Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 72 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 05.02.2026**
Тип занятия: лекция 42 **Преподаватель: Бережная В.А.**
Тема занятия: Тригонометрические уравнения

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для сознательного усвоения учащимися методов решения тригонометрических уравнений.
Содержательная:
– актуализировать знания об уравнениях; тригонометрических функциях, обратных тригонометрических функциях;
– расширить знания учеников за счет введения нового объекта – тригонометрического уравнения;
– познакомиться с задачами на решение простейших тригонометрических уравнений, тригонометрических уравнений, сводимых к квадратному уравнению; тригонометрических неравенств.
План занятия:
1. Простейшие тригонометрические уравнения обобщенного вида
2. Тригонометрические уравнения сводящиеся к квадратным.
3. Тригонометрические уравнения решаемые разложением на множители.
4. Тригонометрические однородные уравнения.

Ход занятия

1. Простейшие тригонометрические уравнения обобщенного вида

Тригонометрические уравнения – такие уравнения, в которых неизвестная заключена строго под знаком тригонометрической функции.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются такие уравнения, которые записаны в виде:

$$\cos f(x) = a,\ \sin f(x) = a,\ tg\, f(x) = a,\ ctg\, f(x) = a.$$

Здесь a представляет собой некое постоянное число.

Заметим, что f(x) является какой-то функцией, которая определяется искомой переменной x.

В том случае, когда уравнения записаны в виде: $\cos f(x) = a$, $\sin f(x) = a$, они обладают смыслом при $-1 \le a \le 1$.

Если уравнения имеют вид: $tg\, x = a$, $ctg\, x = a$, то такие уравнения справедливы при любых значениях, которые принимает a.

1. $\cos f(x) = a$: если $a \in (-1;1)$, то множеством решений уравнения является

$$f(x) = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

2. $\sin f(x) = a$: если $a \in (-1;1)$, то множеством решений уравнения является

$$f(x) = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$

3. $tg\, f(x) = a$: $f(x) = arctg\, a + \pi n,\ n \in Z$;

4. $ctg\, f(x) = a$: $f(x) = arcctg\, a + \pi n,\ n \in Z$;

Задачи

1. Решите уравнение:

а) $\cos 2x = 1$; б) $\cos 3x = -1$;

в) $\sin \frac{x}{2} = -1$; г) $\sin \frac{2x}{3} = 1$;

д) $\cos \frac{x}{4} = 0$; е) $\sin 5x = 0$.

а) πn; б) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$; в) $-\pi+4\pi n$; г) $\frac{3\pi}{4}+3\pi n$; д) $2\pi+4\pi n$; е) $\frac{\pi n}{5}$

2. Решите уравнение:

а) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; б) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

в) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$; г) $\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$;

д) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$; е) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=0$.

а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; в) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; д) $-\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{2}$; е) $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$

3. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; б) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$;

в) $\operatorname{tg}2x=-1$; г) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-1$;

д) $\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=0$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{9}\right)=0$.

а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; б) πn; в) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; г) $-\pi+2\pi n$; д) $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$; е) $\frac{11\pi}{6}+3\pi n$

2. Тригонометрические уравнения сводящиеся к квадратным.

Квадратные тригонометрические уравнения являются такими уравнениями, которые имеют вид:

$$af^2(x)+bf(x)+c=0$$

Здесь *a* отлично от нуля.

Последовательность действий при решении тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратным:

- выражение одной тригонометрической функции с помощью другой путем применения основных тождеств;
- выполнение подстановки;
- преобразование уравнения;
- введение обозначения, к примеру, sin x = y;
- решение квадратного уравнения;
- обратная замена;
- решение тригонометрического уравнения.

Задачи

Пример 1. Рассмотрим решение тригонометрического уравнения:

$$6\cos^2x-13\sin x-13=0$$

Воспользуемся формулой: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

В результате уравнение преобразуется таким образом: $6\sin^2x+13\sin x+7=0$

Заменим sinx на t. Зная, что ОДЗ синуса $\sin x\in[-1;1]$, запишем, $t\in[-1;1]$.

Тогда: $6t^2+13t+7=0$

Вычислим корни:

$t_1=-\frac{7}{6}$

$t_2=-1$

Заметим, что t_1 не соответствует условиям. Выполним обратную замену и получим решение уравнения: $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Разберем другой пример:

$$5\sin 2x = \cos 4x - 3$$

Воспользуемся уравнением двойного угла для косинуса: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Получим, что: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

Подставим значения и преобразуем уравнение: $2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0$

Заменим sin2x на t. Зная, что ОДЗ для синуса $\sin 2x \in [-1;1]$, можно записать: $t \in [-1;1]$

В результате: $2t^2 + 5t + 2 = 0$

Определим корни:

$t_1 = -2$

$t_2 = -\frac{1}{2}$

Заметим, что t_1 является посторонним, так как не соответствует условию. Путем обратной замены получим:

$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n,\ x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. Решить тригонометрическое уравнение на интервале (–π;π):

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0$$

Решение

Заменим sinx на t. В результате уравнение преобразуется: $2t^2 + \sqrt{2}t - 2 = 0$

Определим дискриминант уравнения: $D = 18 = (3\sqrt{2})^2$

Таким образом, корни равны:

$t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$t_2 = -\sqrt{2}$

Исходя из того, что $t = \sin x \in [-1;1]$, можно сделать вывод о лишнем корне t_2.

В результате:

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ n,m \in \mathbb{Z}$.

Выполним проверку корней на соответствие условиям задания:

$-\pi < \frac{\pi}{4} + 2\pi n < \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < n < \frac{3}{8} \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$-\pi < \frac{3\pi}{4} + 2\pi m < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{8} < m < \frac{1}{8} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

Ответ: корни уравнения $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi m;\ n,m \in \mathbb{Z}$, из них соответствуют интервалу $\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$.

3. Тригонометрические уравнения решаемые разложением на множители.

Предположим, что в правой части уравнения стоит нуль, а левую часть удаётся разложить на множители. Тогда решение уравнения упрощается: если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, и мы последовательно рассматриваем случаи равенства нулю каждого из множителей.

Задачи

Задача 1. Решить уравнение: $2\cos^2 x + \cos x = 0$.

Решение. Выносим cos x за скобки: $\cos x(2\cos x + 1) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю — значит, хотя бы один из них равен нулю.

Первый случай $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Второй случай: $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. $\sin 2x = 3\sin x$.

Решение. Перепишем это уравнение, воспользовавшись формулой синуса двойного угла:

$$2\sin x\cos x = 3\sin x.$$

Очень распространённая ошибка в таких ситуациях: «сократим на sinx». Поступив так, мы потеряем часть решений – а именно, те значения x, для которых $\sin x=0$. Мы будем действовать правильно: перенесём всё в одну часть и вынесем общий множитель за скобки:

$$2\sin x\cos x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 3) = 0.$$

Первый случай: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n\ (n \in Z)$.

Второй случай: $2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 3/2$

Здесь решений нет: ведь $3/2 > 1$, а косинус не может принимать значений, больших единицы.

Ответ: $\pi n,\ n \in Z$.

4. Тригонометрические однородные уравнения.

Однородное тригонометрическое уравнение второй степени – это уравнение вида

$$a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cdot\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$$

с некоторыми коэффициентами a, b, c. Однородным это уравнение называется потому, что в каждом слагаемом левой части сумма степеней синуса и косинуса одинакова и равна 2.

Чтобы решить уравнение, нужно разделить обе его части на $\cos^2 x$ (с соответствующей оговоркой). Тогда придём к квадратному уравнению относительно тангенса. Давайте рассмотрим конкретные примеры.

Задачи

Пример 1. Решить уравнение: $\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Решение. Взять и молча разделить на $\cos^2 x$ нельзя – ведь косинус может обращаться в нуль.

Поэтому прежде чем делить на $\cos^2 x$, нужно сделать следующую оговорку.

Если $\cos x = 0$, то в силу уравнения имеем также $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$, согласно которому синус и косинус не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, для любого решения данного уравнения выполнено неравенство $\cos x \neq 0$, и потому обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$.

Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, приходим к квадратному уравнению относительно тангенса:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z});$$
$$\operatorname{tg} x = 4 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg} 4 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. Решить уравнение: $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x = 4$.

Решение. Припишем к числу 4 в правой части единичный множитель $\sin^2 x + \cos^2 x$. От этого, понятно, ничего не изменится:

$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 11 \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

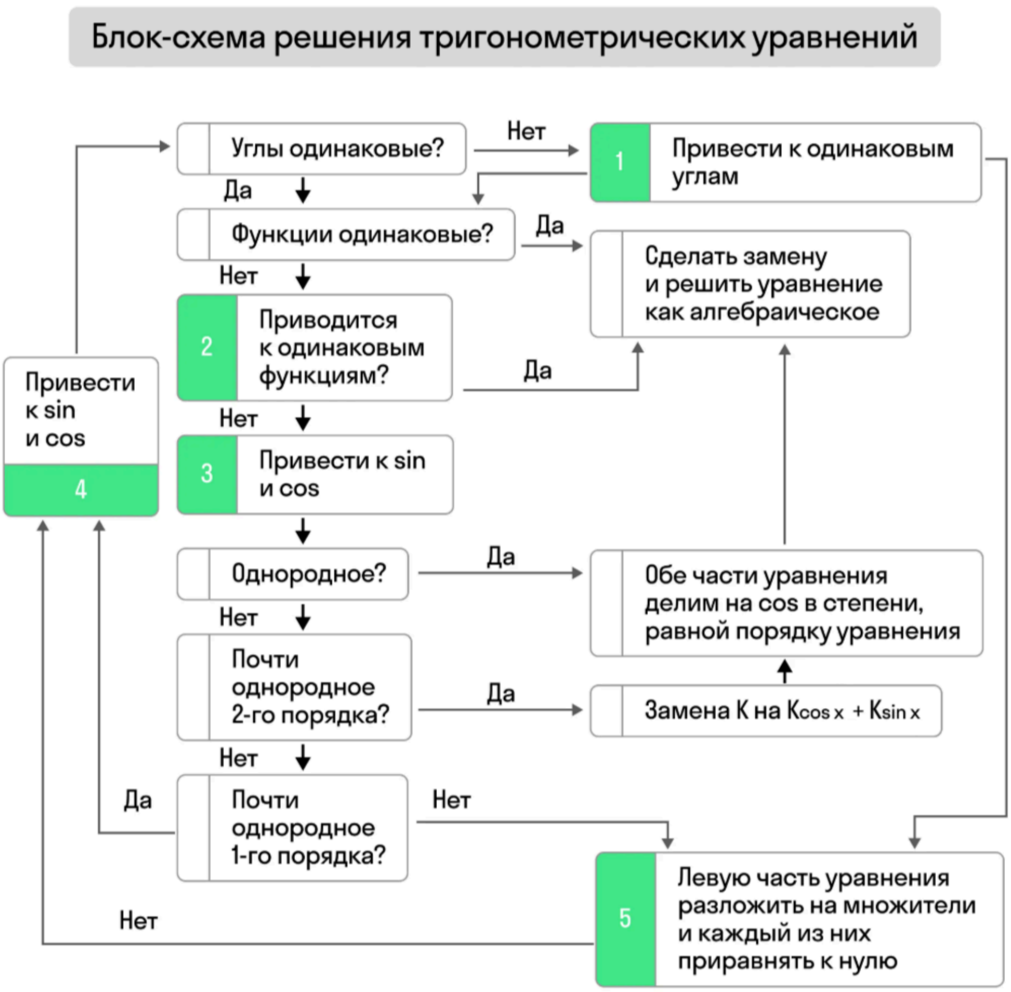
Раскрываем скобки и приводим подобные: $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$.

Делаем, как и выше, оговорку и делим на $\cos^2 x$:

$3 \operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 7 = 0$.

Остаётся решить это уравнение: $\operatorname{tg} x = 1,\ \operatorname{tg} x = -\frac{7}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg} \frac{7}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Опишите пошаговый алгоритм решения тригонометрического уравнения, сводимого к квадратному.

1.2. Что такое однородное тригонометрическое уравнение второй степени? Запишите его общий вид.

1.3. Что означает решить тригонометрическое уравнение? Почему для этого удобно использовать единичную окружность?

2. Решите предложенные задания по вариантам (письменно):

Вариант I	Вариант II
1. Решите уравнение: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$	1. Решите уравнение: $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$
2. Решите уравнение: $2\sin^2 x - \sin x = 0$	2. Решите уравнение: $\cos^2 x - \cos x = 0$
3. Решите неравенство: $\cos(x) = ½$	3. Решите неравенство: $\sin(x) = ½$

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 12 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 05.02.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 05.02.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.