Il problema chiedeva di massimizzare il minimo tra i tre rapporti di scalenità di un triangolo.
La risposta è $(\sqrt{5} - 2)/2$ che si ha quando il triangolo ha un "equo sbilanciamento" tra i lati.
Questa configurazione si ottiene quando i lati del triangolo sono nel rapporto di: 1, ϕ, ϕ^2.
La mia analisi risponde a: qual è il valore massimo che uno dei tre rapporti può assumere?
La mia risposta è 1/2 quando lo "sbilanciamento" di uno dei tre lati dagli altri due è estremo.
Condivido il mio contributo che avevo inviato ai Nostri, anche se non è del tutto corretto:
https://docs.google.com/document/d/1788oAsSbVbjA-akMPIAS7BM5gRsXmv4x/edit?usp=sharing&ouid=117564311960738395185&rtpof=true&sd=true

Condivido alcune considerazioni sulle due interpretazioni del problema della scalenità.

Interpretazione corretta.
Il triangolo degenere di lati 1, ϕ, ϕ^2 è un caso limite in cui i tre vertici sono allineati.
Ha due angoli di 0° e un angolo di 180° che è l'angolo opposto al lato che ha lunghezza ϕ^2.
Non si può tracciare la bisettrice di un angolo nullo per capire dove incontra il lato opposto.
La soluzione al problema si calcola, quindi, utilizzando il concetto matematico di limite:
- si considerano triangoli non degeneri i cui lati si approssimano sempre più a 1, ϕ, ϕ^2
- per ognuno di tali triangoli viene calcolata la loro specifica misura di scalenità
- man mano che il triangolo "tende" a degenere la scalenità si approssima a un valore
- questo valore è il limite della misura di scalenità non di uno specifico triangolo
- il valore si ottiene analizzando il comportamento della funzione che lo calcola.

Il triangolo 1, ϕ, ϕ^2 è l'unico non isoscele, degenere o meno, per cui si ha che:
- su due dei suoi lati il rapporto che ne determina la scalenità è identico
- tali lati sono: 1 e ϕ^2, e il motivo è una specifica proprietà del numero ϕ.

Mostro i calcoli:
- dato uno dei tre lati il rapporto richiesto si può esprimere in termini degli altri due
- detti a,b,c i lati il rapporto in questione si ottiene con la formula: $(|x-y|)/[2(x+y)]$ (scelto un lato su cui calcolarlo, "x" e "y" sono le lunghezze degli altri due lati)
- la mia formula, anche se pare diversa, è identica a quella proposta in rivista dai Nostri
- per lato 1: $(\phi^2-\phi)/[2(\phi^2+\phi)]$, dato che $\phi^2=\phi+1$ e $\phi=(1+\sqrt{5})/2$, si semplifica: $(\sqrt{5}-2)/2\approx 0.118$
- per lato ϕ^2: $(1-\phi)/[2(1+\phi)]$, da cui, con qualche passaggio, si semplifica con: $1/(2\phi^3)$
- $\phi^3 = \phi^2\cdot\phi = (\phi+1)\phi = \phi^2+\phi = (\phi+1)+\phi= 2\phi+1$, sostituendo $2\phi+1$ a $\phi3$ in $1/(2\phi^3)$: $1/[2(2\phi+1)]$ (sapendo che $\phi=(1+\sqrt{5})/2$, $1/[2(2\phi+1)]$ semplificando coincide con lati 1: $(\sqrt{5}-2)/2\approx 0.118$
- per lato ϕ: $(1-\phi^2)/[2(1+\phi^2)]$, con un po' di passaggi si giunge a $\phi/[2(2+\phi)] \approx 0.2236\ldots$.

Ho disegnato il triangolo degenere $1,\phi,\phi^2$ con GeoGebra facendogli calcolare i tre rapporti (selezionando il punto C e con Shift + Freccia su/giù si varia di poco i rapporti):
https://drive.google.com/file/d/1VLAXr1eORT2iOHD5WM4DAZ6HOCi6TUZn/view?usp=sharing
Il file ha estensione ".ggb" e per usarlo deve essere aperto nell'applicazione GeoGebra.

Mia interpretazione:
L'obiettivo è determinare il valore massimo che può assumere la scalenità di un triangolo.
Come mostrato nella risposta su "le Scienze", la scalenità è data dal rapporto $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/[2(\mathbf{x}+\mathbf{y})]$
(**x** e **y** sono i lati adiacenti all'angolo opposto al lato su cui la scalenità viene calcolata).
La massima scalenità si ha con un estremo "sbilanciamento" tra le lunghezze dei due lati **x** e **y**.
Il limite di 1/2 si ha quando uno dei due lati è infinitesimamente piccolo rispetto all'altro. Questo accade in un triangolo degenere i cui tre vertici, e quindi i tre lati, sono allineati
(il triangolo che si ottiene tende, al limite, a essere isoscele con un lato infinitesimale).
Un modo semplice per costruire tale triangolo, e verificarne la scalenità, è il seguente:
- si costruisce un triangolo isoscele di lati **1, 1,** $\boldsymbol{\epsilon}$; quindi si fa tendere il lato ϵ a zero
- il rapporto per la scalenità sul lato più corto $\boldsymbol{\epsilon}$ vale sempre: $|1-1|/[2(1+1)] = 0/4 = 0$
- sui restanti due lati, che hanno lunghezza 1, la scalenità si ottiene da: $|1-\epsilon|/[2(1+\epsilon)]$
- Quando $\epsilon\to 0$, il numeratore tende a 1, il denominatore tende a 2 e il rapporto tende a 1/2.

Tento di riassumere.

La soluzione al problema originale (massimizzare il minimo rapporto) chiede di trovare un triangolo con il più equo “bilanciamento” possibile tra le lunghezze dei suoi tre lati.
Il triangolo di lati **1**, **ϕ**, **ϕ^2** è la configurazione che ha la massima "armonia" possibile, rendendo il rapporto di “scalenità minimo” il più grande ottenibile, cioè: (√5 - 2)/2.

La soluzione alla mia interpretazione (massimizzare il massimo rapporto) richiede, invece, di trovare un triangolo con il più estremo “sbilanciamento” possibile di uno dei suoi tre lati.
Questa configurazione si ha con un triangolo degenere "schiacciato" dove un lato è quasi nullo.
In questo scenario il rapporto di “scalenità massimo” raggiunge il suo valore limite di 1/2.
Ho realizzato in GeoGebra un’animazioni che mostra come il rapporto al limite approssima 1/2:
https://drive.google.com/file/d/1GngXIGcg-vQwCdJfj1wznPk5HX3nuy5S/view?usp=sharing
(stesso discorso del file precedente: ha estensione “.ggb” e va scaricato e aperto in app).
Ho imposta il "Rapporto assi" a 500:1 per rendere l'asse Y più "allungato" rispetto all'asse X
(essendo il triangolo molto "schiacciato" quando tende a degenere non si noterebbero i lati).

Mostro la costruzione su GeoGebra:
- creo uno “Slider” che chiamo “ε” con minimo 0.0001, massimo 0.5 e incremento 0.001
- creo una costante δ che vale 0.00001;
- i lati del triangolo valgono **a**=1, **b**=1+ε, **c**=ε+δ
- sui lati **a** e **b** trovo i punti medi e le intersezioni con la bisettrice dell’angolo opposto
- disegno i segmenti che uniscono le due coppie di punti che chiamo rispettivamente: $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{b_1}$
- mostro su caselle di testo come variano i valori dei “rapporti di scalenità”: $\mathbf{a_1}/\mathbf{a}$ e $\mathbf{b_1}/\mathbf{b}$
- mostro che il rapporto $\mathbf{a_1}/\mathbf{a}$ coincide con la formula su “le Scienze” e utilizzata da me
- la formula per il lato **a**, date le lunghezze degli altri due, è: (|1-(ε+δ)|)/(2(1+ε+δ)
- il valore della formula è in una casella di testo per confermare che coincide con: $\mathbf{a_1}/\mathbf{a}$
- si può verificare, così, che il valore della formula varia al tendere dello Slider ε a 0
  (quando ε si approssima a 0 la lunghezza di **b** tende a 1 e quella di **c** tende a “quasi” 0).

Facendo scorrere lo “Slider” verso il valore 0.0001 si nota che il rapporto tende ad 1/2.
Anche in questo caso si giunge ad un triangolo degenere e 1/2 si ha sui lati lunghi: **a** e **b**.
I valori ε e δ possono essere piccoli a piacere per far tendere ad infinitesimale il lato **c**.
La costruzione serve a mostrare che il valore massimo di scalenità è 1/2 sia per **a** che per **b**
(ho usaro ε e δ per mostrare che si può partire con **a** e **b** diversi e poi ridurre, man mano **c**).

I triangoli che minimizzano il minimo rapporto di scalenità sono tutti i triangoli isosceli.
Il triangolo che massimizza il minimo rapporto è quello i cui lati sono in rapporto 1, ϕ, ϕ^2.
Il triangolo che massimizza il massimo rapporto è con i lati in rapporto: 1, 1 , ε; con ε→0.
Infine, il triangolo che minimizza il massimo rapporto di scalenità è il triangolo equilatero.

Il triangolo equilatero è pure quello che minimizza la somma dei tre rapporti di scalenità.
Il triangolo che massimizza tale somma è quello che ha i lati in rapporto 1, 1 , ε; con ε→0.
Per questo ultimo caso è necessaria un breve accenno di dimostrazione non essendo ciò ovvio:
- i triangoli di questo tipo sono isosceli degeneri in cui la somma vale: 0 + 1/2 +1/2 = 1
- la somma dei tre rapporti di scalenità è una funzione continua definita per tutti i triangoli
- il suo valore massimo si trova o all'interno del dominio di definizione o sul suo confine
- il dominio sono tutti i triangoli; il confine quelli degeneri (cioè con i vertici allineati)
- è stato mostrato che il valore massimo di tale funzione continua per i triangoli degeneri è 1
- indico la funzione con S(a,b,c), dove a,b,c sono lati di un generico triangolo con a ≥ b ≥ c
- eliminando valori assoluti ottengo $S(a,b,c) = (b-c)/[2(b+c)] + (a-c)/[2(a+c)] +(a-b)/[2(a+b)]$
- derivando sul lato più lungo ho: $\delta S/ \delta a = 0 + c/[2(a+c)^2] + b/[2(a+b)^2]$ che è sempre positivo
- derivando sul lato più corto ho: $\delta S/ \delta c = - b/[2(b+c)^2] - c/[2(a+c)^2] + 0$; sempre negativo
- quindi:
-- allungando il lato più lungo (a), la somma dei rapporti di scalenità aumenta sempre
-- accorciando il lato più corto (c), la somma dei rapporti di scalenità aumenta sempre
-- la funzione non ha un massimo all'interno del dominio dei triangoli non degeneri
-- è spinta verso il confine e il valore massimo può essere raggiunto solo al limite

-- il triangolo degenere di lati in rapporto 1,1,ε massimizza la somma rapporti di scalenità.
La bozza di dimostrazione fornita si basa sull'assunto che i lati siano ordinati: $a \geq b \geq c$.
Questa assunzione permette di rimuovere i valori assoluti e semplificare, quindi, la formula.
In questo modo la massimizzazione e minimizzazione si ottiene sul lato lungo “a” e corto “c”.
La derivata parziale rispetto a “b” non è necessaria perché la sua variazione non spingerebbe la somma verso un valore superiore a quello che si ottiene estremizzando i lati: “a” e “c”.
La somma dei rapporti di scalenità nel triangolo degenere $(1,1,\epsilon)$ per $\epsilon \to 0$ è 1; somma massima.
Nel degenere "simmetrico" (1,1/2,1/2): i rapporti sono 1/6,1/6,0 con somma 1/3; somma minima.
Nel triangolo degenere di lati in rapporto aureo $(1,\phi,\phi^2)$: $2*[(\sqrt{5} - 2)/2] + \phi/[2(2+\phi)] \approx 0.46$
(si semplifica in $(7\varphi-1)/[2(\varphi+3)]$ con $\varphi=1/\phi$; anche la somma delle scalenità è collegata a φ).

La somma dei tre rapporti di scalenità è una funzione continua in tre variabili: $S(a,b,c)$.
Per trovare i valori estremi di questa somma si può analizzare il comportamento della funzione.
I triangoli degeneri sono quelli “schiacciati” che hanno un lato che è la somma degli altri due
(ad esempio, i loro lati, con $a \leq b \leq c$, si possono rappresentare come: $a=1$, $b=1+x$, $c=2+x=b+1$)
La somma dei loro tre rapporti di scalenità può essere rappresentata con una funzione: $s(b)$
(la funzione, a differenza della precedente, dipende solamente dal lato b, …e quindi da x):
$s(b) = (b-1)/[2(b+1)] + b/[2(b+2)] + 1/[2(2b+1)] = [b(4b^2 + 7b + 1)]/[2(2b^3 + 7b^2 + 7b + 2)]$.
La funzione è monotona e crescente, quindi, il suo comportamento ne determina massimo e minimo:
- somma minima: si ha per $b=1$, cioè con lati di lunghezza 1,1,2; la somma dei rapporti è: 1/3
- somma massima: $\lim(b\to\infty)\ s(b) = (4b^3 + \ldots)/(4b^3 + \ldots) = 1$: il rapporto dei coefficienti più alti
- caso intermedio $s(b)=1/2$: si semplifica in $1+3b+b^3 = 0$, che con la trigonometria $b=2\cos(\pi/9)$.