

Тема: Скалярний добуток векторів.
Розв'язування задач. Самостійна робота

Посилання

на

підручник:

<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-standardu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових і неспівнаправлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$, що дорівнюють відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1). Величину кута AOB називатимемо кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, що коли $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ (рис. 2).

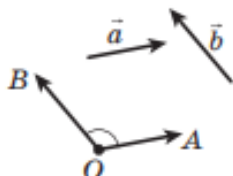


Рис. 1

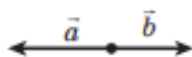


Рис. 2

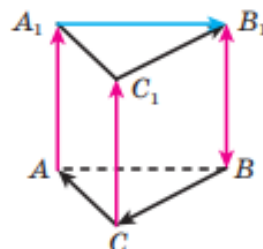


Рис. 3

Якщо $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90° . Записують: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунку 3 зображено трикутну призму, основою якої є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

Маємо: $\angle(\vec{CA}, \vec{C_1B_1}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{BC}, \vec{A_1B_1}) = 120^\circ$, $\angle(\vec{AA_1}, \vec{BB_1}) = 0^\circ$,
 $\angle(\vec{AA_1}, \vec{BC}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{CC_1}, \vec{B_1B}) = 180^\circ$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 1. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 42.3, маємо: $\vec{AA_1} \cdot \vec{BC} = 0$, $\vec{B_1A_1} \cdot \vec{C_1C} = 0$.

Теорема 2. Скалярний добуток векторів $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Теорема 3. Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k є справедливими рівності:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}; \\ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= k(\vec{a} \cdot \vec{b}); \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, за правилами перетворення алгебраїчних виразів. Наприклад,

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned}$$

Задача. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Бічне ребро AA_1 утворює рівні кути з ребрами AB і AC (рис. 4). Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

Розв'язання. Нехай $\angle BAA_1 = \alpha$. З урахуванням умови можна записати: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{AA_1}$ і $\vec{BC}$.

Маємо: $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$.

Запишемо:

$$\begin{aligned} \vec{AA_1} \cdot \vec{BC} &= \vec{AA_1} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AA_1} \cdot \vec{AC} - \vec{AA_1} \cdot \vec{AB} = \\ &= |\vec{AA_1}| \cdot |\vec{AC}| \cos \alpha - |\vec{AA_1}| \cdot |\vec{AB}| \cos \alpha. \end{aligned}$$

Оскільки $|\vec{AC}| = |\vec{AB}|$, то розглядуваний скалярний добуток дорівнює 0. Отже, $\vec{AA_1} \perp \vec{BC}$. ◀

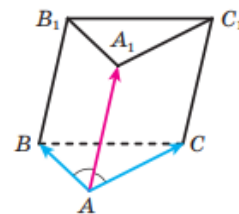


Рис. 4

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал: п. 42.
2. Законспектувати означення, теореми.
3. Виконати письмово вправи: 42.1-42.3, 42.5, 42.7, 42.9.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:
<https://vseosvita.ua/library/10-klas-skalarnij-dobutok-vektoriv-241866.html>
5. Виконати самостійну роботу (завдання на наступній сторінці).

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .

Самостійна робота
«Координати і вектори в просторі»

1. Яка з наведених точок належить площині Oxy ?

А	Б	В	Г	Д
A (-1; 2; 3)	B (0; 2; 3)	C (-1; 0; 3)	D (-1; 2; 0)	E (0; 0; 3)

2. Яка з точок симетрична точці A (-5; 3; -2) відносно початку координат?

А	Б	В	Г	Д
(5; -3; 2)	(5; 3; -2)	(-5; -3; 2)	(-5; 3; 2)	(-5; -3; -2)

3. В яку точку при паралельному переносі на вектор $\vec{a}(2; -3; 4)$ перейде точка A (3; 4; -5)?

А	Б	В	Г	Д
(5; 1; -1)	(-1; -7; 9)	(6; -12; -20)	$(\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5})$	(1; 7; -9)

4. Яка з наведених точок належить координатній осі z ?

А	Б	В	Г	Д
(3; 2; 4)	(3; 0; 0)	(0; 2; 0)	(0; 0; 4)	(3; 2; 0)

5. Установіть відповідність між векторами (1 – 4) і співвідношеннями між ними (А – Д)

1	$\vec{a}(2; 3; -8)$ і $\vec{b}(-4; -5; 1)$	А	однаково напрямлені
2	$\vec{a}(2; -4; 6)$ і $\vec{b}(3; -7; 5)$	Б	сума векторів дорівнює вектору $\vec{c}(1; -2; 10)$
3	$\vec{a}(-5; 2; 7)$ і $\vec{b}(6; -4; 3)$	В	протилежно напрямлені
4	$\vec{a}(1; 2; 3)$ і $\vec{b}(-1; 0; 1)$	Г	вектори рівні
		Д	$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(3; 4; 5)$

6. При яких значеннях y і z вектори $\vec{a}(2; -3; 8)$ і $\vec{b}(-7; y; z)$ колінеарні?

7. При яких значеннях a вектори $\vec{c}(2; -3; 8)$ і $\vec{d}(-7; -2; a)$ перпендикулярні?

8. Дано ABCD – паралелограм, A (-4; 1; 5), B (-5; 4; 2), C (3; -2; -1).
Знайдіть координати вершини D.

9. Знайдіть на осі u точку, рівновіддалену від точок A (-3; 7; 4) і B (2; -5; -1).

10. Знайдіть кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо A (1; 0; 2), B (1; $\sqrt{3}$; 3), C (-1; 0; 3), D (-1; -1; 3).