

# Quelques aspects de l'étude du Soleil et des étoiles

*Remarques préliminaires : Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé par la suite même s'il n'a pas été démontré par le candidat. Un résultat numérique n'est valable que s'il est accompagné de son unité. La qualité des explications et des justifications est prise en compte dans la notation.*

## 1- La Troisième Loi de Képler

On considère un satellite assimilé à un point matériel  $P$  de masse  $m$  en orbite autour d'un astre fixe, au point  $O$  et de masse  $M$ . On notera  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  et  $G$  la constante universelle de gravitation.

1.1 Exprimer la force exercée par l'astre fixe sur le satellite en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $r$  et de la distance  $r$ .

1.2 Que vaut le moment en  $O$  de la force précédente ?

1.3 Exprimer le moment cinétique en  $O$  du satellite en fonction de  $m$ , de son vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur  $\vec{r}$ .

1.4 En appliquant en  $O$  le théorème du moment cinétique, montrer que la trajectoire du satellite est plane.

1.5 On se place dorénavant dans le plan de la trajectoire. On repère un point  $P$  par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  (cf. figure 1). La base polaire sera notée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . Déterminer

l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du satellite en coordonnées polaires.

Pour cette question et toutes les suivantes, on suppose que la trajectoire du satellite est un cercle de rayon  $r$ . Comment se simplifie l'expression de  $\vec{v}$  ?

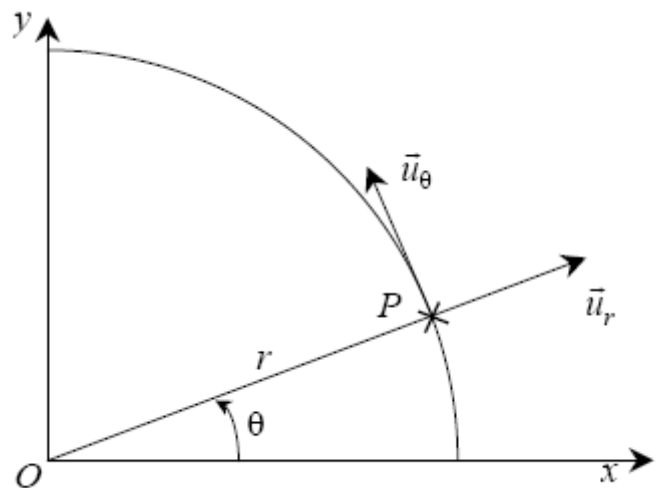


Figure 1

1.6 Déterminer en coordonnées polaires l'expression du vecteur accélération du satellite.

1.7 À partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite, montrer que la vitesse angulaire du satellite  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  est constante.

1.8 Dédurre aussi de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite que  $r^3 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^3 = K$  où  $K$  est une constante qu'on exprimera en fonction des données.

1.9 On appelle  $T$  la période du mouvement. Démontrer la relation suivante, appelée 3<sup>ème</sup> loi de Képler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

## 2- Le Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos fut lancé le 8 août 1989 par une fusée Ariane IV. Ce projet de l'Agence spatiale européenne (ESA) avait notamment pour but de mesurer avec précision la distance de plus de 2,5 millions d'étoiles. Il était prévu à l'origine de placer Hipparcos sur une orbite géostationnaire.

Cette partie se propose d'étudier les caractéristiques principales d'une telle orbite.

On se placera dans cette partie dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On rappelle que le référentiel géocentrique a pour origine le centre  $T$  de la Terre et que ses axes pointent dans trois directions fixes. Un satellite, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est en orbite autour de la Terre, de masse  $M_T$ . On négligera l'influence sur le mouvement du satellite des astres autres que la Terre. Le satellite est géostationnaire c'est-à-dire qu'il reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre situé à l'équateur.

2.1 La période de l'orbite du satellite géostationnaire est égale à un jour *sidéral* dont la durée  $T_{sid}$  est de 23 h 56 min 4 s ( $T_{sid} = 86\,164$  s). Expliquer pourquoi cette valeur est légèrement inférieure (d'environ 4 minutes) à la durée du jour *solaire*  $T_{sol}$  de 24 heures.

2.2 En notant  $h$  l'altitude et  $R_T$  le rayon de la Terre et en utilisant la 3<sup>ème</sup> loi de Képler (donnée à la question 1.9), calculer numériquement l'altitude du satellite géostationnaire.

Données :

$$T_{sid} = 86\,164 \text{ s} ; R_T = 6\,378 \text{ km} ; M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Le satellite Hipparcos devait être placé sur une telle orbite géostationnaire mais, en raison d'une panne de moteur au moment du lancement, il se retrouva sur une orbite très elliptique, ce qui ne l'empêcha pas de remplir correctement sa mission. Celle-ci s'est achevée le 17 août 1993.

### 3. Sondes spatiales aux points de Lagrange

Pour succéder à Hipparcos, l'Agence spatiale européenne développe le projet Gaia, qui est une sonde devant être lancée en décembre 2011. Elle doit observer plus d'un milliard d'objets et permettre ainsi de grands progrès dans la connaissance des étoiles, des galaxies et des planètes extrasolaires. L'orbite de Gaia sera complètement différente de celle d'Hipparcos puisque Gaia sera placée à l'un des points de Lagrange.

Les points de Lagrange sont des points particuliers où un objet de faible masse (comme une sonde) tournerait autour du Soleil avec exactement la même vitesse angulaire que la Terre. On ne s'intéressera qu'aux deux points de Lagrange  $L_1$  et

$L_2$  qui se situent tous deux sur la droite  $(ST)$  où  $S$  est le centre du Soleil et  $T$  celui de la Terre,  $L_1$  étant

entre  $S$  et  $T$  alors que  $L_2$  se trouve plus loin de  $S$  que  $T$  (cf. figure 2). On appelle le référentiel héliocentrique, supposé galiléen, d'origine  $S$  et dont les axes  $(SX, SY, SZ)$  ont des directions fixes. On

définit un second référentiel,  $R(S, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  tournant par rapport au précédent autour de l'axe  $SZ$

à la vitesse angulaire de la Terre,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , constante, la Terre étant supposée avoir une orbite circulaire autour du Soleil.

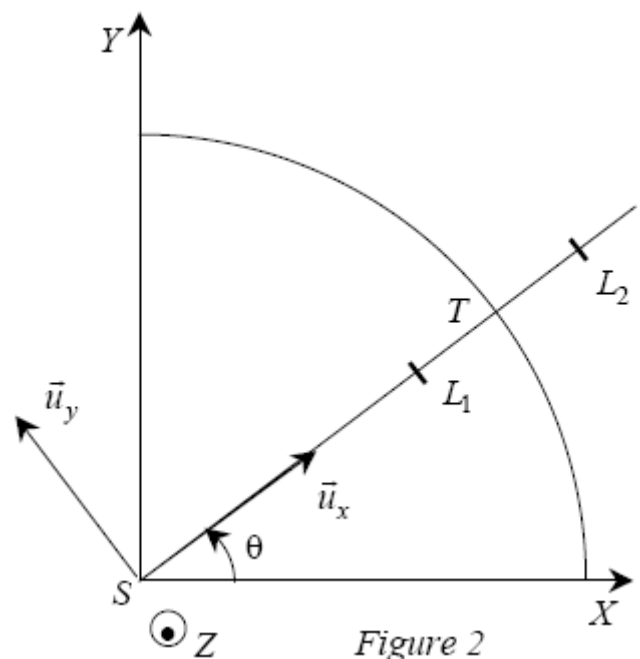


Figure 2

On suppose que la sonde se trouve au point de Lagrange  $L_2$ . On notera :  $d = ST$ ,  $\ell_2 = TL_2$

3.1 Le référentiel  $R$  est-il galiléen ?

3.2 On se place dans le référentiel  $R$ . La sonde, de masse  $m$ , subit alors la force :

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_T + m(d + \ell_2)\omega^2 \vec{u}_x$$

où  $\vec{F}_S$  et  $\vec{F}_T$  sont les forces gravitationnelles exercées respectivement par le Soleil et par la Terre sur la sonde. Expliquer l'origine du troisième terme  $m(d + \ell_2)\omega^2 \vec{u}_x$  (la démonstration de cette expression n'est pas demandée).

3.3 Donner l'expression de  $\vec{F}_S$  en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $\ell_2$  et de la masse du Soleil  $M_S$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  de  $R$ .

3.4 Donner l'expression de  $\vec{F}_T$  en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $\ell_2$  et de la masse de la Terre  $M_T$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  de  $R$ .

3.5 Écrire la condition d'équilibre de la sonde dans le référentiel  $R$  en ne faisant intervenir que  $G$ ,  $M_T$ ,  $M_S$ ,  $d$ ,  $\ell_2$  et la durée  $T_A$  de l'année terrestre (période de l'orbite de la Terre autour du Soleil).

3.6 En utilisant la 3e loi de Képler donnée à la question 1.9, et en notant  $\varepsilon = \ell_2 / d$ , montrer que cette

$$M_S \left( 1 + \varepsilon - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \right) - \frac{M_T}{\varepsilon^2} = 0$$

condition peut s'écrire :

$$\varepsilon^3 = \gamma \frac{M_T}{M_S}$$

3.7 On suppose  $\varepsilon \ll 1$ . Montrer que l'équation précédente se simplifie en :

Déterminer la constante sans dimension,  $\gamma$ .

On rappelle qu'au second ordre près,  $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ .

3.8 Calculer numériquement  $\ell_2$ .

Données :  $d = 1,5 \cdot 10^8$  km ;  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg ,  $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg

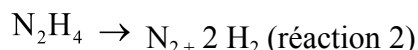
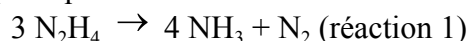
3.9 On admet que le point de Lagrange  $L_1$  est le symétrique de  $L_2$  par rapport à  $T$  c'est-à-dire que  $TL_1 = TL_2$ . Étant donné les objectifs de Gaia, dire, en justifiant la réponse, si les ingénieurs de l'ESA prévoient d'envoyer Gaia au point de Lagrange  $L_1$  ou au point de Lagrange  $L_2$ .

#### 4- Propulsion de la sonde SOHO

La sonde SOHO, lancée le 2 décembre 1995, a pour mission l'étude du Soleil et notamment du vent solaire (flux de matière ionisée émis par le Soleil) et des éruptions solaires dont les conséquences sur Terre et sur les satellites peuvent être très importantes (perturbation des télécommunications, endommagement de transformateurs et de satellites géostationnaires, érosion d'oléoducs, aurores polaires).

4.1 SOHO a été placé à l'un des deux points de Lagrange définis dans la partie 3. Compte tenu de sa mission, dire s'il s'agit du point  $L_1$  ou du point  $L_2$ , en justifiant la réponse.

4.2 La propulsion de SOHO utilise l'énergie chimique fournie par les réactions de décomposition de l'hydrazine  $N_2H_4$ . On ne se préoccupera que des réactions suivantes :



Donner la formule de Lewis de la molécule d'ammoniac  $NH_3$ .

4.3 Donner la formule de Lewis de la molécule de diazote.

4.4 L'hydrazine est stockée à l'état liquide. Les produits de réaction sont gazeux. Pour faire fonctionner le moteur, on fait passer l'hydrazine liquide sur un catalyseur. La réaction est très rapide et produit de grandes quantités de gaz chauds dont l'expulsion à grande vitesse assure la propulsion. On donne les enthalpies standard de formation à 298 K des constituants impliqués dans ces deux réactions (les indices *l* et *g* indiquent respectivement l'état liquide et gazeux du constituant) :

| Constituant                                     | $N_2H_4(l)$ | $NH_{3(g)}$ | $N_{2(g)}$ | $H_{2(g)}$ |
|-------------------------------------------------|-------------|-------------|------------|------------|
| $\Delta_f H^\circ \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$ | 50,63       | -45,9       | 0          | 0          |

Justifier que les enthalpies standard de formation à 298 K du diazote gazeux et du dihydrogène gazeux sont nulles.

4.5 Calculer l'enthalpie standard de réaction à 298 K de la réaction 1.

4.6 Calculer l'enthalpie standard de réaction à 298 K de la réaction 2.

4.7 Ces réactions sont-elles endothermiques ou exothermiques ?

## 5- Lunette astronomique

La lunette astronomique est un instrument destiné à l'observation des astres lointains. Quoique supplantées aujourd'hui par les télescopes à miroir parabolique, les lunettes astronomiques ont eu une grande importance en astronomie.

Schématiquement, une lunette astronomique se compose de deux lentilles minces convergentes successives. La lumière provenant de l'astre observé arrive d'abord sur une lentille  $L_1$  appelée *objectif*, de distance focale  $f_1'$ , puis sur une lentille  $L_2$ , appelée *oculaire*, de même axe optique que la précédente et de distance focale  $f_2'$  ( $f_1' > f_2'$ ). Soient  $O_1$  et  $O_2$  les centres optiques respectifs de  $L_1$  et  $L_2$  et soit  $d$  la distance  $O_1O_2$ .

5.1 La lunette a son axe optique dirigé vers une étoile, objet ponctuel situé à l'infini. On veut que l'image finale de l'étoile par la lunette (donc après traversée des deux lentilles) soit elle aussi à l'infini (réglage dit *afocal*). Exprimer la distance  $d$  en fonction de  $f_1'$  et  $f_2'$ .

5.2 Faire un schéma de la lunette dans le réglage afocal et représenter la marche d'un rayon lumineux ne coïncidant pas avec l'axe optique.

5.3 On observe maintenant un objet ponctuel à l'infini situé hors de l'axe optique de la lunette. Les rayons issus de cet objet arrivant sur l'objectif forment un faisceau de rayons parallèles inclinés d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe optique de la lunette.

Représenter la marche à travers la lunette (toujours en réglage afocal) de deux rayons lumineux bien espacés de ce faisceau.

5.4 Le faisceau précédent émergeant de la lunette afocale est formé de rayons parallèles inclinés d'un angle  $\alpha'$  par rapport à l'axe optique. Les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ , étant supposés petits, déterminer le rapport appelé *grossissement*, en fonction de  $f_1'$  et  $f_2'$ .

## 6- Les Boucles magnétiques du Soleil

L'activité magnétique du Soleil est importante et complexe. L'une de ses manifestations est la présence de tubes de champ magnétique aussi bien à l'intérieur du Soleil que dans l'atmosphère solaire. La frontière entre les deux régions est une surface appelée *photosphère* (c'est la limite visible du Soleil). La dynamique complexe de ces tubes de champ magnétique a une importance considérable, notamment pour la compréhension des phénomènes éruptifs. Cette partie se propose d'aborder quelques aspects des boucles magnétiques coronales (c'est-à-dire de la couronne solaire).

On rappelle les équations de Maxwell dans le vide :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

6.1 Laquelle de ces équations exprime localement la conservation du flux magnétique ?

L'écrire sous forme intégrale.

6.2 Une ligne de champ magnétique est une courbe tangente au champ magnétique en tout point. Elle donne donc la direction du champ (une flèche sur la ligne permet en outre de préciser le sens du champ). Un tube de champ magnétique est une surface, en forme de tube, de section éventuellement variable, constituée de lignes de champ magnétique. Le champ magnétique est donc tangent en tout point à la surface latérale d'un tube de champ.

Un tube de champ magnétique est représenté à la figure 3.

Déduire de la forme intégrale de la question précédente que le flux magnétique à travers la section  $\Sigma_1$  du tube de champ est égal au flux magnétique à travers la section  $\Sigma_2$ .

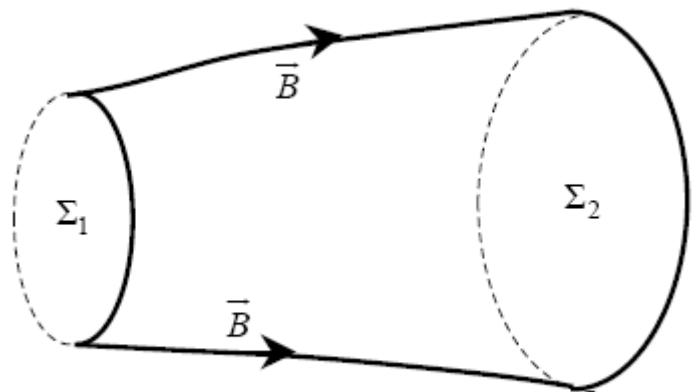


Figure 3

6.3 On considère maintenant un tube de champ magnétique en forme de cylindre de révolution d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  (cf. figure 4). On utilisera les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et on notera  $(u_r, u_\theta, u_z)$  la base correspondante.



Figure 4

Ce tube de champ enferme de la matière ionisée (plasma) constituée de particules chargées. Des courants électriques peuvent donc exister dans le tube de champ.

On suppose d'abord que le champ magnétique, dirigé selon  $Oz$ , ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe  $Oz$  :

$$\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z \quad (\text{avec } B_z > 0).$$

De plus,  $B_z$  décroît depuis l'axe vers la périphérie de telle sorte que  $\frac{dB_z}{dr} < 0$ .

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

On se place en régime stationnaire. Déterminer, à partir de l'équation de Maxwell-Ampère, la densité de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur du tube de champ dans la base des coordonnées cylindriques, en fonction de  $\frac{dB_z}{dr}$  et de constantes fondamentales. On montrera notamment que  $\vec{j}$  est orthoradial.

6.4 Un élément de volume  $d\tau$  parcouru par des courants de densité  $\vec{j}$ , plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , subit la force de Laplace :

$$d\vec{F}_1 = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

Montrer que  $d\vec{F}_1$  est une force radiale dirigée vers l'extérieur du tube de champ.

6.5 Cette force qui tend donc à dilater le tube de champ est équilibrée à l'intérieur du Soleil par la pression gazeuse. En revanche, celle-ci est trop faible dans l'atmosphère solaire et c'est un autre phénomène qui permet d'obtenir cet équilibre.

On se place dorénavant dans le cas d'un tube de champ de l'atmosphère solaire, plus particulièrement de la couronne solaire qui en est la couche extérieure (la couronne n'est visible que lors des éclipses totales de Soleil où elle apparaît comme une grande auréole). Le tube de champ est parcouru par un courant électrique axial dont la densité ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{j} = j_z(r) \vec{u}_z$$

Montrer, par des arguments de symétrie clairement expliqués, que cette distribution de courant crée un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

6.6. Que représente l'intégrale  $I(r) = \int_0^r j_z(\rho) 2\pi \rho d\rho$  ?

Il résulte de cette définition que  $\frac{dI}{dr} = 2\pi r j_z(r)$

6.7 En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour bien choisi, exprimer le champ magnétique créé par cette distribution de courant en fonction de  $r$ , de  $I(r)$  et de constantes fondamentales.

6.8 Ce champ magnétique orthoradial exerce sur un élément de volume du tube parcouru par le courant axial  $j = j_z(r)u_z$  une force de Laplace  $dF_2$ . Montrer que cette force peut s'écrire sous la forme :

$$dF_2 = -\frac{\mu_0}{\beta r^2} I(r) \frac{dI}{dr} d\tau u_r$$

où  $\beta$  est une constante sans dimension que l'on déterminera.

6.9 Cette force  $dF_2$  est radiale et dirigée vers l'intérieur du tube de champ. On superpose maintenant les deux phénomènes : le champ magnétique possède à la fois une composante axiale  $B_z$  (définie à la question 6.3) et une composante orthoradiale  $B_\theta$  résultant de l'existence du courant axial  $j_z$  (défini à la question 6.5). La composante axiale de  $B$  crée une composante orthoradiale  $j_\theta$  de la densité de courant (question 6.3). Montrer que  $dF_2$  équilibre la force  $dF_1$  si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{j_\theta}{j_z} = \frac{B_\theta}{B_z}$$

6.10 Montrer que la condition précédente traduit le fait que, dans un tube de champ magnétique coronal en équilibre, la densité de courant  $j$  dans le tube est colinéaire au champ magnétique  $B$ .

6.11 Le mécanisme des éruptions solaires et des éjections de matière coronale n'est pas encore totalement compris. Les tubes de champ forment des boucles magnétiques dans la couronne (figures 5 et 6). Dans certains cas, les lignes de champ subissent des reconnexions plus ou moins complexes qui se traduisent notamment par des variations temporelles du champ magnétique, qui conduisent à une accélération des particules chargées présentes dans la boucle, pouvant conduire à une éruption. Montrer qu'un champ magnétique stationnaire ne peut en aucun cas augmenter l'énergie cinétique d'une particule chargée.

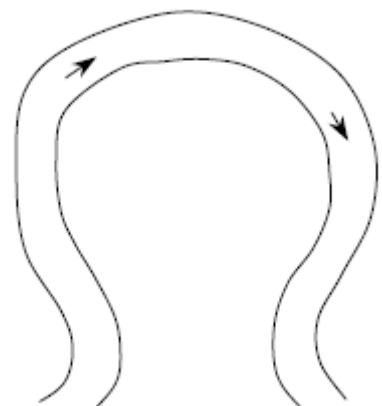
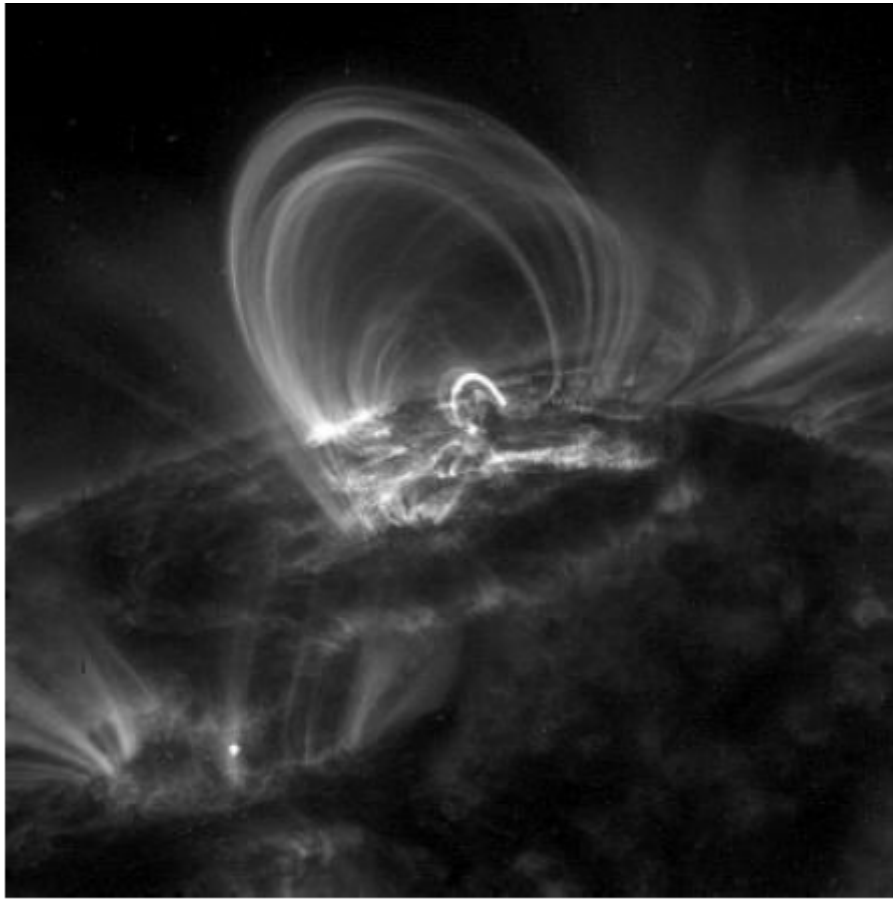


Figure 5

6.12 Sur quelle équation de Maxwell pourrait-on s'appuyer pour expliquer qu'un champ magnétique variable dans le temps puisse conduire à une augmentation de l'énergie cinétique de particules chargées ? On justifiera la réponse.



*Figure 6*

*Cliché d'une boucle magnétique coronale, pris par le télescope spatial TRACE lancé par la NASA en 1998. Le tube magnétique peut être visualisé en ultra-violet en raison de la matière ionisée (plasma) emprisonnée dans le tube, les particules chargées étant astreintes à suivre les lignes de champ magnétique. La température du plasma dans la boucle est d'environ 1 million de K. Cette boucle coronale mesure approximativement 30 000 km, c'est-à-dire à peu près trois fois la taille de la Terre.*