

Тема: Точки екстремуму функції. Розв'язування вправ

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-sta-ndartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Точки екстремуму функції

Ознайомлюючись із поняттям диференційовності функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, у її околі.

Означення. Проміжок $(a; b)$, який містить точку x_0 , називають **околом** точки x_0 .

Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 1 зображено графіки двох функцій. Ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

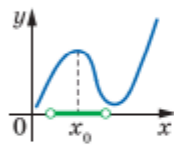


Рис. 1

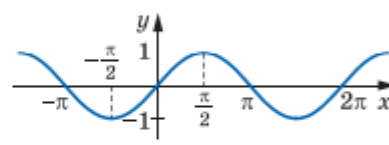
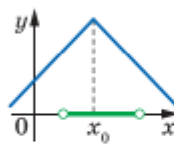


Рис. 2

Означення. Точку x_0 називають **точкою максимуму** функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$

(рис. 2). Записують: $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

На рисунку 1 $x_{\max} = x_0$.

Означення. Точку x_0 називають **точкою мінімуму** функції f , якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 2). Записують: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.



Рис. 3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму** функції (від латинського *extremum* — край, кінець).

На рисунку 4 точки $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ є точками екстремуму.

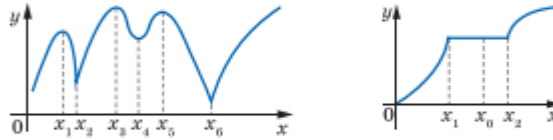


Рис. 4

Рис. 5

На рисунку 5 зображено графік функції f , яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою. Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка проміжку $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f .



Рис. 6

Наявність екстремуму функції в точці x_0 пов'язана з поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зобра-

жено на рисунку 6, а, маємо: на рисунку 6, а функція зростає на проміжку $(a; x_0]$ і спадає на проміжку $[x_0; b)$; на рисунку 6, б функція спадає на проміжку $(a; x_0]$ і зростає на проміжку $[x_0; b)$.

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму диференційовної функції.

Теорема 1 (ознака точки максимуму функції). Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку. Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f (рис. 6, а).

Теорема 2 (ознака точки мінімуму функції). Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку. Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leq 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geq 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f (рис. 6, б).

Іноді зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму.

Отже, для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

- 1) Знайти $f'(x)$.
- 2) Дослідити знак похідної.
- 3) Користуючись відповідними теоремами, знайти точки екстремуму.

Задача. Знайдіть точки екстремуму функції:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$$

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2).$$

Дослідимо знак похідної в околах точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 7).

Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.



Рис. 7



Рис. 8

$$\begin{aligned} 2) \text{ Маємо: } f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи нерівність $x^2 - 2x - 3 > 0$ і враховуючи, що $(x - 1)^2 > 0$ при $x \neq 1$, отримуємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$. Міркуючи аналогічно, можна встановити, що $f'(x) < 0$ на проміжках $(-1; 1)$ і $(1; 3)$. Рисунок 8 ілюструє отримані результати.

Тепер можна зробити такі висновки: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$. ◀

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §3, п. 23.
2. Законспектувати теореми, означення.
3. Розглянути приклади розв'язаних вправ.
4. Виконати письмово вправи: 23.1, 23.3, 23.5.
5. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://www.youtube.com/watch?v=ArWs0aJ3rvk>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .