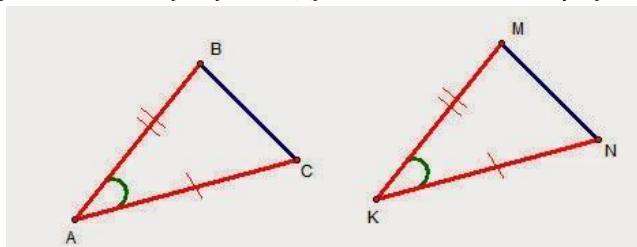


24. Равенство треугольников. Подобие треугольников

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

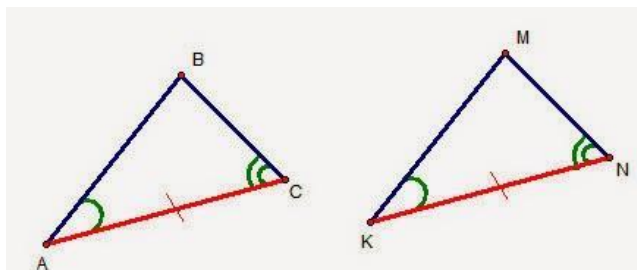
1 признак: признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника и угол между ними соответственно равны двум сторонам другого треугольника и углу между ними, то такие треугольники равны.



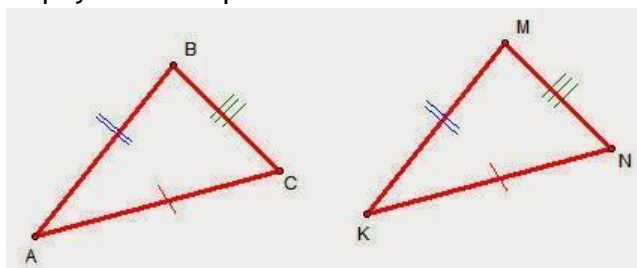
2 признак: признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



3 признак: признак равенства треугольников по трём сторонам

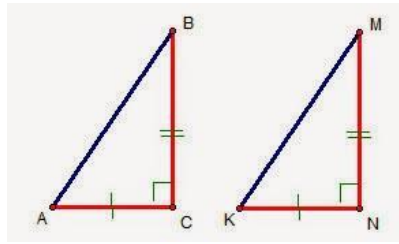
Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

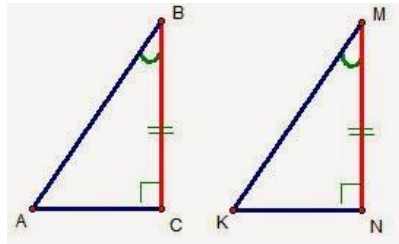
Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам

Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



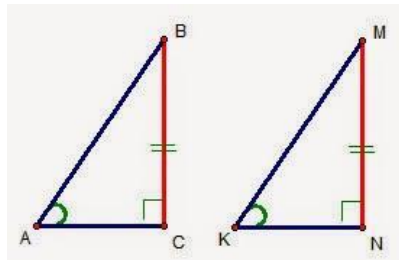
Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



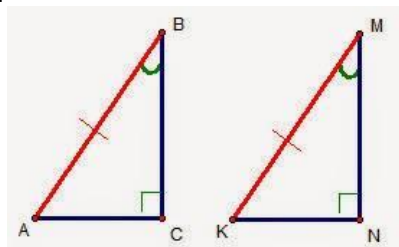
Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу

Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



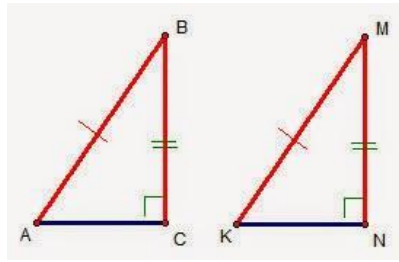
Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



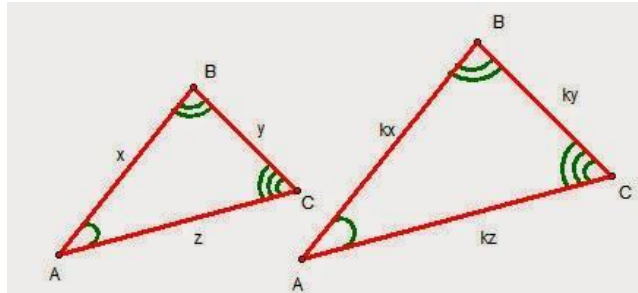
Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе

Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.



ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольники ABC и KLM называют **подобными треугольниками**, если их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

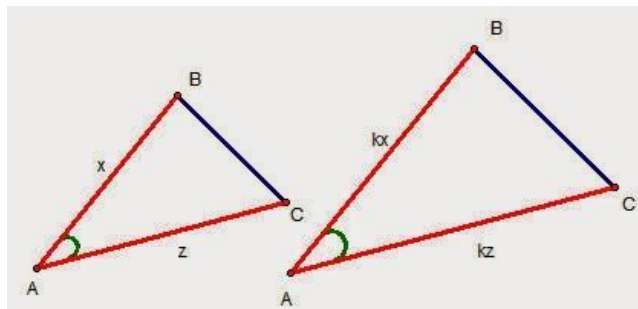


Отношение соответствующих сторон обозначается **k - коэффициент подобия** треугольников.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

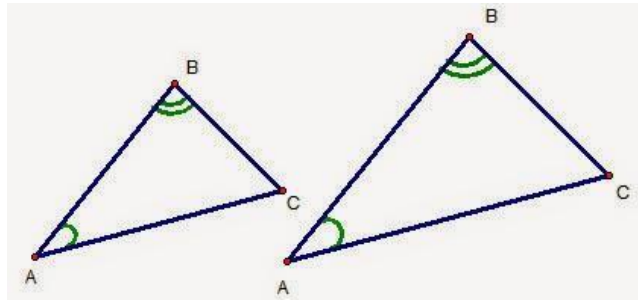
Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.



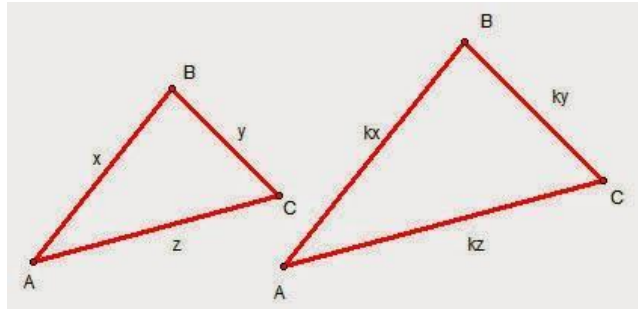
Признак подобия треугольников по двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



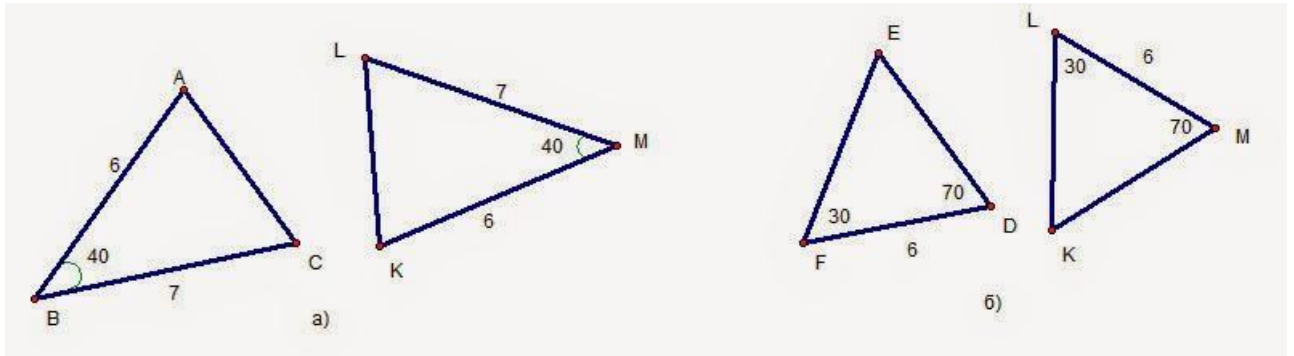
Признак подобия треугольников по трём сторонам

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



УПРАЖНЕНИЯ

1. По какому признаку равны треугольники?



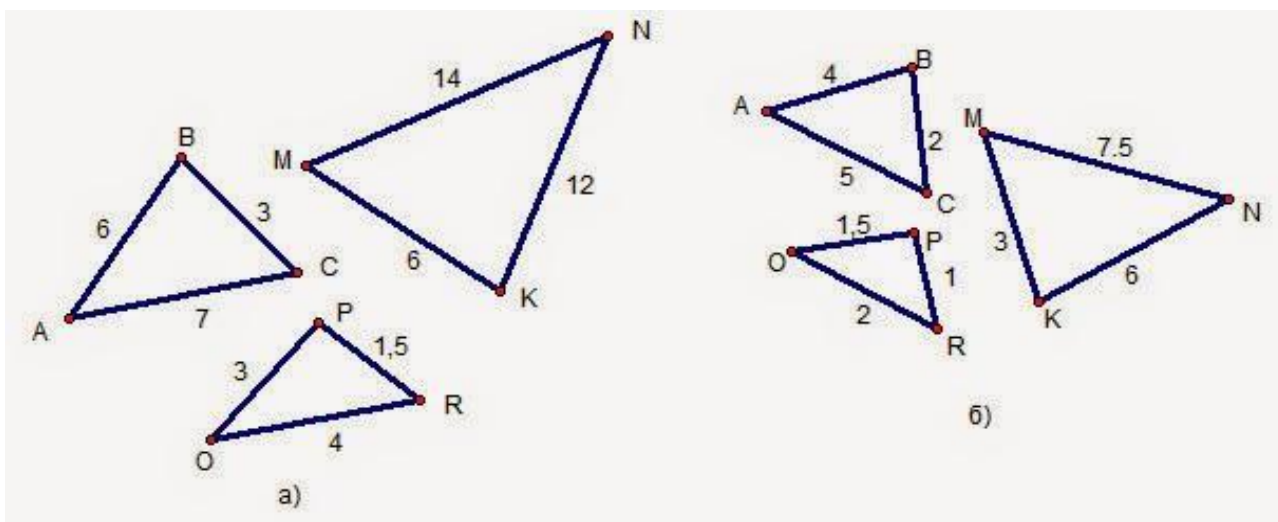
Решение:

а) Треугольник BAC равен треугольнику MKL по 1 признаку равенства треугольников:

1. $BA=MK$;
2. $BC=ML$;
3. $\angle B=\angle M=40^\circ$

Ответ: по 1 признаку равенства треугольников.

2. Укажите подобные треугольники:



Решение:

а) Рассмотрим треугольники ABC и MNK:

$NK:AB=12:6=2$; $MN:AC=14:7=2$; $MK:BC=6:3=2$. Треугольники ABC и MNK подобны по трем сторонам.

Рассмотрим треугольники ABC и OPR:

$AB:OP=6:3=2$; $AC:OR=7:4=7/4$, т.к. отношения сторон не равны, то и треугольники ABC и OPR не подобны, а также и треугольники MNK и OPR не могут быть подобны.

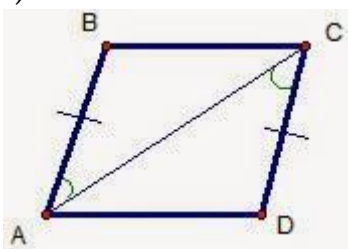
Ответ: ABC и MNK.

3. а) В четырехугольнике ABCD $AB=CD$, $\angle BAC=\angle ACD$. Доказать, что треугольники ABC и ACD равны.

б) В четырехугольнике ABCD $AB=CD$, $AD=BC$. Доказать, что треугольники ABD и BCD равны.

Решение:

а)



$\triangle ABC = \triangle ACD$ по первому признаку равенства треугольников:

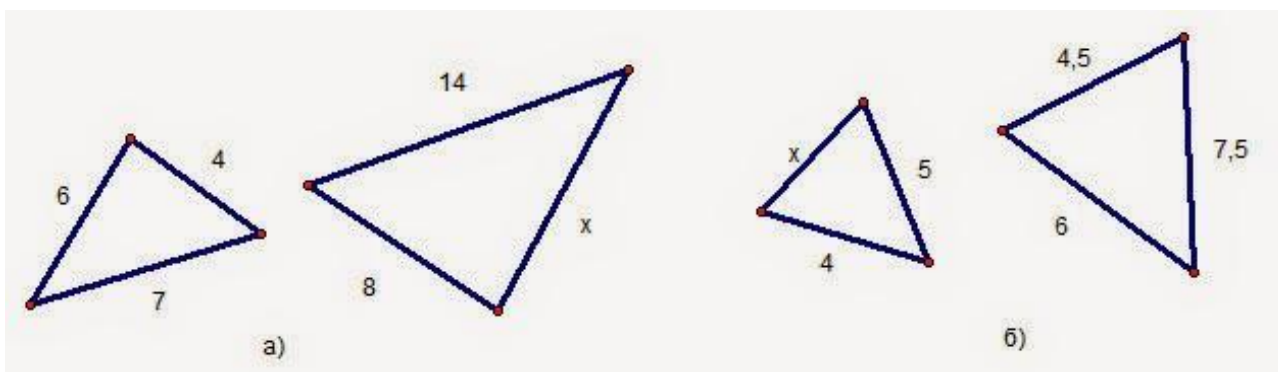
1) $\angle BAC = \angle ACD$ по условию;

2) AC - общая сторона;

3) $AB = CD$ по условию.

Что и требовалось доказать.

4. Треугольники подобны. Найдите x.



Решение:

а) Так как треугольники подобны, найдем отношение их сторон: $14:7=2$ и $8:4=2$, тогда $x:6=2$, $x=6*2=12$

Ответ: 12.

5. а) Дерево отбрасывает тень, длина которой 10 м, а длина тени человека ростом 1,8 м равна 2,4 м. Найдите высоту дерева.

б) Дом, высотой 15 м отбрасывает тень, длина которой равна 21 м. Найдите рост человека, если длина его тени равна 2,5 м.

Решение:

а) Пусть высота дерева - x м. Высота дерева относится к росту человека так же, как и тень дерева к тени человека:

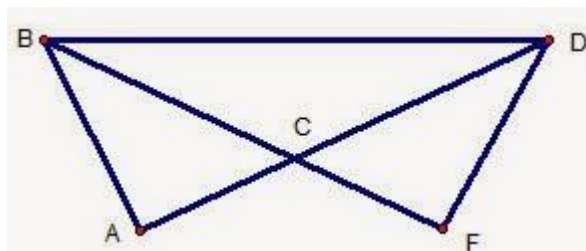
$$x:1,8=10:2,4;$$

$$x=1,8*10:2,4=7,5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 7,5 м.

6. а) Докажите, что треугольники ABC и DFC равны, если $AB=DF$, $BF=AD$.

б) Докажите, что треугольники ABD и DFB равны, если треугольники ABC и DFC равны.



Решение:

а) Рассмотрим треугольники ABD и FDB. Они равны по 3 признаку равенства треугольников, т.к.:

1) BD - общая сторона;

2) $AB=DF$ по условию;

3) $BF=AD$ по условию.

Из равенства треугольников ABD и FDB следует равенство соответствующих элементов, т.е. $\angle A=\angle F$.

Рассмотрим треугольники ABC и FDC. Они равны по 2 признаку равенства треугольников:

1) $BA=DF$ по условию;

2) $\angle A=\angle F$ по доказанному;

3) $\angle ABC=\angle CDF$, т.к. $\angle ABC=\angle ABD-\angle DBF$ и $\angle CDF=\angle BDF-\angle ADF$.

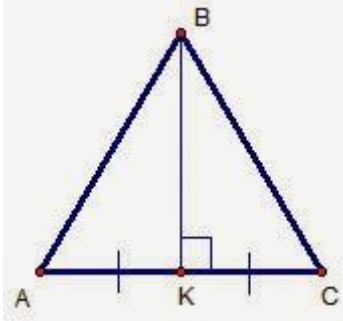
Что и требовалось доказать.

7. а) Доказать, что если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный.

б) Доказать, что если в треугольнике биссектриса является высотой, то треугольник - равнобедренный.

Решение:

а)



Рассмотрим прямоугольные треугольники ABK и CBK , они равны по двум катетам:

1) BK - общая сторона;

2) $AK=KC$, т.к. BK - медиана.

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих элементов и $AB=CB$.

Т.к. две стороны треугольника равны, он - равнобедренный.

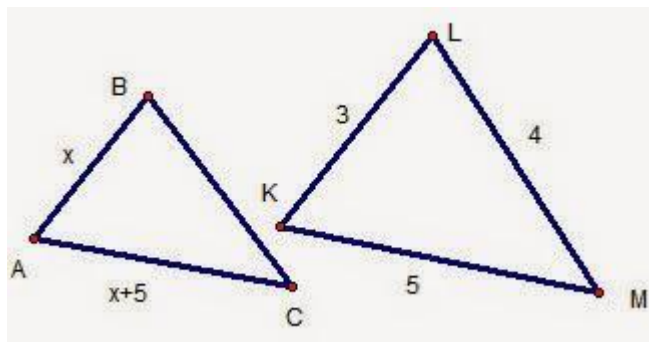
Что и требовалось доказать.

8. а) Треугольники ABC и KLM - подобны. $KL=3$ см, $LM=4$ см, $KM=5$ см. Найти стороны треугольника ABC , если $AC-AB=5$ см.

б) Треугольники ABC и KLM - подобны. $KL=2$ см, $LM=3$ см, $KM=4$ см. Найти стороны треугольника ABC , если $AC-BC=1,5$ см.

Решение:

а)



1) Обозначим сторону AB как x , тогда $AC=x+5$.

Из подобия треугольников ABC и KLM получим: $AC:KM=AB:KL$.

$$(x+5):5=x:3,$$

$$3x+15=5x,$$

$$x=7,5 \text{ (см)} - \text{ сторона } AB.$$

$$2) AC=AB+5=7,5+5=12,5 \text{ (см)}$$

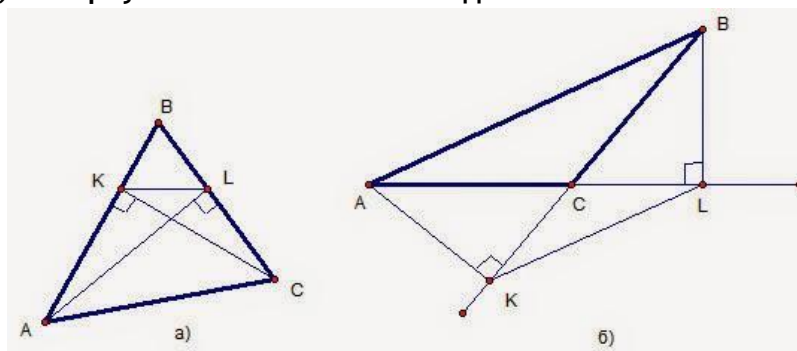
3) Из подобия треугольников ABC и KLM получим: $AC:KM=BC:KL$.

$$12,5:5=BC:4,$$

$$BC=4 \cdot 12,5:5=10 \text{ (см)}$$

Ответ: 7,5 см, 10 см, 12,5 см.

9. а) Докажите, что треугольники ABC и KBL подобны.
 б) Докажите, что треугольники ABC и KCL подобны.



Решение:

а) Рассмотрим треугольники BAL и BCK, они подобны по двум углам:

1. $\angle BLA = \angle BKC = 90^\circ$;
2. $\angle B$ - общий.

Из подобия треугольников получим, что $BK:BL = BC:AB$ или $BK:BC = BL:AB$.

Рассмотрим треугольники KBL и ABC, они подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними:

1. $BK:BC = BL:AB$ по доказанному;
2. $\angle B$ - общий.

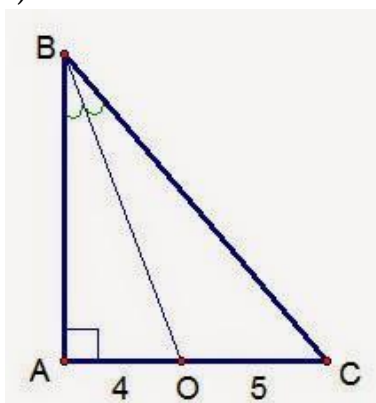
Что и требовалось доказать.

10. а) В прямоугольном треугольнике, биссектриса, проведенная из вершины к катету делит его на отрезки 4 см и 5 см. Найдите площадь треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике, биссектриса, проведенная из вершины к катету делит его на отрезки 9 см и 15 см. Найдите площадь треугольника.

Решение:

а)



По свойству биссектрисы: $AB:BC = AO:OC$; $AB \cdot OC = BC \cdot AO$.

Пусть $AB = x$, тогда по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $BC^2 = x^2 + 81$.

По свойству биссектрисы: $AB:BC = AO:OC$; $AB \cdot OC = BC \cdot AO$.

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 81},$$

$$25x^2 = 16(x^2 + 81),$$

$$9x^2 = 1296,$$

$$x^2 = 144,$$

$$x = 12.$$

$$S=12 \cdot 9 : 2 = 54 \text{ см}^2$$

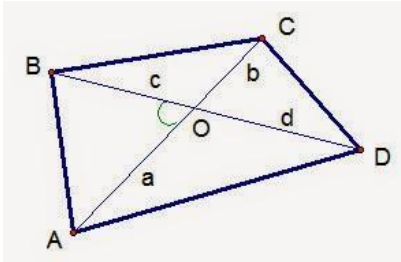
Ответ: 54 см^2

11. а) Доказать, что произведения площадей противоположных треугольников, образованных диагоналями выпуклого четырехугольника равны.

б) В выпуклом четырехугольнике проведены отрезки, которые соединяют середины его сторон. Доказать, что суммы площадей полученных противоположных четырехугольников равны.

Решение:

а)



Докажем, что $S_{ABO} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{ODA}$.

$$S_{ABO} = c \cdot a \cdot \sin \angle BOA : 2.$$

$$S_{COD} = b \cdot d \cdot \sin \angle COD : 2.$$

$$S_{BOC} = c \cdot b \cdot \sin \angle BOC : 2.$$

$$S_{ODA} = a \cdot d \cdot \sin \angle AOD : 2.$$

$\angle BOA = \angle COD$ как вертикальные;

$\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные.

$$\sin \angle BOC = \sin(180 - \angle BOA) = \sin \angle BOA.$$

Получим:

$$c \cdot a \cdot \sin \angle BOA : 2 \cdot b \cdot d \cdot \sin \angle BOA : 2 = c \cdot b \cdot \sin \angle BOA : 2 \cdot a \cdot d \cdot \sin \angle BOA : 2;$$

$$1 = 1.$$

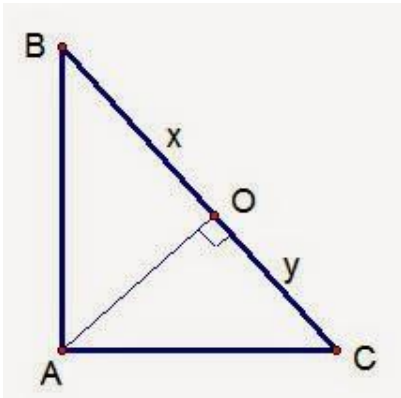
Что и требовалось доказать.

12. а) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе делит его на два треугольника, площади которых 16 см^2 и 4 см^2 . Найти гипотенузу треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе делит его на два треугольника, площади которых 6 см^2 и 54 см^2 . Найти гипотенузу треугольника. (№ 5.5.27 [7])

Решение:

а)



Обозначим $BO=x$, $OC=y$.

По свойству высоты, проведенной к гипотенузе в прямоугольном треугольнике:
 $AO^2=x \cdot y$.

Площадь прямоугольного треугольника ABO равна половине произведения катетов:
 $16=AO \cdot x : 2$. $AO \cdot x=32$.

Площадь прямоугольного треугольника AOC равна половине произведения катетов:
 $4=AO \cdot y : 2$. $AO \cdot y=8$.

Разделив первую площадь на вторую получим: $x=4y$.

По свойству высоты, проведенной к гипотенузе в прямоугольном треугольнике:
 $AO^2=x \cdot y$.

Получим:

$$\sqrt{xy} \cdot y = 8,$$

$$xy \cdot y^2 = 64,$$

$$y^3 = 64 : x,$$

Т.к. $x=4y$, то $y^3=64:(4x)$; $y^4=16$, $y=2$ (см) - CO.

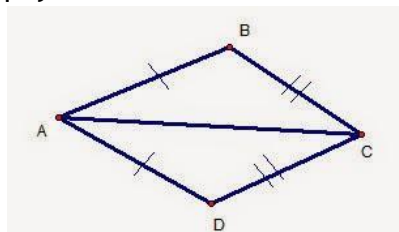
$x=4 \cdot 2=8$ (см) - BO.

$BC=BO+OC=8+2=10$ (см).

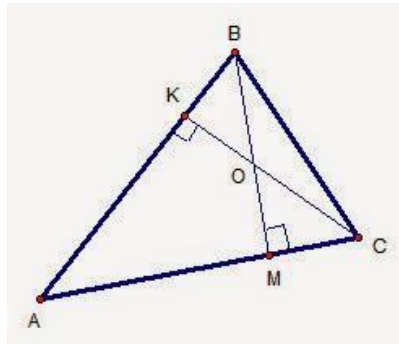
Ответ: 10 см.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

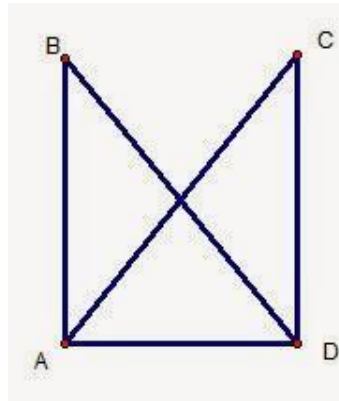
1. По какому признаку равны треугольники?



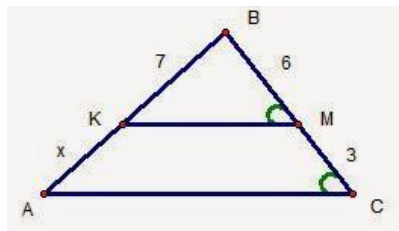
2. Запишите все пары подобных треугольников:



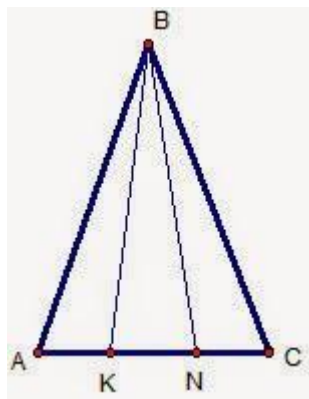
3. Докажите, что треугольники ABD и ADC равны, если $AB=DC$.



4. Найдите x :



5. Треугольник ABC - равнобедренный с основанием AC. Доказать, что треугольник KBN - равнобедренный, если $AK=NC$.



6. Треугольники ABC и KLM - подобны. $KL=5$ см, $LM=7$ см, $KM=3$ см. Найти стороны треугольника ABC, если его периметр равен 45 см.

7. Стороны треугольника относятся как 3:4:5, его площадь равна 24 см². Найдите периметр треугольника.

8. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC:BC=5:4$ и площадь треугольника AKC = 40 см², где CK - биссектриса треугольника ABC.

9. а) Точки K и O лежат на сторонах треугольника ABC. Доказать, что KO меньше любой из сторон треугольника.

б) Точка O лежит внутри треугольника ABC . Доказать, что $OC+OB$ меньше, чем $AC+AB$.

10. Точка O находится внутри равностороннего треугольника. Доказать, что сумма расстояний от этой точки до сторон треугольника - постоянная величина.