УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя оргкомитета
III (областного) этапа республиканской
олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилёвского облисполкома
_____________ С. В. Леонова
8 ноября 2010 года

Задания для II этапа республиканской олимпиады по математике

20 ноября 2010 года

9 класс

1. Даны n $(n \in N)$ произвольных действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Доказать, что выполняется неравенство:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1 - x_2 - ... - x_n \geq -\frac{n}{4}.$$

2. Найти все натуральные числа, меньшие 2010, которые делятся нацело на 37 и сумма цифр которых равна 21.

3. Найти все пары простых чисел p и q, при которых верно равенство

$$p^q + q^p = \frac{2010}{p^2 + q^2 + 1} - pq.$$

4. Среди учащихся, поступивших в лицей, некоторые были ранее знакомы между собой, некоторые – нет. Доказать, что 1 сентября в любом вновь сформированном классе найдутся хотя бы двое учащихся, имеющих одинаковое число ранее знакомых одноклассников.

5. В треугольник ABC с углом A, равным 60º, вписана окружность радиуса ***r***, которая касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. В треугольник AMN также вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

Пользоваться калькулятором не разрешается
Время работы: 4,5 часа

Указания к решению

9 класс

1. *Решение.*

Выполним равносильные преобразования:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1 - x_2 - ... - x_n + \frac{n}{4} \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1 - x_2 - ... - x_n + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4}}_{n\ слагаемых} \geq 0$$

$$x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4} + x_2^2 - x_2 + \frac{1}{4} .... + x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$x_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{1}{4} + x_2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_2 + \frac{1}{4} .... + x_n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_n + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Последнее неравенство верно, поскольку квадрат любого числа есть величина неотрицательная.

2. *Решение*.

Представим искомое число *n* в виде *n* = 37*к*, где *к* – натуральное число. По условию имеем: $37k < 2010$, откуда $k \leq 54$. Далее, воспользуемся известным утверждением: *натуральное число и сумма его цифр дают одинаковые остатки при делении на 9.* Число 21 при делении на 9 дает остаток 3, значит и число *n* = 37*к* при делении на 9 дает остаток 3. Так как, число 37 при делении на 9 дает остаток 1, а число 37*к* – остаток 3, то число *к* при делении на 9 дает остаток 3. Учитывая, что $k \leq 54$, *k* может принимать значения: 3, 12, 21, 30, 39, 48.

Рассмотрим все эти значения *k*:

к	***n* = 37*к***	**Сумма цифр**
3	111	3
12	444	12
21	777	**21**
30	1110	3
39	1443	12
48	1776	**21**

Видно, что только числа 777 и 1776 имеют сумму цифр 21.

Ответ: **777, 1776**.

3. *Решение.*

Перепишем исходное равенство в виде $\left(p^q + q^p + pq\right)\left(p^2 + q^2 + 1\right) = 2010$ (*). Несложно заметить, что если *p* и *q* оба нечетные, то оба множителя в левой части (*) – нечетные, что невозможно. Значит, среди чисел *p* и *q* есть хотя бы одно четное. Пусть четное *p*. Так как *p* по условию простое, то *p* = 2. Тогда равенство (*) примет вид: $\left(2^q + q^2 + 2q\right)\left(q^2 + 5\right) = 2010$ (**).

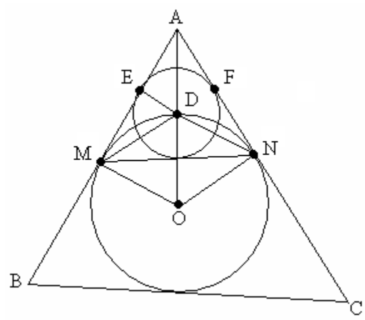
Поскольку $2^{11} = 2048 > 2010$, то $q<11$. Значит, q следует искать среди чисел 2, 3, 5, 7. Легко установить, что из данных чисел равенству (**) удовлетворяет только $q = 5$. Аналогично, приняв $q = 2$, получим $p = 5$.

***Ответ*: (2; 5), (5; 2)**

4. *Решение*.

Пусть во вновь сформированном классе оказалось n учеников. Тогда каждый ученик мог быть ранее знаком с 0, 1, 2, …или $n-1$ одноклассниками. Разделим учеников класса на n групп. В первую группу войдут те, у кого нет ранее знакомых одноклассников (т.е. имеющих 0 знакомых). Во вторую – имеющие по одному ранее знакомому, в третью – по два, …, в n-ю – те, был ранее уже знаком со всеми (т.е. имел $n-1$ знакомых). Очевидно, что среди первой и n-й групп хотя бы одна будет пустой, т.к. не могут одновременно быть ученики, не имеющие знакомых, и ученики, знакомые со всеми. Тогда все n учеников класса заполнят не более $n-1$ групп и в одной из групп найдется не менее двух учеников. Эти ученики и будут иметь одинаковое количество знакомых. Что и требовалось доказать.

5. *Решение.*



Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть D – точка пересечения AO с этой окружностью. Докажем, что точка D – центр окружности, вписанной в треугольник AMN. Для этого докажем, что D – точка пересечения биссектрис треугольника AMN. Очевидно, что AD – биссектриса $\angle$A. Докажем, что MD биссектриса $\angle$AMN.

Треугольники AMD и AND равны по двум сторонам и углу между ними (AM = AN, AD – общая, AD – биссектриса угла A). Тогда $\angle AMD = \angle AND$. Но $\angle AND = \angle DMN$ (по свойству угла между касательной и хордой). Тогда $\angle AMD = \angle DMN$, т.е. MD – биссектриса $\angle$AMN. Таким образом, D –центр окружности, вписанной в треугольник AMN.

Пусть окружность, вписанная в треугольник AMN касается сторон AM и AN в точках E и F соответственно.

Пусть r_1= ED – радиус окружности, вписанной в треугольник AMN.

Так как $\angle MAO = 30^\circ$, то $AD = 2ED = 2r_1$. $AO = 2MO = 2r$.

$AO = AD + DO$, т. е. $2r = 2r_1 + r$. Откуда $r = 2r_1$, $r_1 = \dfrac{r}{2}$.

***Ответ*:** $\dfrac{r}{2}$.