

De la phase à l'amplitude et vice versa

Le problème est constitué de trois parties très largement indépendantes entre elles. La partie A présente une technique permettant de moduler la phase d'un signal électrique. La partie B est consacrée à l'étude de la méthode dite de « contraste de phase », qui permet de transformer un signal optique modulé en phase en un signal optique modulé en amplitude. Enfin la partie C analyse une application de cette technique à un problème de diffusion de particules.

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

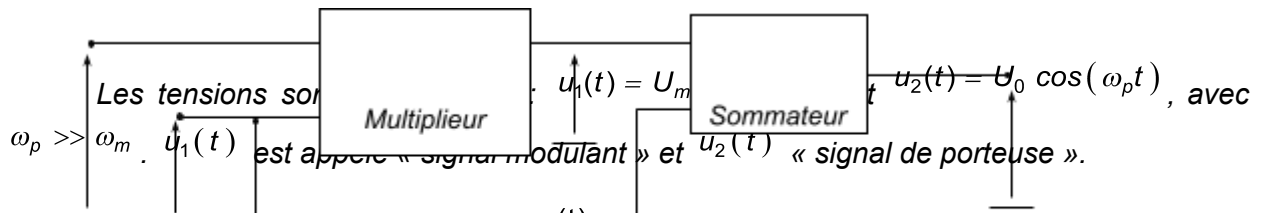
- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ;
- tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italique ont pour objet d'aider à la compréhension du problème ;
- tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s ;
- dans tout le problème, j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

PREMIERE PARTIE

ELECTRONIQUE

A / MODULATION D'AMPLITUDE

Le montage de la figure 1 représente schématiquement un modulateur d'amplitude ; il comprend un multiplieur, qui délivre une tension de sortie $v_{s1} = k \times u_1 \times u_2$ (k étant une constante) et un sommateur qui délivre en sortie une tension v_s , égale à la somme des tensions d'entrée.



A1. Montrer que la tension de sortie $v_s(t)$ peut s'écrire sous la forme : $v_s(t) = U_0 \cos(\omega_p t) \times [1 + m \cos(\omega_m t)]$, et déterminer m en fonction de k et U_m .

A2. Représenter graphiquement, de façon schématique, la tension $v_s(t)$, en supposant que $m < 1$.

B / MODULATION DE PHASE – METHODE D'ARMSTRONG

Pour certaines applications, il est souhaitable de moduler la phase du signal de porteuse, pour obtenir une tension de la forme $v_p(t) = U_0 \cos[\omega_p t + m \cos(\omega_m t)]$. Une approche, imaginée par l'inventeur E. ARMSTRONG en 1933, permet très simplement d'obtenir un signal de ce type (pour les faibles modulations) en modifiant légèrement le montage de la figure 1. Dans toute la suite, le taux de modulation m vérifie $m \ll 1$.

B1. Montrer que le signal de porteuse modulé en phase peut s'écrire : $v_p(t) \cong U_0 \cos(\omega_p t) + f(t) \sin(\omega_p t)$, où $f(t)$ sera exprimée en fonction de m , U_0 , ω_m et t .

Pour obtenir la tension $v_p(t)$, un opérateur « Dp » est introduit dans le montage, comme indiqué sur la figure 2 :

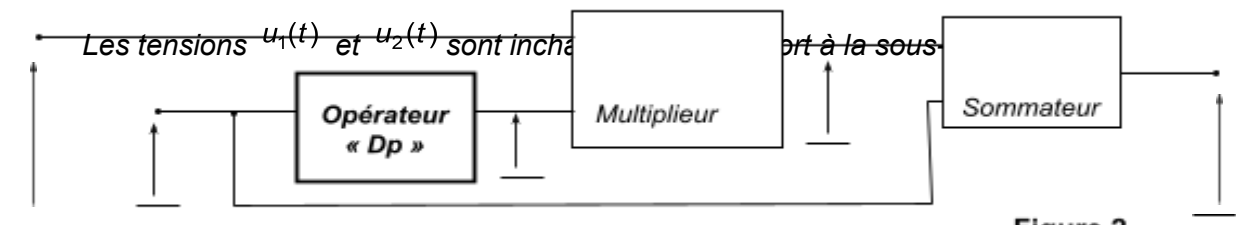


Figure 2

Toutes les expériences sont réalisées dans l'air, dont l'indice de réfraction est assimilé à celui du vide. Nous utilisons la convention usuelle relative à la représentation complexe d'un signal optique : le signal $s(M, t)$ associé au point M , à une onde optique de pulsation ω et d'amplitude complexe $\underline{a}(M)$ est obtenu par la relation $s(M, t) = \text{Re}[\underline{a}(M) \exp(j\omega t)]$.

D / INTERFERENCES A TROIS SOURCES PONCTUELLES

Considérons la situation idéalisée représentée sur la figure 4 : trois sources ponctuelles équidistantes A_0 , A_1 et A_{-1} sont alignées sur l'axe Ox , aux positions respectives $x = 0$, $x = b$ et $x = -b$. Ces sources sont parfaitement monochromatiques, de longueur d'onde dans le vide λ , et cohérentes entre elles.

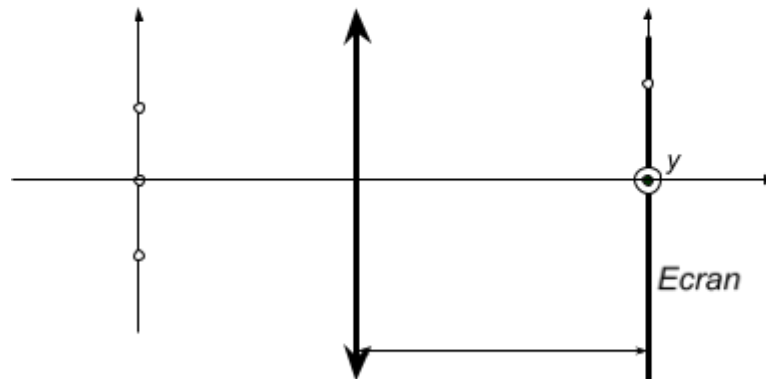


Figure 4

Les deux sources A_1 et A_{-1} oscillent en phase, mais sont en retard de phase de φ relativement à la source A_0 .

L'éclairement est observé au point M d'un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_1), d'axe optique confondu avec l'axe Oz , de distance focale image f' . Le point M est repéré par ses coordonnées dans le repère $F'xy$, F' étant le point focal image de (L_1). Il est admis que le point M est voisin du centre de l'écran ($|x| \ll f'$ et $|y| \ll f'$).

1 / Différences de marche et déphasages

D1*a Montrer que la différence de marche au point M , $\delta_{1/0} = (A_1M) - (A_0M)$, entre l'onde

issue de A_1 et celle issue de A_0 est :
$$\delta_{1/0} = -\frac{bx}{f'}$$

D1*b Exprimer la différence de marche $\delta_{-1/0}$ observée au point M entre l'onde issue de A_{-1} et celle issue de A_0 en fonction de b , x et f' .

D1*c Déterminer, en fonction de φ , x , f' , λ et b , le déphasage $\delta\varphi_{1/0}$ au point M entre l'onde issue de A_1 et celle issue de A_0 .

Ecrire de même le déphasage $\delta\varphi_{-1/0}$ au point M .

2 / Eclairement observé sur l'écran

Lorsqu'elle est seule, la source A_0 crée en M un éclairement E_0 . La source A_1 est beaucoup moins puissante que A_0 : seule, elle crée en M un éclairement $m^2 E_0$, où m est une constante vérifiant $m \ll 1$. La source A_{-1} est de même intensité que la source A_1 .

Soit $\underline{a}_0$ l'amplitude complexe au point M de l'onde issue de A_0 et $\underline{a}_1$ l'amplitude

complexe en M de l'onde issue de A_1 .

D2*a Quelle relation lie $|\underline{a}_1|$ et $|\underline{a}_0|$?

D2*b Justifier la relation suivante, entre les arguments de $\underline{a}_1$ et $\underline{a}_0$:

$$\arg(\underline{a}_1) = \arg(\underline{a}_0) - \varphi + \frac{2\pi bx}{\lambda f'}$$

Exprimer $\underline{a}_1$ en fonction de $\underline{a}_0$, x , b , f' , m , λ et φ .

D2*c En déduire, au point M, l'amplitude résultante $\underline{a}_{\text{tot}}$ due à la superposition des trois ondes, en fonction de $\underline{a}_0$, x , b , f' , m , λ et φ .

D2*d Montrer, au premier ordre en m , que l'éclairement E sur l'écran est de la forme :

$$E = E_0 \times \left[1 + \gamma \cos(\varphi) \cos\left(\frac{2\pi bx}{\lambda f'}\right) \right], \quad (1)$$

et exprimer γ en fonction de m .

D2*e Préciser la forme et l'orientation des franges brillantes. Déterminer leur position en distinguant les cas où $\cos(\varphi) > 0$ et $\cos(\varphi) < 0$.

D2*f Quel est, en fonction de γ et φ , le contraste Γ de la figure d'interférences ?

D2*g Pour quelles valeurs de φ , les interférences disparaissent-elles complètement ?

E / DIFFRACTION ET IMAGERIE

1 / Diffraction de Fraunhofer par une fente allongée

Le montage est celui de la figure 5 : une fente très allongée selon Y , de centre O et de largeur L , située dans le plan OXY , est éclairée en incidence normale par une onde monochromatique incidente, plane, de longueur d'onde dans le vide λ .

L'écran d'observation est situé dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_1) de distance focale f' . Un point M du plan d'observation est repéré par son abscisse x .

E1*a Rappeler l'énoncé du principe d'Huygens-Fresnel.

E1*b Reproduire la figure 5 sur votre copie (sans les cotations) et représenter le trajet suivi par deux ondes parvenant au point M : l'une passant par O et l'autre passant par un point P d'abscisse X_P de la fente.

E1*c Exprimer la différence, $(PM) - (OM)$, des chemins optiques suivis par ces deux ondes en fonction de x , X_P et f' (il est admis que $|x| \ll f'$).

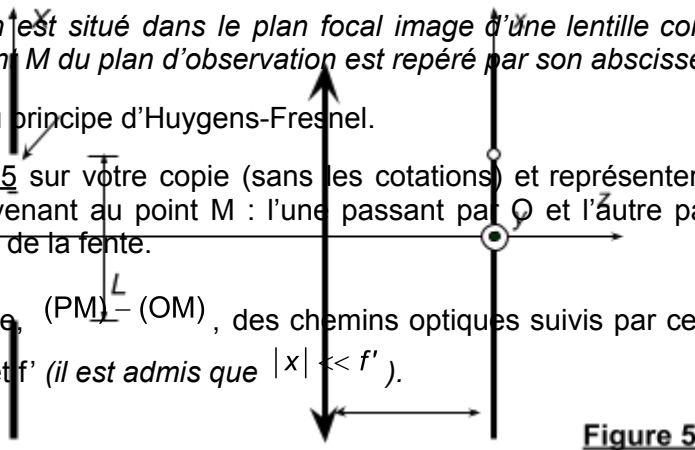


Figure 5

E1*d Expliquer qualitativement pourquoi la diffraction s'effectue seulement dans le plan OXz. Justifier que l'amplitude complexe $\underline{a}(M)$ de l'onde résultante diffractée en M par la fente est donnée par l'intégrale :

$$\underline{a}(M) = K \int_{-L/2}^{L/2} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x X_P}{f'} \right\} dX_P$$

, où K est une constante multiplicative.

E1*e Déterminer explicitement $\underline{a}(M)$ en fonction de K, L, λ , x et f'.

E1*f Exprimer l'éclairement $E(x)$ en fonction de K, L, λ , x, f' et de l'éclairement maximal $E_{\max}$. Représenter graphiquement la courbe $E(x)$ en faisant apparaître les points remarquables.

E1*g Que devient la figure de diffraction si $L \rightarrow \infty$?

E1*h Application numérique : L'onde plane incidente a une longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$, la fente est de largeur $L = 5 \text{ cm}$ et la lentille (L_1) a pour distance focale $f' = 1 \text{ m}$. Déterminer numériquement la largeur Δx (entre zéros adjacents) du pic central d'éclairement.

2 / Diffraction par une lame d'indice variable

Une lame parfaitement transparente, dite « lame objet », d'épaisseur d, est placée devant la fente précédente (voir figure 6). L'indice de cette lame varie d'un point à l'autre : il

dépend de l'abscisse X selon la loi périodique :

$$n(X) = n_0 + \varepsilon \cos \left(2\pi \frac{X}{\Lambda} \right)$$

, où Λ est la période des variations d'indice et ε une constante vérifiant $\varepsilon \ll 1$.

La lame objet ne provoque aucun changement d'intensité des ondes qui la traversent.

E2*a Déterminer, en fonction de x, X_P , d, ε , Λ et f', la différence, notée $\phi_{P/O}$, entre les chemins optiques menant de la source à M, et qui passent respectivement par les points P et O.

E2*b En déduire que l'amplitude complexe de l'onde résultante diffractée en M par le système lame-fente est donnée par l'intégrale :

$$\underline{a}(M) = K' \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{x X_P}{f'} - \varepsilon d \cos \left(2\pi \frac{X_P}{\Lambda} \right) \right] \right\} dX_P$$

, où K' est une constante.

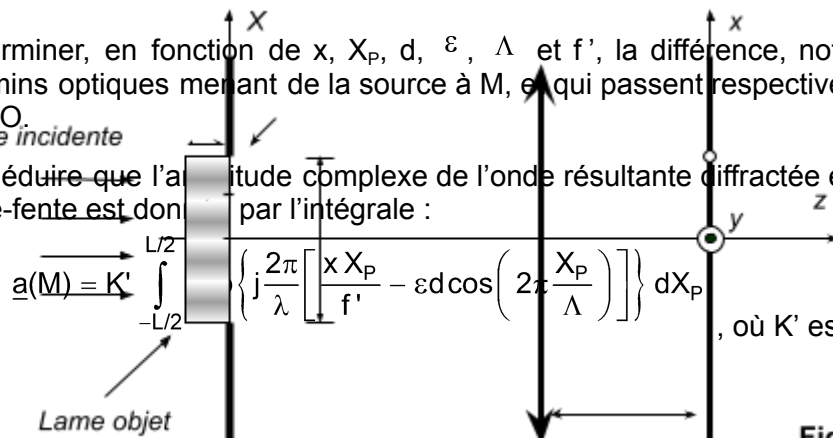


Figure 6

Dans la mesure où $\varepsilon \ll 1$, il est possible d'écrire, au premier ordre en ε :

$$\exp\left\{j\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{xX_P}{f'} - \varepsilon d \cos\left(2\pi\frac{X_P}{\Lambda}\right)\right]\right\} \cong \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xX_P}{f'}\right) \times \left[1 - j\frac{2\pi\varepsilon d}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi X_P}{\Lambda}\right)\right]$$

E2*c Montrer que l'amplitude complexe de l'onde diffractée est de la forme :

$$\underline{a}(M) = F(x) - j\frac{\pi\varepsilon d}{\lambda} F\left(x - \frac{\lambda}{\Lambda}f'\right) - j\frac{\pi\varepsilon d}{\lambda} F\left(x + \frac{\lambda}{\Lambda}f'\right),$$

où $F(x)$ est une fonction que l'on exprimera en fonction de K' , L , λ , x et f' .

E2*d En déduire qu'à la limite $L \rightarrow \infty$, l'amplitude de l'onde diffractée est nulle partout, sauf en trois points B_0 , B_1 et B_{-1} , dont les abscisses respectives sont notées 0, x_1 et x_{-1} .

Exprimer x_1 en fonction de λ , Λ et f' .

E2*e Application numérique : Les valeurs numériques sont celles de la question **E1*h**, et la période de modulation d'indice est $\Lambda = 0,1 \text{ mm}$.

Déterminer x_1 . Comparer à Δx et commenter.

E2*f Quel est le retard de phase ϕ des ondes observées en B_1 et B_{-1} par rapport à celle obtenue en B_0 ?

3 / Observation dans le plan conjugué de la fente

Le montage de la **figure 6**, est modifié comme indiqué en **figure 7**. Une lentille (L'_1), identique à (L_1), est intercalée entre l'écran et le plan focal de (L_1) ; l'écran est placé dans le plan focal de (L'_1). Le centre O de la fente coïncide avec le point focal objet de (L_1). Les points B_0 , B_1 et B_{-1} sont également indiqués sur la **figure 7**.

E3*a Préciser l'aspect de l'écran, en l'absence des phénomènes de diffraction.

E3*b Justifier que l'onde observée en un point M de l'écran peut être considérée comme la superposition des ondes issues de trois sources ponctuelles fictives situées aux points B_0 , B_1 et B_{-1} .

Soit $\underline{a}'_0$ l'amplitude complexe en O' (image de O par l'ensemble des deux lentilles L_1 et L'_1) associée à l'onde issue de B_0 .

E3*c Exprimer en O' les amplitudes complexes $\underline{a}'_1$ et $\underline{a}'_{-1}$ correspondant aux ondes issues respectivement de B_1 et B_{-1} , en fonction de $\underline{a}'_0$, ε , d et λ .

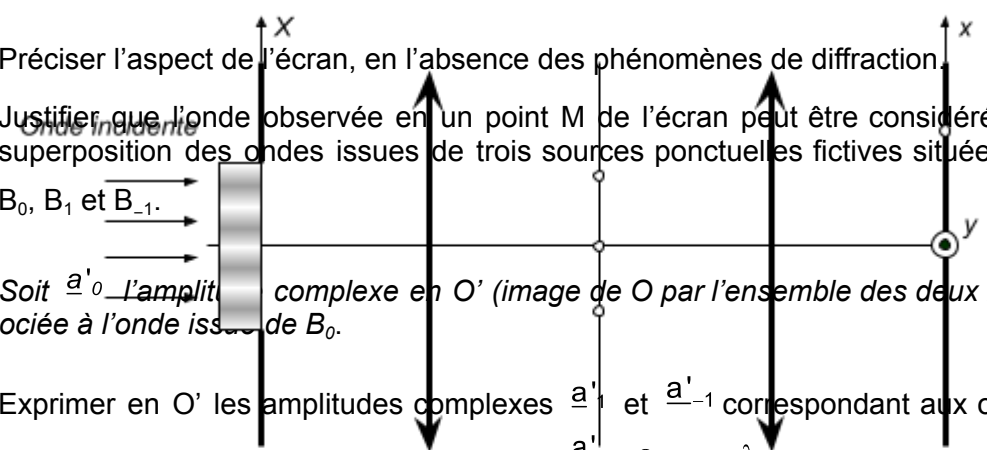


Figure 7

Pour calculer l'éclairement au point M , il est donc possible de transposer les résultats du D2*d en considérant que les sources fictives B_0 , B_1 et B_{-1} jouent le rôle des sources A_0 , A_1 et A_{-1} , avec les paramètres de phase et d'amplitude adéquats. Par exemple, le retard de phase ϕ de B_1 par rapport à B_0 joue le même rôle que le paramètre φ de la sous-partie D.

E3*d Préciser les expressions à donner aux grandeurs γ et b de la relation (1) du D2*d pour obtenir l'éclairement en M dans le montage de la figure 7.

E3*e Montrer que, au premier ordre en ε , l'éclairement sur l'écran est uniforme sur une bande de largeur L' , à exprimer en fonction de L . Commenter ce résultat.

Le montage de la figure 7 ne permet donc pas de visualiser les variations d'indice qui existent dans la lame : l'information associée à ces variations est irrémédiablement perdue ! La méthode du contraste de phase, introduite par le physicien néerlandais ZERNIKE en 1933 permet d'accéder à cette information.

4 / Contraste de phase

Juste avant le plan focal de (L_1) , est disposée une lame de verre (Dp) d'indice n_1 , à faces parallèles, possédant une surépaisseur e au niveau de B_0 (figure 8) ; les épaisseurs au niveau de B_1 et B_{-1} sont égales.

Les angles d'incidence étant très faibles, il est possible de négliger les déviations par réfraction dues à la lame (Dp) et de considérer qu'elle est traversée sous incidence normale.

E4*a Exprimer, en fonction de ϕ , n_1 , λ et e , le nouveau retard de phase ϕ' des ondes obtenues en B_1 et B_{-1} relativement à B_0 .

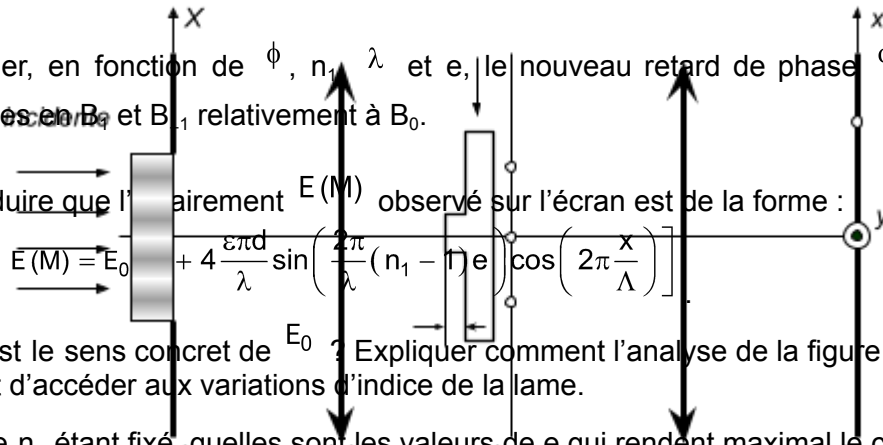
E4*b En déduire que l'éclairement $E(M)$ observé sur l'écran est de la forme :

$$E(M) = E_0 \left[1 + 4 \frac{\varepsilon \pi d}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - 1) e \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{\Lambda} \right) \right]$$

Quel est le sens concret de E_0 ? Expliquer comment l'analyse de la figure d'éclairement permet d'accéder aux variations d'indice de la lame.

E4*c L'indice n_1 étant fixé, quelles sont les valeurs de e qui rendent maximal le contraste de la figure ?

Application numérique : Calculer, avec un chiffre significatif, la plus petite valeur de e ayant cette propriété (adopter les valeurs numériques précédentes et prendre $n_1 = 1,5$).



- E4*d** Quelle est l'abscisse $X_{M'}$ du point M' de la fente dont l'image géométrique par l'ensemble du montage est le point M d'abscisse x ?
 Parmi les valeurs optimales de e , quelles sont celles pour lesquelles un maximum d'éclairement en M est associé à un maximum d'indice de la lame objet en $X_{M'}$?
 De même, quelles sont les valeurs de e pour lesquelles un maximum d'éclairement en M est associé à un minimum d'indice de la lame objet en $X_{M'}$?

TROISIEME PARTIE

APPLICATION AU SUIVI D'UNE EXPERIENCE DE DIFFUSION

La technique décrite dans la deuxième partie peut être utilisée pour étudier la diffusion de corps transparents dans l'eau. Etudions le cas de la diffusion du sucre (saccharose) et présentons un exemple d'analyse expérimentale.

F / ATTENUATION D'UNE INHOMOGENEITE PERIODIQUE PAR DIFFUSION

1 / Perturbation sinusoïdale de concentration

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté D_s ; il est supposé indépendant de la concentration.

Une solution sucrée possède, à l'instant $t = 0$, une concentration en sucre dépendant de l'abscisse x selon une loi de la forme :

$$c(x, t = 0) = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right), \text{ où } c_0, c_1$$

($c_1 \ll c_0$) et Λ sont des constantes. L'évolution ultérieure (pour $t > 0$) de la concentration

est cherchée sous la forme :

$$c(x, t) = c_0 + f(t) \cos\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right).$$

F1*a Rappeler sans démonstration l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x, t)$ (équation de la diffusion).

F1*b Déterminer, en fonction de D_s et Λ l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction $f(t)$. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Exprimer $f(t)$ en fonction de c_1 , t et d'un temps caractéristique τ_1 à écrire en fonction de D_s et Λ . Quel sens concret donnez-vous au paramètre τ_1 ?

F1*c Représenter graphiquement, pour $t > 0$ donné, l'évolution de la concentration $c(x, t)$ en fonction de x . Tracer également la distribution limite $c(x, t \rightarrow \infty)$.

2 / Visualisation par contraste de phase et analyse expérimentale

L'indice de réfraction de l'eau sucrée varie, aux faibles concentrations, selon une loi quasi linéaire : $n = n_e + \beta c$, avec $n_e = 1,33$ et $\beta = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Une cuve à faces parallèles, d'épaisseur d , est remplie d'une solution dont la concentration en sucre, à l'instant $t = 0$, varie de façon périodique avec une période spatiale Λ . Après une phase initiale, la concentration de sucre peut être décrite par la loi suivante :

$$c(x, t) = c_0 + c_1 \exp(-t / \tau_1) \cos\left(2\pi \frac{x}{\Lambda}\right).$$

Cette cuve est utilisée comme « lame objet » dans le montage décrit en deuxième partie (E4). La source lumineuse et la géométrie du dispositif sont inchangées ; la lame (Dp) est ajustée de telle façon qu'un maximum d'indice correspond à un maximum d'éclairement.

F2*a Montrer que l'éclairement E observé sur l'écran à l'instant t peut s'écrire :

$$E = E_0 \left[1 + (\xi c_1 d) \exp(-t/\tau_1) \cos\left(2\pi \frac{x}{\Lambda}\right) \right] \text{ et exprimer } \xi \text{ en fonction de } \beta \text{ et } \lambda .$$

Dans la suite, sera adoptée pour ξ la valeur numérique $\xi = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$. En pratique, les franges sont visibles si leur contraste est supérieur à une valeur $\Gamma_{\min} = 0,010$.

F2*b Pour une cuve d'épaisseur d donnée, exprimer la plus petite variation de concentration $c_{\min}$ décelable initialement, en fonction de $\Gamma_{\min}$, ξ et d .

Calculer numériquement $c_{\min}$ en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ pour $d = 1,0 \text{ mm}$.

La figure 9 ci-après représente le contraste normalisé, $\Gamma(t)/\Gamma(0)$, en fonction du temps (en secondes), obtenu pour une répartition initiale de période spatiale $\Lambda = 1 \text{ mm}$.

F2*c Expliquer pourquoi les premiers points ne sont pas alignés avec les autres.

F2*d Dédurre de ces résultats la valeur numérique du coefficient de diffusion D_s du sucre dans l'eau (avec un chiffre significatif).

Donnée : $\ln(10) = 2,3$.

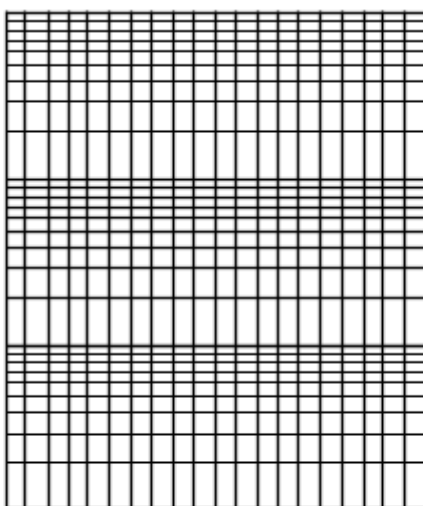


Figure 9

FIN DU PROBLEME