornes d'une cellule quand elle n'est pas branchée ($i = 0$) pour les trois éclairements E_1 , E_2 et E_3 . On notera U_{C1} , U_{C2} et U_{C3} ces trois tensions à vide.

C.I.2. Calculer numériquement le courant de court-circuit i_{cc} pour les trois éclairements, on les notera i_{cc1} , i_{cc2} et i_{cc3} .

C.I.3. Tracer l'allure des trois caractéristiques sur lesquelles on fera apparaître les points remarquables.

C.I.4. Calculer la puissance fournie P_u par la cellule.

Pour la suite, on envisagera le cas où le flux solaire est maximal $E_1 = 800 \text{ W.m}^{-2}$.

C.I.5. On cherche les conditions pour que la puissance P_u soit maximale. On

$$\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) \gg 1$$

admettra que dans ces conditions on a : . Etablir la relation permettant de calculer u_{Max} , valeur de u lorsque P_u est maximale. Par une méthode numérique, on trouve $u_{Max} = 0,490 \text{ V}$. Calculer la valeur de l'intensité i_{Max} correspondante. On branche aux bornes de la cellule une résistance R . Quelle valeur faut-il donner à la résistance R pour que ces conditions soient réalisées ?

C.I.6. On définit le rendement η de la cellule comme étant le rapport de la puissance maximale sur la puissance solaire reçue par toute la surface de la cellule. Ecrire l'expression de η . Faire l'application numérique. Commenter.

Dans le but d'améliorer les performances du dispositif, on cherche à associer les cellules en série et en parallèle.

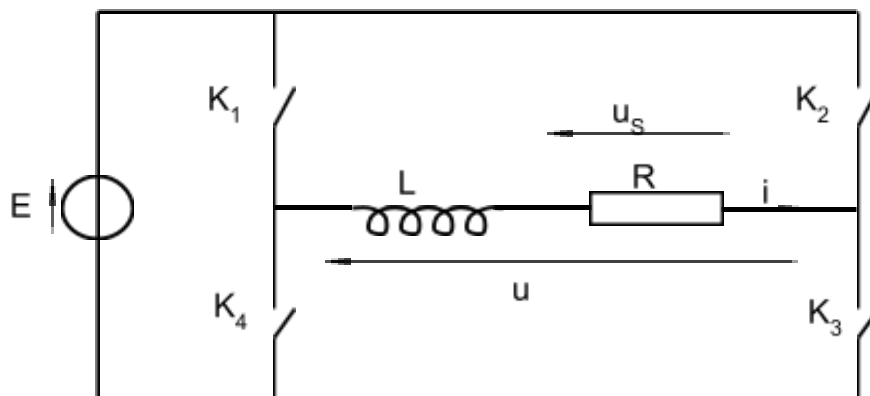
C.I.7. On met en parallèle n_p branches identiques constituées de n_s cellules en série. On prendra $n_s = 50$ et $n_p = 25$. Exprimer la tension V_D aux bornes du système et l'intensité I_D qui le traverse si chaque cellule fournit sa puissance maximale. Effectuer les applications numériques.

C.I.8. Déterminer numériquement la valeur R_M de la résistance à brancher aux bornes du capteur solaire ainsi constitué pour que la condition de puissance maximale soit réalisée.

C.I.9. On suppose maintenant que le capteur solaire n'alimente plus une résistance mais charge une batterie de résistance interne négligeable de 24 V. Quelle est la tension observée aux bornes de chaque cellule ? Quel courant traverse alors une cellule et la batterie ? Effectuer les applications numériques.

II- Etude de l'onduleur

Cette partie étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique ou décalée. Un onduleur est un convertisseur de tension continue en tension alternative. Le montage est celui représenté sur la figure ci-dessous.



Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1 , K_2 , K_3 et K_4 sont commandés électriquement de telle façon que :

Pour $nT < t < (n+1/2)T$	K_1 et K_3 sont fermés	K_2 et K_4 ouverts
Pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$	K_1 et K_3 sont ouverts	K_2 et K_4 fermés

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R représente la charge.

C.II.1. Tracer la courbe $u(t)$ en indiquant les points remarquables.

C.II.2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, courant circulant dans la charge.

C.II.3. Si $i_1(t)$ est la solution de cette équation pour $0 < t < T/2$ et $i_2(t)$ la solution de cette équation pour $T/2 < t < T$, déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R , L et E et en fonction de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 que l'on ne

cherchera pas à calculer pour l'instant. On pose $\tau = \frac{L}{R}$.

On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les valeurs de A_1 et A_2 .

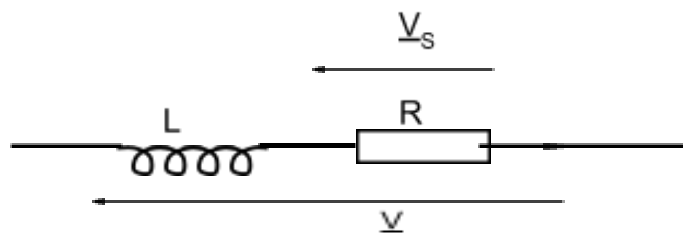
On pose $\alpha = \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)$.

C.II.4. Ecrire la condition de raccordement pour le courant en $t = T/2$; justifier. On obtient une première équation entre A_1 et A_2 .

C.II.5. En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre A_1 et A_2 . Résoudre le système ainsi trouvé.

C.II.6. Exprimer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer le graphe $i(t)$ en faisant apparaître les points remarquables.

On va maintenant étudier l'influence de l'inductance de lissage



C.II.7. Montrer que pour une tension V sinusoïdale de pulsation ω , l'ensemble R et L se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre. Pour cela, on calculera en notant $\underline{V}$ et $\underline{V}_s$ les grandeurs complexes associées aux tensions, la fonction de

transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}}$ que l'on exprimera en fonction de ω et τ . Puis on étudiera le comportement du module H de $\underline{H}(j\omega)$ pour les grandes et les petites pulsations.

C.II.8. Déterminer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de τ .

C.II.9. La tension en créneaux $u(t)$ de la question **C.II.1.** admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi}$$

De même la tension $u_s(t)$ admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

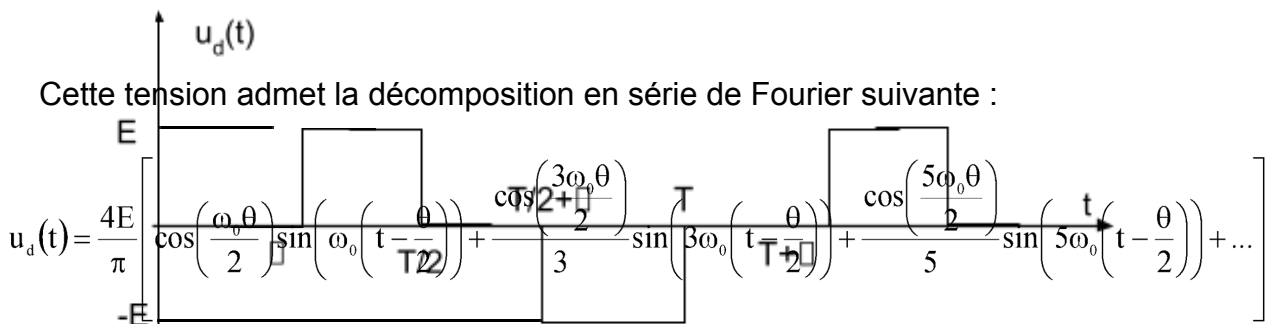
$$u_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \sin(n\omega_0 t + \phi_{Sn})$$

Justifier le fait que seuls les coefficients β_n correspondant à des n impairs soient différents de 0. Calculer les coefficients β_1 et β_3 de la décomposition en série de Fourier de la tension $u_s(t)$.

$$B = \frac{\beta_3}{\beta_1}$$

C.II.10. Déterminer le rapport que l'on exprimera en fonction de ω_0 et τ . Le calculer dans le cas $\omega_0 = \omega_C$.

Pour alimenter la charge avec un courant quasi-sinusoïdal, on modifie la commande des interrupteurs pour modifier la tension $u(t)$ et obtenir une tension $u_d(t)$ représentée sur la figure suivante.



C.II.11. Comment faut-il choisir θ pour que l'harmonique de rang 3 soit nul ? Dans ce cas, calculer pour la plus petite valeur positive de θ et pour $\omega_0 = \omega_C$, le rapport

$D = \frac{d_5}{d_1}$, où d_5 est l'amplitude de l'harmonique de rang 5 et d_1 est l'amplitude du fondamental (ou l'harmonique de rang 1) de la tension aux bornes de R. Conclure.

C.II.12. Donner, dans ces conditions, en fonction de E et R, la puissance moyenne sur une période reçue par la charge (la résistance R).